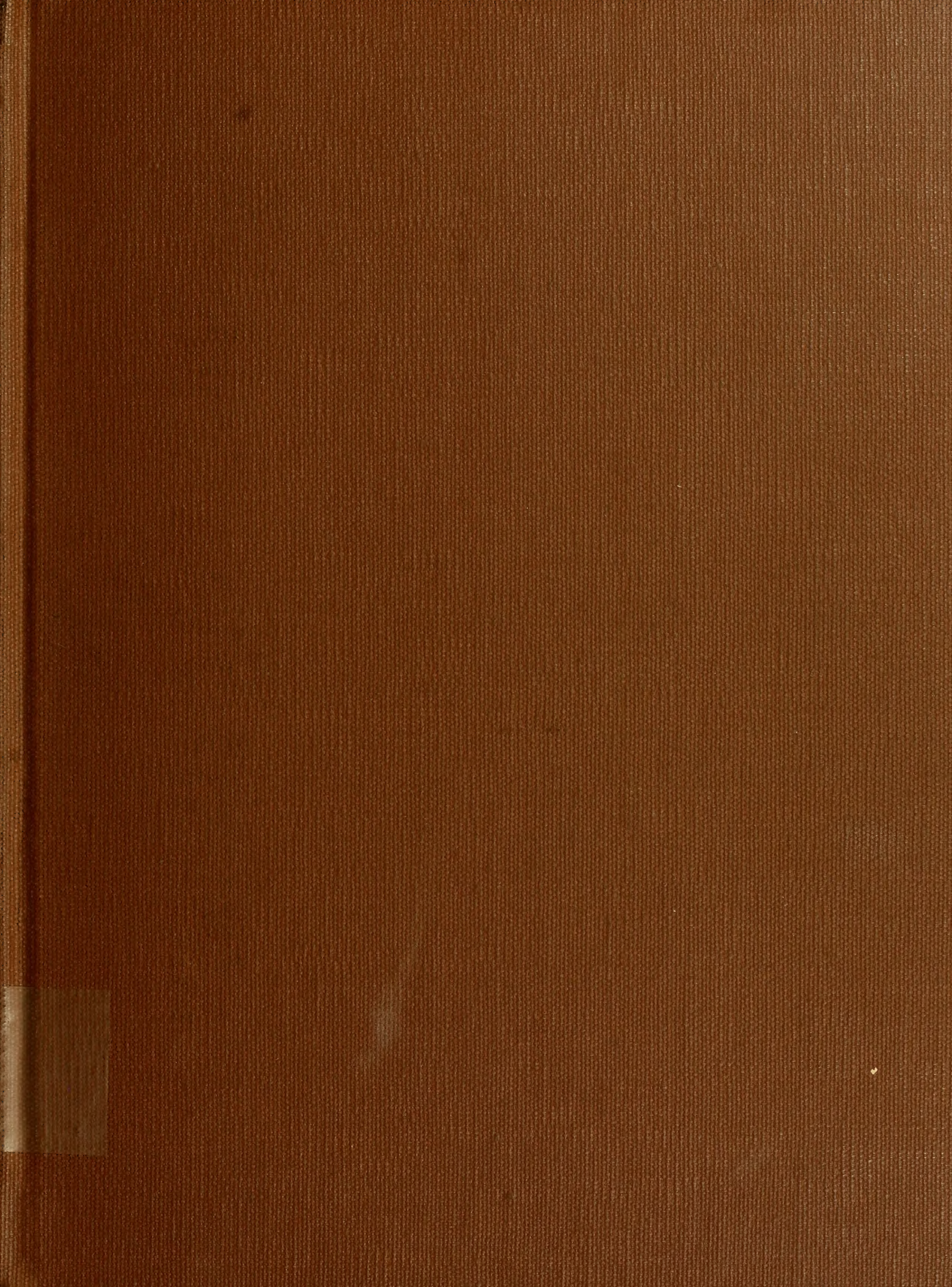
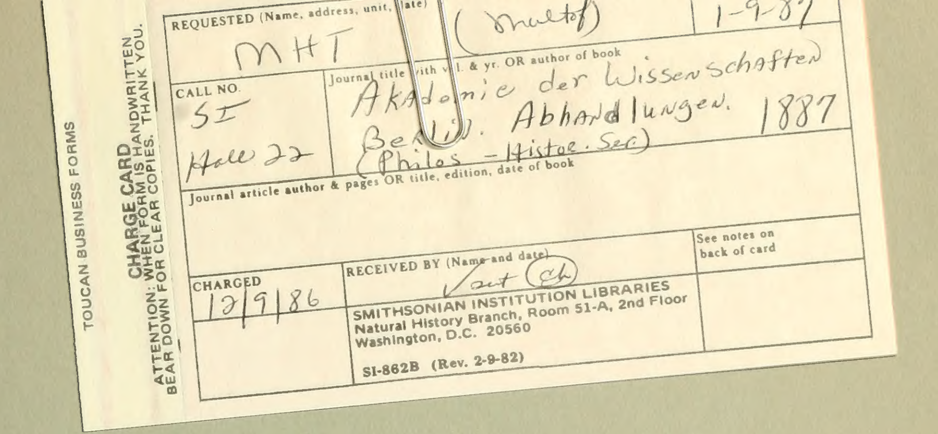



TOUCAN BUSINESS FORMS

CHARGE CARD

ATTENTION: WHEN FORM IS HANDWRITTEN BEAR DOWN FOR CLEAR COPIES. THANK YOU.

REQUESTED (Name, address, unit, date) MHT (Multhoff) 1-9-87

CALL NO. SI Hall 22

Journal title with vol. & yr. OR author of book: Akademie der Wissenschaften Berlin. Abhandlungen. 1887 (Philos. - Histor. Sec)

Journal article author & pages OR title, edition, date of book

See notes on back of card

CHARGED 12/9/86

RECEIVED BY (Name and date)

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
Natural History Branch, Room 51-A, 2nd Floor
Washington, D.C. 20560

SI-862B (Rev. 2-9-82)



ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

AUS DEM JAHRE

1887.

BERLIN.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1888.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

AUS DEM JAHRE
1887.

BERLIN.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1888.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Buchdruckerei der Königl. Akademie der Wissenschaften (G. Vogt).
Berlin, Universitäts-Strafse 8.

Inhalt.

Abhandlungen.

Physikalisch-mathematische Classe.

Physikalische Abhandlungen.

Philosophisch-historische Classe.

Abhandlungen nicht zur Akademie gehöriger Gelehrter.

Physikalische Abhandlungen.

Mathematische Abhandlungen.

Philosophisch-historische Abhandlungen.

Jahr 1887.

I.

Verzeichnifs der im Jahre 1887 stattgehabten Sitzungen der Akademie und der darin gelesenen Abhandlungen.

Öffentliche Sitzungen.

Sitzung am 27. Januar zur Feier des Jahrestages König Friedrich's II.

Der an diesem Tage vorsitzende Secretar, Hr. E. du Bois-Reymond, eröffnete die Festsitzung mit einer in dem Sitzungsbericht abgedruckten Rede.

Hierauf hielt Hr. von Helmholtz einen Vortrag über die Geschichte des Princips der kleinsten Action.

Sitzung am 24. März zur Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs.

Hr. Auwers, als vorsitzender Secretar, eröffnete die Sitzung mit einer in dem Bericht abgedruckten Ansprache.

Hierauf wurden die statutarisch vorgeschriebenen Jahresberichte über die fortlaufenden gröfseren litterarischen Unternehmungen der Akademie verlesen.

Hr. A. Kirchhoff berichtete über die attische Inschriftensammlung, Hr. Mommsen über die lateinische, sowie über die Vorarbeiten für die römische Prosopographie.

Im Namen der akademischen Commission berichtete Hr. Zeller über die Herausgabe der Commentatoren des Aristoteles.

Hr. von Sybel berichtete im Namen der Commission für die Herausgabe der politischen Correspondenz König Friedrich's II.

Ferner wurde über den Fortgang der Herausgabe der Werke Jacobi's berichtet.

Schliefslich folgte die gleichfalls statutarisch vorgeschriebene Berichterstattung der mit der Akademie verbundenen Stiftungen und wissenschaftlichen Institutionen.

Der von der vorberathenden Commission der Bopp-Stiftung erstattete Bericht wurde vorgetragen.

Hr. E. du Bois-Reymond, als Vorsitzender des Curatoriums der Humboldt-Stiftung für Naturforschung und Reisen, erstattete Bericht über die Wirksamkeit der Stiftung im verflossenen Jahre.

Darauf wurde über die Savigny-Stiftung berichtet.

Hr. Wattenbach trug den Jahresbericht der Central-Direction der Monumenta Germaniae historica vor.

Hr. Conze erstattete den Jahresbericht über das Kaiserlich deutsche archaeologische Institut.

Sitzung am 30. Juni zur Feier des Leibniz'schen Jahrestages.

Hr. Mommsen eröffnete die Festsitzung mit einleitenden Worten.

Darauf hielten die neu in die Akademie eingetretenen Mitglieder ihre Antrittsreden. Diejenigen der HH. Lehmann, Schmoller, Weizsaecker wurden von dem vorsitzenden Secretar, Hrn. Mommsen, beantwortet, wogegen Hr. Curtius die Antrittsreden der HH. Sachau und Dilthey beantwortete. Die Antrittsrede des Hrn. Klein beantwortete Hr. E. du Bois-Reymond, als Secretar der physikalisch-mathematischen Classe.

Die sämmtlichen Antrittsreden sowie die Beantwortungen derselben sind in den Sitzungsberichten abgedruckt.

Hierauf folgte die Veröffentlichung der Preisaufgabe der Charlotten-Stiftung.

Zum Schlufs las Hr. Schmidt eine Gedächtnifsrede auf das verstorbene Mitglied der Akademie, Hrn. Wilhelm Scherer. Dieselbe ist in den Abhandlungen der Akademie erschienen.

Gesammtsitzungen der Akademie.

Januar 6. Hofmann, über das Chinolinroth. (*S. B.*)

Januar 20. Weber, über die Pârasiprakâça des Krishṇadâsa. (*Abh.*)
Milchhoefer, Prof. A., über Standpunkt und Methode der attischen Demenforschung. Vorgelegt von Curtius. (*S. B.*)

Februar 10. Fuchs, über die Umkehrung von Functionen zweier Veränderlichen. (*S. B.*)

Februar 24. Curtius, über die Volksgrüfse der Neugriechen in ihrer Beziehung zum Alterthum. (*S. B.*)

Fuchs, über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, und über eine Anwendung desselben auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (*S. B.*)

Hegel, über den Erbkauf in den dänischen Stadtrechten im Mittelalter. (*S. B.*)

Chun, Prof. C., die pelagische Thierwelt in gröfseren Meerestiefen und ihre Beziehungen zu der Oberflächenfauna. Vorgelegt von Schulze.

März 10. Grunmach, Dr. E., über die Beziehung der Dehnungscurve elastischer Röhren zur Pulsgeschwindigkeit. Vorgelegt von E. du Bois-Reymond. (*S. B.*)

von Helmholtz, zur Geschichte des Princips der kleinsten Action. (*S. B.*)

März 31. von Sybel, über die Olmützer Punctation.

König, Dr. A., über Newton's Gesetz der Farbenmischung und darauf bezügliche Versuche des Hrn. Eugen Brodhun. Vorgelegt von v. Helmholtz. (*S. B.*)

Wilsing, Dr. J., über die Resultate von Pendelbeobachtungen auf der Potsdamer Sternwarte zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. Vorgelegt von Auwers. (*S. B.*)

April 21. Diels, über Herodot und Hekataios.

Mai 5. Conze, über die Lage der alten Teuthrania.

Sprung, Dr. A., über ungewöhnliche Störungen im Gange des Barometers am 3. und 4. Mai 1887. Vorgelegt von v. Bezold. (*S. B.*)

Mai 26. Hofmann, zur Kenntnifs des Amidophenylmercaptans und der entsprechenden Naphtylverbindungen. (*S. B.*)

Juni 16. Rammelsberg, über das Atomgewicht der Yttriummetalle in ihren natürlichen Verbindungen und über den Gadolinit. (*S. B.*)

Lolling, Dr. H., thessalische Freilassungsurkunden. Vorgelegt von A. Kirchhoff. (*S. B.*)

Gottsche, Dr. C., über das Mitteloligocän von Itzehoe. Vorgelegt von Roth. (*S. B.*)

Juli 7. Schwendener, über Quellung und Doppelbrechung vegetabilischer Membranen. (*S. B.*)

Pomtow, Dr. H., über zwei delphische Bustrophedon-Inschriften. Vorgelegt von A. Kirchhoff. (*S. B.*)

Ginzel, F. K., über einige von persischen und arabischen Schriftstellern erwähnte Sonnen- und Mondfinsternisse. Vorgelegt von Auwers. (*S. B.*)

Vogel, Prof. H. W., Beziehungen zwischen Zusammensetzung und Absorptionsspectrum organischer Farbstoffe. Vorgelegt von Hofmann. (*S. B.*)

Juli 21. Schmidt, über die griechischen Neutra auf -ας.

October 20. Munk, Untersuchungen über die Schilddrüse. (*S. B.*)

November 3. Kiepert, über die Kartographie der Insel Lesbos.

November 17. Hofmann, über die von Prof. Tiemann entdeckten beiden neuen Körpergruppen der Amidoxime und Azoxime. (*S. B.*)

Maurer, Dr. J., über die nächtliche Strahlung und ihre Gröfse in absolutem Maafse. Vorgelegt von v. Bezold. (*S. B.*)

Assmann, Dr. R., eine neue Methode zur Ermit-

telung der wahren Lufttemperatur. Vorgelegt von v. Bezold. (*S. B.*)

December 1. A. Kirchhoff, über zwei peloponnesische Inschriften. (*S. B.*)

Schuchhardt, vorläufiger Bericht über seine im Juli-August-September 1887 ausgeführte Bereisung der pergamenischen Landschaft. Vorgelegt von Conze. (*S. B.*)

Ebbinghaus, Prof. H., über die Gesetzmäfsigkeit des Helligkeitscontrastes. Vorgelegt von v. Helmholtz. (*S. B.*)

December 15. Fuchs, über Relationen zwischen den Integralen von Differentialgleichungen. (*S. B.*)

Milchhoefer, Prof. A., Bericht über seine Arbeiten in Attika. Vorgelegt von Curtius. (*S. B.*)

Ginzel, F. K., Finsternifs-Canon für das Untersuchungsgebiet der römischen Chronologie. Vorgelegt von Auwers. (*S. B.*)

Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe.

Januar 13. Landolt, über die Zeitdauer der Reaction zwischen Jodsäure und schwefliger Säure. (Vierte Mittheilung.) (*S. B.*)

Februar 3. Waldeyer, über den Placentarkreislauf des Menschen. (*S. B.*)

Westermaier, Dr. M., neue Beiträge zur Kenntnifs der physiologischen Bedeutung des Gerbstoffs in

den Pflanzengeweben. Vorgelegt von Schwendener. (*S. B.*)

Februar 17. Schulze, zur Stammesgeschichte der Hextactinelliden. (*Abh.*)

März 3. v. Bezold, Experimental-Untersuchungen über rotirende Flüssigkeiten. (*S. B.*)

Boettger, Dr. O., Verzeichnifs der von Dr. H. Simroth aus Portugal und von den Azoren mitgebrachten Reptilien und Barachier. Vorgelegt von Schulze. (*S. B.*)

April 14. Ewald, über die Verbreitung der untersten Kreidebildungen im nördlichen Deutschland. (*S. B.*)

April 28. Weierstrafs, über die Transcendenten allgemeinster Art. (*S. B.*)

Mai 12. Kronecker, zur Theorie der elliptischen Functionen. (*S. B.*)

Juni 9. Auwers, neue Untersuchungen über den Durchmesser der Sonne. II. (*S. B.*)

Hertz, Prof. H., über einen Einflufs des ultravioletten Lichts auf die elektrische Entladung. Vorgelegt von v. Helmholtz. (*S. B.*)

Weber, Prof. H. J., die Entwickelung der Lichtemission glühender fester Körper. Vorgelegt von v. Helmholtz. (*S. B.*)

Pribram, Prof. R., über die specifische Drehung optisch activer Substanzen in sehr verdünnten Lösungen. Vorgelegt von Landolt. (*S. B.*)

Schneider, Dr. R., ein bleicher Asellus in den Gruben von Freiberg im Erzgebirge (*Asellus aquaticus, var. Fribergensis*). Vorgelegt von Schulze. (*S. B.*)

Juni 23. Roth, über den Zobtenit. (*S. B.*)

Juli 14. Pringsheim, über die Abhängigkeit der Assimilation grüner Zellen von ihrer Sauerstoffathmung, und den Ort, wo der im Assimilationsacte der Pflanzenzelle gebildete Sauerstoff entsteht. (*S. B.*)

Hofmann, über die Verbreitung des Arsens in der Natur.

Hofmann, Nachträgliches über Amidophenylmercaptan. (*S. B.*)

Juli 28. v. Helmholtz, weitere Untersuchungen über die Elektrolyse des Wassers. (*S. B.*)

Nagel, Dr., über das menschliche Ei. Vorgelegt von Waldeyer. (*S. B.*)

October 27. Burmeister, neue Beobachtungen an Coelodon. (*S. B.*)

Rawitz, Dr. B., die Fufsdrüse der Opistobranchier. Vorgelegt von Schulze. (*Abh.*)

Baumhauer, Dr. H., über die Abhängigkeit der Ätzfiguren des Apatit von der Natur und Concentration des Ätzmittels. Vorgelegt von Roth. (*S. B.*)

November 10. Hertz, Prof. H., über Inductionserscheinungen, hervorgerufen durch die elektrischen Vorgänge in Isolatoren. Vorgelegt von v. Helmholtz. (*S. B.*)

Gürich, Dr., vorläufiger Bericht über seine geologischen Forschungen im polnischen Mittelgebirge. (*S. B.*)

November 24. Landolt, über polaristrobometrisch-chemische Analyse. (*S. B.*)

December 8. Waldeyer, über den Bau des Rückenmarkes von *Gorilla Gina*. (*Abh.* 1888.)

Traube, über die elektrolytische Entstehung des Wasserstoffperoxyds an der Kathode. (*S. B.*)

Nufsbaum, Prof., über die Ergebnisse einer mit akademischer Unterstützung zu zoologischen Untersuchungen ausgeführten Reise nach Californien. (*S. B.*)

December 22. Schulze, E., über das Epithel der Lippen und der Mundrachenhöhle ausgewachsener Batrachierlarven.

Ludwig, Prof. H., drei Mittheilungen über alte und neue Holothurienarten. Vorgelegt von Schulze. (*S. B.*)

Sitzungen der philosophisch-historischen Classe.

Januar 13. Mommsen, über die Ausdehnung des Römischen Reiches.

Februar 3. Kiepert, über die von ihm im October v. Js. in der Umgegend von Smyrna gemachten Routen und über die Entdeckung von Kolophon durch Hrn. Dr. Schuchhardt.

Euting, bilingue Inschriften aus Cypern, vorgelegt von Dillmann. (*S. B.*)

Milchhoefer, Prof. A., Bericht über seine Funde in Lamptrai und anderen Demen der attischen Mesogaia. Vorgelegt von Curtius.

Februar 17. A. Kirchhoff, Bemerkungen zu dem Bruchstück einer Basis auf der Burg von Athen. (*S. B.*)

Nöldeke, über die Ghassânischen Fürsten aus dem Hause Gafna's. (*Abh.*)

März 3. Zeller, über die Unterscheidung einer doppelten Gestalt der Ideenlehre in den platonischen Schriften. (*S. B.*)

März 17. Mommsen, über einen neu aufgefundenen Reisebericht nach dem gelobten Lande. (*S. B.*)

April 14. Schrader, über die keilinschriftliche babylonische Königsliste. II. (*S. B.*)

April 28. Dillmann, über die apokryphen Märtyrergeschichten des Cyriacus mit Julitta und des Georgius. (*S. B.*)

Euting, Prof., Epigraphische Miscellen. Vorgelegt von Dillmann. (*S. B.*)

Mai 12. Tobler, die Berliner Handschrift des Decameron. (*S. B.*)

Juni 9. Wattenbach, über die Secte der Brüder vom freien Geiste. (*S. B.*)

Juni 23. Pernice, über formale Gesetze im römischen Recht.

Juli 14. Brunner, über den Reiterdienst bei den Franken und die Anfänge des fränkischen Lehnswesens.

Juli 28. Hirschfeld, zur Entstehungsgeschichte der altrömischen Tradition.

Wilcken, Dr. U., die Achmîm-Papyri in der Bibliothéque Nationale zu Paris. Vorgelegt von Mommsen. (*S. B.*)

October 27. Schott, Etwas zur vergleichenden Etymologie von Wörtern des sogenannten altaischen Sprachstammes im weitesten Sinne. (*S. B.*)

November 10. Weber, über Ahaljâ, Ἀχιλλεύς und Verwandtes. (*S. B.*)

Zangemeister, C., über die Entstehung der römischen Zahlzeichen. (*S. B.*)

Schrader, Nachtrag zu seiner Abhandlung über die keilinschriftliche babylonische Königsliste. (*S. B.*)

November 24. Mommsen, über die Stellung des römischen Senats zu den internationalen Verträgen.

A. Kirchhoff, Inschriften von der Akropolis zu Athen aus der Zeit nach dem Jahre des Archon Eukleides. (*S. B.*)

Brunner, über die fränkischen Hausmeier als Führer der königlichen Gefolgschaften.

December 8. Curtius, Studien zur Geschichte der Artemis. (*S. B.*)

A. Kirchhoff, Zweite Abtheilung der neuerdings auf der Akropolis zu Athen gefundenen Inschriften aus der Zeit nach dem Jahre des Archon Eukleides. (*S. B.*)

December 22. Zeller, über den Begriff der Tyrannis bei den Griechen. (*S. B.*)

Zachariae von Lingenthal, die Synopsis canonum. Ein Beitrag zur Geschichte der Quellen des canonischen Rechts der griechischen Kirche. (*S. B.*)

Die mit *S. B.* bezeichneten Vorträge sind in den Sitzungsberichten, die mit *Abh.* bezeichneten in den Abhandlungen abgedruckt.

II.

Preisaufgabe der Charlotten-Stiftung.

Nach dem Statut der von Frau Charlotte Stiepel, geborene Freiin von Hopfgarten, errichteten Charlotten-Stiftung für Philologie ist am Leibniztage eine neue Aufgabe wie folgt veröffentlicht.

„Die von der philosophisch-historischen Classe erwählte Commission, welche die Aufgaben zu bestimmen hat, stellt im Namen der Akademie folgendes Thema:

> Die Schrift Philon's de opificio mundi (περὶ τῆς Μωσέως κοσμοποιίας) soll in neuer Textbearbeitung vorgelegt werden, wobei von der Beschaffung neuen handschriftlichen Materials abgesehen werden kann. Die kurzgefafsten Anmerkungen sollen hauptsächlich die textkritische Methode des Bearbeiters erläutern. Sprachliche Untersuchungen sind erwünscht, litterarhistorische und quellenkritische Excurse über diese Schrift nicht ausgeschlossen. Es wird zugleich der Wunsch ausgesprochen, diese probeweise Bearbeitung möge die Anregung zu weiteren Studien geben, die ihr Ziel in einer auf neuer handschriftlicher Grundlage beruhenden Philo-Ausgabe fänden.“

„Die Stiftung ist zur Förderung junger, dem Deutschen Reiche angehöriger Philologen bestimmt, welche die Universitätsstudien vollendet und den philosophischen Doctorgrad erlangt oder die Prüfung für das höhere Schulamt bestanden haben, aber zur Zeit ihrer Bewerbung noch ohne feste Anstellung sind. Privatdocenten an Universitäten sind von der Bewerbung nicht ausgeschlossen.“

„Die Arbeiten der Bewerber sind bis zum 1. März 1888 an die Akademie einzusenden. Sie sind mit einem Denkspruch zu versehen; in einem versiegelten, mit demselben Spruche bezeichneten Umschlage ist der Name des Verfassers anzugeben und der Nachweis zu liefern, dafs die statutenmäfsigen Voraussetzungen bei dem Bewerber zutreffen.“

„In der öffentlichen Sitzung am Leibniztage 1888 ertheilt die Akademie dem Verfasser der des Preises würdig erkannten Arbeit das Stipendium. Dasselbe besteht in dem Genusse der zur Zeit 4 Procent betragenden Jahreszinsen des Stiftungscapitals von 30000 Mark (1200 Mark) auf die Dauer von vier Jahren.“

III.

Verzeichnifs der im Jahre 1887 erfolgten besonderen Geldbewilligungen aus akademischen Mitteln zur Ausführung oder Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen.

Es wurden im Lauf des Jahres 1887 bewilligt:

3000 Mark dem Mitgliede der Akademie Hrn. A. Kirchhoff zur Fortsetzung des Corpus Inscriptionum Graecarum.

3000 „ dem Mitgliede der Akademie Hrn. Mommsen zur ferneren Herstellung von Supplementen zum Corpus Inscriptionum Latinarum.

4000 „ demselben zur Fortführung der Prosopographie der römischen Kaiserzeit.

6300	Mark	den Mitgliedern der Akademie HH. Zeller, Bonitz und Diels zur Fortsetzung der Arbeiten für eine kritische Ausgabe der griechischen Commentatoren des Aristoteles.
6000	„	den Mitgliedern der Akademie HH. von Sybel und Lehmann zur Fortsetzung der Herausgabe der politischen Correspondenz und der Staatsschriften König Friedrich's II.
1000	„	dem Mitgliede der Akademie Hrn. Weierstrafs zur Fortsetzung der Herausgabe der Werke Jacobi's.
1200	„	Hrn. Dr. Karl Schmidt in Freiburg i. Br. zu einer geologischen Bereisung der Pyrenäen.
900	„	Hrn. Dr. Rawitz hierselbst zu einem Aufenthalt in Neapel zur Untersuchung des Mantelrandes der Acephalen und des Rückenmarkes von Trigla.
3000	„	Hrn. Prof. Nufsbaum in Bonn zu einer Reise nach San Francisco behufs Fortsetzung seiner Untersuchungen über Theilung der Organismen.
4000	„	Hrn. Prof. Chun in Königsberg zu einer Reise nach den canarischen Inseln behufs Abschlusses seiner Untersuchungen über die Siphonophoren.
500	„	Hrn. Dr. Gürich in Breslau zur geologischen Untersuchung des polnischen Mittelgebirges.
1000	„	Hrn. Dr. Oltmanns in Rostock zu Untersuchungen über die Entwickelung der Fucaceen.
2500	„	Hrn. Dr. Urban hierselbst zu einer durch Hrn. Baron von Eggers auszuführenden botanischen Erforschung der Insel S. Domingo.
3500	„	Hrn. E. von Oertzen hierselbst zu thiergeographischen Studien auf den Inseln des ägäischen Meeres.

600 Mark Hrn. Dr. Zacharias in Hirschberg zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Fauna der norddeutschen Seen.

1000 „ Hrn. Dr. Vosmaer in Neapel zur Herausgabe einer Bibliographie der Spongien.

2000 „ Hrn. Prof. Kiefsling in Hamburg als Beihülfe zur Herausgabe seines Werkes über die Dämmerungs-Erscheinungen.

1500 „ Hrn. Dr. Weinstein hierselbst zur Bearbeitung von Erdstrombeobachtungen.

1500 „ Hrn. Prof. Goldstein hierselbst zur Fortsetzung seiner Versuche über elektrische Lichterscheinungen in verdünnten Gasen.

3000 „ Hrn. Dr. Stuhlmann in Würzburg zu einer zoologischen Forschungsreise nach Sansibar.

500 „ der Schweizerbart'schen Buchhandlung in Stuttgart zur Herausgabe des Werkes des Dr. F. Noetling über das Vorkommen des Jura am Hermon.

750 „ Hrn. Dr. Schuchhardt hierselbst zur Vollendung der Karte der Umgegend von Pergamon.

1800 „ Hrn. E. Glaser in Prag als Beitrag zu den Kosten einer neuen wissenschaftlichen Bereisung Arabiens.

540 „ der G. Reimer'schen Verlagsbuchhandlung hierselbst als Beihülfe zur Herausgabe des 4—6. Heftes des V. Bandes der Etruskischen Spiegel von Gerhard.

500 „ Hrn. Dr. Reitzenstein in Breslau zu einer Reise nach England und Frankreich zur Vergleichung von Glossarhandschriften des Cyrillus.

900 „ Hrn. Prof. Gerhardt zur Herausgabe des 3. Bandes der philosophischen Schriften von Leibniz.

600 Mark Hrn. Dr. K. Bezold in München zu einer Reise nach London behufs assyrologischer Studien.

1500 „ Hrn. Prof. Milchhoefer in Münster zur Durchforschung der attischen Demen auf Grundlage der „Karten von Attika“.

600 „ Hrn. Dr. Winkler in Breslau zur Herausgabe seiner ural-altaischen Studien.

700 „ Hrn. Dr. Wilcken hierselbst als Unterstützung zur Herausgabe seiner Sammlung der ptolemäischen Papyrus-Urkunden.

1200 „ Hrn. Prof. Bezzenberger in Königsberg zur Herausgabe des nachgelassenen Mannhardt'schen Werks: Denkmäler der preufsisch-lettischen Mythologie.

IV.

Verzeichnifs der im Jahre 1887 erschienenen im Auftrage oder mit Unterstützung der Akademie bearbeiteten oder herausgegebenen Werke.

Corpus Inscriptionum Latinarum. Vol. XIV.

Politische Correspondenz König Friedrich's II. Bd. XV.

Supplementum Aristotelicum. Vol. II. P. I. (Alexandri Aphrodisiensis scripta minora ed. I. Bruns.)

von Pflugk-Harttung, Specimina selecta chartarum pontificum Romanorum. I. II. III.

Taschenberg, O., Bibliotheca zoologica. II.

Dohrn, Jahresbericht der Zoologischen Station in Neapel für 1886.

Koch, L., Entwickelungsgeschichte der Orobanchen.
Volckens, G., Flora der aegyptisch-arabischen Wüste.
Winkler, H., zur Sprachgeschichte.
Noetling, der Jura am Hermon.
Deussen, P., die Sutras des Vedanta.
Fritsch, über die elektrischen Fische. Abth. I.
Gerhardt, Leibniz' philosophische Schriften. Bd. 3.
Etruskische Spiegel. Band V. Heft 4. 5. 6.

V.

Veränderungen im Personalstande der Akademie im Laufe des Jahres 1887.

Gewählt wurden:

zum ordentlichen Mitgliede der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Karl Klein am 17. März, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 6. April 1887;

zu ordentlichen Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Max Lehmann am 9. December 1886, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 24. Januar 1887,
„ Eduard Sachau am 9. December 1886, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 24. Januar 1887,
„ Gustav Schmoller am 9. December 1886, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 24. Januar 1887,

Hr. Julius Weizsaecker am 9. December 1886, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 24. Januar 1887,

„ Wilhelm Dilthey am 9. December 1886, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 24. Januar 1887;

zum Ehrenmitgliede:

Don Carlos Ibañez, General in Madrid, Präsident der permanenten Commission der Internationalen Erdmessung, gewählt am 20. Januar, bestätigt durch Königliche Cabinetsordre vom 1. April 1887;

zu correspondirenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Rudolph Leuckart in Leipzig am 20. Januar 1887,

„ Franz von Leydig in Bonn am 20. Januar 1887,

„ Eduard Schönfeld in Bonn am 10. Februar 1887,

„ Adalbert Krueger in Kiel am 10. Februar 1887,

„ Nicolai von Kokscharow in St. Petersburg am 20. October 1887,

„ Heinrich Rosenbusch in Heidelberg am 20. October 1887,

„ Ferdinand Zirkel in Leipzig am 20. October 1887,

„ Eduard van Beneden in Lüttich am 3. November 1887,

„ C. H. D. Buys-Ballot in Utrecht am 3. November 1887;

zu correspondirenden Mitgliedern der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Karl Zangemeister in Heidelberg am 10. Februar 1887,

„ Graziadio Isaia Ascoli in Mailand am 10. März 1887,

„ Panagiotis Kabbadias in Athen am 17. November 1887,

„ Ingram Bywater in Oxford am 17. November 1887,

„ Théophile Homolle in Paris am 17. November 1887.

Gestorben sind:

die ordentlichen Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. August Wilhelm Eichler am 2. März 1887,
„ Gustav Robert Kirchhoff am 16. October 1887;

das auswärtige Mitglied:

Hr. August Friedrich Pott in Halle am 5. Juli 1887;

die correspondirenden Mitglieder der physikalisch-mathematischen Classe:

Hr. Georg Rosenhain in Königsberg am 14. März 1887,
„ Bernhard Studer in Bern am 2. Mai 1887,
„ Jean-Baptiste Boussingault in Paris am 2. Mai 1887,
„ Gustav Theodor Fechner in Leipzig am 19. November 1887;

die correspondirenden Mitglieder der philosophisch-historischen Classe:

Hr. Wilhelm Henzen in Rom am 26. Januar 1887,
„ Adolf Friedrich Stenzler in Breslau am 27. Februar 1887,
„ Alfred von Reumont in Burtscheid bei Aachen am 27. April 1887,
„ Ludolf Stephani in St. Petersburg am 11. Juni 1887.

Verzeichnifs

der

Mitglieder der Akademie der Wissenschaften

am Schlusse des Jahres 1887.

I. Beständige Secretare.

Hr. *du Bois-Reymond,* Secr. der phys.-math. Classe.
- *Curtius,* Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Mommsen,* Secr. der phil.-hist. Classe.
- *Auwers,* Secr. der phys.-math. Classe.

II. Ordentliche Mitglieder

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.
	Hr. *Wilhelm Schott*	1841 März 9.
Hr. *Emil du Bois-Reymond*		1851 März 5.
	- *Heinrich Kiepert*	1853 Juli 25.
- *Heinr. Ernst Beyrich*		1853 Aug. 15.
- *Jul. Wilh. Ewald*		1853 Aug. 15.
- *Karl Friedr. Rammelsberg*		1855 Aug. 15.
- *Ernst Eduard Kummer*		1855 Dec. 10.
- *Karl Weierstrafs*		1856 Nov. 19.
	- *Albrecht Weber*	1857 Aug. 24.
	- *Theodor Mommsen*	1858 April 27.
	- *Adolf Kirchhoff*	1860 März 7.
- *Leopold Kronecker*		1861 Jan. 23.

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königlichen Bestätigung.
	Hr. *Ernst Curtius*	1862 März 3.
Hr. *Aug. Wilh. Hofmann*		1865 Mai 27.
- *Arthur Auwers*		1866 Aug. 18.
- *Justus Roth*		1867 April 22.
	- *Hermann Bonitz*	1867 Dec. 27.
- *Nathanael Pringsheim*		1868 Aug. 17.
- *Hermann von Helmholtz*		1870 Juni 1.
	- *Eduard Zeller*	1872 Dec. 9.
- *Werner Siemens*		1873 Dec. 22.
- *Rudolph Virchow*		1873 Dec. 22.
	- *Johannes Vahlen*	1874 Dec. 16.
	- *Eberhard Schrader*	1875 Juni 14.
	- *Heinrich von Sybel*	1875 Dec. 20.
	- *August Dillmann*	1877 März 28.
	- *Alexander Conze*	1877 April 23.
- *Simon Schwendener*		1879 Juli 13.
- *Hermann Munk*		1880 März 10.
	- *Adolf Tobler*	1881 Aug. 15.
	- *Wilhelm Wattenbach*	1881 Aug. 15.
	- *Hermann Diels*	1881 Aug. 15.
- *Hans Landolt*		1881 Aug. 15.
- *Wilhelm Waldeyer*		1884 Febr. 18.
	- *Alfred Pernice*	1884 April 9.
	- *Heinrich Brunner*	1884 April 9.
	- *Johannes Schmidt*	1884 April 9.
- *Lazarus Fuchs*		1884 April 9.
- *Franz Eilhard Schulze*		1884 Juni 21.
	- *Otto Hirschfeld*	1885 März 9.
- *Wilhelm von Bezold*		1886 April 5.
	- *Max Lehmann*	1887 Jan. 24.
	- *Eduard Sachau*	1887 Jan. 24.
	- *Gustav Schmoller*	1887 Jan. 24.
	- *Julius Weizsäcker*	1887 Jan. 24.
	- *Wilhelm Dilthey*	1887 Jan. 24.
- *Karl Klein*		1887 April 6.

III. Auswärtige Mitglieder

der physikalisch-mathematischen Classe.	der philosophisch-historischen Classe.	Datum der Königl. Bestätigung.	
	Sir *Henry Rawlinson* in London	1850	Mai 18.
Hr. *Franz Neumann* in Königsberg		1858	Aug. 18.
- *Robert Wilhelm Bunsen* in Heidelberg		1862	März 3.
	Hr. *Franz* Ritter *v. Miklosich* in Wien	1862	März 24.
- *Wilhelm Weber* in Göttingen		1863	Juli 11.
	- *Lebrecht Fleischer* in Leipzig	1874	April 20.
- *Hermann Kopp* in Heidelberg		1874	Mai 13.
	- *Giovanni Battista de Rossi* in Rom	1875	Juli 9.
Sir *Richard Owen* in London		1878	Dec. 2.
- *George Biddell Airy* in Greenwich		1879	Febr. 8.
Hr. *Charles Hermite* in Paris		1884	Jan. 2.
- *August Kekulé* in Bonn		1885	März 2.
	- *Otto von Boehtlingk* in Leipzig	1885	Nov. 30.

IV. Ehren-Mitglieder.

	Datum der Königlichen Bestätigung.	
Hr. *Peter von Tschichatschef* in Florenz	1853	Aug. 22.
- Graf *Helmuth v. Moltke* in Berlin	1860	Juni 2.
Don *Baldassare Boncompagni* in Rom	1862	Juli 21.
Hr. *Georg Hanssen* in Göttingen	1869	April 1.
S. M. Dom *Pedro*, Kaiser von Brasilien	1882	Oct. 18.
Earl *of Crawford and Balcarres* in Dunecht, Aberdeen	1883	Juli 30.
Don *Carlos Ibañez* in Madrid	1887	April 1.

V. Correspondirende Mitglieder.

Physikalisch-mathematische Classe.

		Datum der Wahl.	
Hr.	*Adolf von Baeyer* in München	1884	Jan. 17.
-	*C. H. D. Buys-Ballot* in Utrecht	1887	Nov. 3.
-	*Anton de Bary* in Strafsburg	1878	Dec. 12.
-	*Eugenio Beltrami* in Pavia	1881	Jan. 6.
-	*P. J. van Beneden* in Löwen	1855	Juli 26.
-	*Eduard van Beneden* in Lüttich	1887	Nov. 3.
-	*Enrico Betti* in Pisa	1881	Jan. 6.
-	*Francesco Brioschi* in Mailand	1881	Jan. 6.
-	*Ole Jacob Broch* in Christiania	1876	Febr. 3.
-	*Ernst von Brücke* in Wien	1854	April 27.
-	*Hermann Burmeister* in Buenos Aires	1874	April 16.
-	*Auguste Cahours* in Paris	1867	Dec. 19.
-	*Alphonse de Candolle* in Genf	1874	April 16.
-	*Felice Casorati* in Pavia	1886	Juli 15.
-	*Arthur Cayley* in Cambridge	1866	Juli 26.
-	*Michel-Eugène Chevreul* in Paris	1834	Juni 5.
-	*Elvin Bruno Christoffel* in Strafsburg	1868	April 2.
-	*Rudolph Julius Emmanuel Clausius* in Bonn	1876	März 30.
-	*Luigi Cremona* in Rom	1886	Juli 15.
-	*James Dana* in New Haven, Connecticut	1855	Juli 26.
-	*Ernst Heinrich Karl von Dechen* in Bonn	1842	Febr. 3.
-	*Richard Dedekind* in Braunschweig	1880	März 11.
-	*Franz Cornelius Donders* in Utrecht	1873	April 3.
-	*Louis-Hippolyte Fizeau* in Paris	1863	Aug. 6.
-	*Edward Frankland* in London	1856	Nov. 8.

	Datum der Wahl.	
Hr. *Carl Gegenbaur* in Heidelberg	1884	Jan. 17.
- *Wolcott Gibbs* in Cambridge, Massachusetts	1885	Jan. 29.
- *Benjamin Apthorp Gould* in Cambridge, Massachusetts	1883	Juni 7.
- *Asa Gray* in Cambridge, Massachusetts	1855	Juli 26.
- *Franz von Hauer* in Wien	1881	März 3.
- *Rudolf Heidenhain* in Breslau	1884	Jan. 17.
- *Johann Friedrich Hittorf* in Münster	1884	Juli 31.
Sir *Joseph Dalton Hooker* in Kew	1854	Juni 1.
Hr. *Thomas Huxley* in London	1865	Aug. 3.
- *Joseph Hyrtl* in Wien	1857	Jan. 15.
- *Theodor Kjerulf* in Christiania	1881	März 3.
- *Albert von Kölliker* in Würzburg	1873	April 3.
- *Friedrich Kohlrausch* in Würzburg	1884	Juli 31.
- *Nicolai von Kokscharow* in St. Petersburg	1887	Oct. 20.
- *Adalbert Krueger* in Kiel	1887	Febr. 10.
- *August Kundt* in Strafsburg	1879	März 13.
- *Rudolph Leuckart* in Leipzig	1887	Jan. 20.
- *Franz von Leydig* in Bonn	1887	Jan. 20.
- *Rudolph Lipschitz* in Bonn	1872	April 18.
- *Sven Ludvig Lovén* in Stockholm	1875	Juli 8.
- *Karl Ludwig* in Leipzig	1864	Oct. 27.
- *Charles Marignac* in Genf	1865	März 30.
- *Karl von Nägeli* in München	1874	April 16.
- *Simon Newcomb* in Washington	1883	Juni 7.
- *Eduard Pflüger* in Bonn	1873	April 3.
- *Friedrich August von Quenstedt* in Tübingen	1868	April 2.
- *Georg Quincke* in Heidelberg	1879	März 13.
- *Gerhard vom Rath* in Bonn	1871	Juli 13.
- *Friedrich von Recklinghausen* in Strafsburg	1885	Febr. 26.
- *Ferdinand von Richthofen* in Berlin	1881	März 3.
- *Ferdinand Römer* in Breslau	1869	Juni 3.
- *Heinrich Rosenbusch* in Heidelberg	1887	Oct. 20.
- *George Salmon* in Dublin	1873	Juni 12.
- *Arcangelo Scacchi* in Neapel	1872	April 18
- *Ernst Christian Julius Schering* in Göttingen	1875	Juli 8.
- *Giovanni Virginio Schiaparelli* in Mailand	1879	Oct. 23.
- *Ludwig Schläfli* in Bern	1873	Juni 12.
- *Eduard Schönfeld* in Bonn	1887	Febr. 10.

		Datum der Wahl.	
Hr.	*Heinrich Schröter* in Breslau	1881	Jan. 6.
-	*Philipp Ludwig von Seidel* in München	1863	Juli 16.
-	*Japetus Steenstrup* in Kopenhagen	1859	Juli 11.
-	*George Gabriel Stokes* in Cambridge	1859	April 7.
-	*Otto von Struve* in Pulkowa	1868	April 2.
-	*James Joseph Sylvester* in London	1866	Juli 26.
Sir	*William Thomson* in Glasgow	1871	Juli 13.
Hr.	*August Töpler* in Dresden	1879	März 13.
-	*Moritz Traube* in Breslau	1886	Juli 29.
-	*Pafnutij Tschebyschew* in St. Petersburg	1871	Juli 13.
-	*Gustav Tschermak* in Wien	1881	März 3.
-	*Gustav Wiedemann* in Leipzig	1879	März 13.
-	*Heinrich Wild* in St. Petersburg	1881	Jan. 6.
-	*Alexander William Williamson* in High Pitfold, Haslemere	1875	Nov. 18.
-	*August Winnecke* in Strafsburg	1879	Oct. 23.
-	*Ferdinand Zirkel* in Leipzig	1886	Oct. 20.

Philosophisch-historische Classe.

Hr.	*Graziadio Isaia Ascoli* in Mailand	1887	März 10.
-	*Theodor Aufrecht* in Bonn	1864	Febr. 11.
-	*George Bancroft* in Washington	1845	Febr. 27.
-	*Heinrich Brugsch* in Charlottenburg	1873	Febr. 13.
-	*Heinrich von Brunn* in München	1866	Juli 26.
-	*Franz Bücheler* in Bonn	1882	Juni 15.
-	*Georg Bühler* in Wien	1878	April 11.
-	*Ingram Bywater* in Oxford	1887	Nov. 17
-	*Giuseppe Canale* in Genua	1862	März 13.
-	*Antonio Maria Ceriani* in Mailand	1869	Nov. 4.
-	*Alexander Cunningham* in London	1875	Juni 17.
-	*Léopold Delisle* in Paris	1867	April 11.
-	*Wilhelm Dittenberger* in Halle	1882	Juni 15.
-	*Ernst Dümmler* in Halle	1882	März 30.
-	*Petros Eustratiades* in Athen	1870	Nov. 3.

		Datum der Wahl.	
Hr.	*Giuseppe Fiorelli* in Rom	1865	Jan. 12.
-	*Kuno Fischer* in Heidelberg	1885	Jan. 29.
-	*Paul Foucart* in Athen	1884	Juli 24.
-	*Karl Immanuel Gerhardt* in Eisleben	1861	Jan. 31.
-	*Wilhelm von Giesebrecht* in München	1859	Juni 30.
-	*Konrad Gislason* in Kopenhagen	1854	März 2.
-	Graf *Giambattista Carlo Giuliari* in Verona	1867	April 11.
-	*Aureliano Fernandez Guerra y Orbe* in Madrid	1861	Mai 30.
-	*Friedrich Wilh. Karl Hegel* in Erlangen	1876	April 6.
-	*Emil Heitz* in Strafsburg	1871	Juli 20.
-	*Théophile Homolle* in Paris	1887	Nov. 17.
-	*Paul Hunfalvy* in Pesth	1873	Febr. 13.
-	*Friedrich Imhoof-Blumer* in Winterthur	1879	Juni 19.
-	*Vatroslav Jagić* in Wien	1880	Dec. 16.
-	*Panagiotis Kabbadias* in Athen	1887	Nov. 17.
-	*Heinrich Keil* in Halle	1882	Juni 15.
-	*Franz Kielhorn* in Göttingen	1880	Dec. 16.
-	*Ulrich Koehler* in Berlin	1870	Nov. 3.
-	*Sigismund Wilhelm Koelle* in London	1855	Mai 10.
-	*Stephanos Kumanudes* in Athen	1870	Nov. 3.
-	*Konrad Leemans* in Leiden	1844	Mai 9.
-	*Giacomo Lumbroso* in Neapel	1874	Nov. 3.
-	*Giulio Minervini* in Neapel	1852	Juni 17.
-	*Ludvig Müller* in Kopenhagen	1866	Juli 26.
-	*Max Müller* in Oxford	1865	Jan. 12.
-	*August Nauck* in St. Petersburg	1861	Mai 30.
-	*Charles Newton* in London	1861	Jan. 31.
-	*Theodor Nöldeke* in Strafsburg	1878	Febr. 14.
-	*Julius Oppert* in Paris	1862	März 13.
-	*Gaston Paris* in Paris	1882	April 20.
-	*Georges Perrot* in Paris	1884	Juli 24.
-	*Karl von Prantl* in München	1874	Febr. 12.
-	*Rizo Rangabé* in Athen	1851	April 10.
-	*Félix Ravaisson* in Paris	1847	Juni 10.
-	*Ernest Renan* in Paris	1859	Juni 30.
-	*Georg Rosen* in Detmold	1858	März 25.
-	*Rudolph Roth* in Tübingen	1861	Jan. 31.
-	*Eugène de Rozière* in Paris	1864	Febr. 11.

		Datum der Wahl.	
Hr.	*Hermann Sauppe* in Göttingen	1861	Jan. 31.
-	*Theodor Sickel* in Wien	1876	April 6.
-	*Christoph Sigwart* in Tübingen	1885	Jan. 29.
-	*Friedrich Spiegel* in Erlangen	1862	März 13.
-	*Aloys Sprenger* in Heidelberg	1858	März 25.
-	*William Stubbs* in Chester	1882	März 30.
-	*Théodore Hersant de la Villemarqué* in Paris . .	1851	April 10.
-	*Louis Vivien de Saint-Martin* in Paris . . .	1867	April 11.
-	*Matthias de Vries* in Leiden	1861	Jan. 31.
-	*William Waddington* in Paris	1866	Febr. 15.
-	*William Dwight Whitney* in New Haven . . .	1873	Febr. 13.
-	*Friedrich Wieseler* in Göttingen	1879	Febr. 27.
-	*Jean-Joseph-Marie-Antoine de Witte* in Paris . .	1845	Febr. 27.
-	*William Wright* in Cambridge	1868	Nov. 5.
-	*Ferdinand Wüstenfeld* in Göttingen	1879	Febr. 27.
-	*K. E. Zachariae von Lingenthal* in Grofskmehlen	1866	Juli 26.
-	*Karl Zangemeister* in Heidelberg	1887	Febr. 10.

Gedächtnifsrede auf Wilhelm Scherer.

Von

Hrn. JOHANNES SCHMIDT.

Gelesen am Leibnizschen Jahrestage den 30. Juni 1887.
[Sitzungsberichte St. XXXIII. S. 656].
Zum Druck eingereicht am 1. Juli 1887, ausgegeben am 27. Juli 1887.

Das Jahr 1886 ist wie ein Sturmwind über unsere Akademie dahin gebraust. Innerhalb dreier Monate sanken drei grofse Geschichtsschreiber in das Grab. Kaum hatte sich über dem Letzten die Erde geschlossen, da stürzte ihm am 6. August eins der jüngsten Mitglieder unserer Genossenschaft nach, von jähem Schlage getroffen. Leopold von Ranke gieng nach einem ungewöhnlich gesegneten, drei Menschenalter umspannenden Leben zur Ruhe. Georg Waitz und Max Duncker erreichten das Alter des Psalmisten. Wilhelm Scherer aber brach in voller Jugendkraft, nach allen Seiten hin angestrengt und erfolgreich thätig plötzlich zusammen wie ein vom Blitze zerschmetterter Eichbaum. Nur kurze Zeit hat er uns angehört. Am Leibniztage 1884 begrüfste ihn der heute vorsitzende Herr Secretar als „den Gelehrten und Schriftsteller reicher Frucht und reicherer Hoffnung“. Die Hoffnung hat sich in Trauer aufgelöst.

Die Akademie hat mir den ehrenvollen Auftrag ertheilt heute sein Andenken zu feiern. Ich habe es für meine Pflicht gehalten denselben nicht abzulehnen, obwohl ich tief davon durchdrungen bin, dafs ich ihm nicht von ferne gerecht werden kann. Um ein treues Bild von Scherers Wirken in der hier gestatteten kurzen Zeit entwerfen zu können, müfste ich nicht nur auf allen den vielen Gebieten, welche er beherrschte, wenigstens bewandert sein, sondern auch die biographische Kunst besitzen, welche er selbst in den Lebensbeschreibungen der Grimm, Lachmann,

M. Haupt, Müllenhoff entfaltet hat. Beides ist nicht der Fall. Ich mufs also bitten den guten Willen für die That selbst zu nehmen.

Wilhelm Scherer wurde am 26. April 1841 zu Schönborn in Niederösterreich geboren. Sein Vater, der aus Bamberg stammte, war gräflich Schönbornscher Oberamtmann. Er starb vier Jahre nach Geburt des Sohnes. Die Mutter heirathete später den Wirthschaftsrath Stadler, welcher dem Stiefsohne herzlich zugethan war. Der frühreife Knabe erhielt seine Vorbildung auf dem akademischen Gymnasium in Wien. An der dortigen Universität begann er auch 1858 seine Studien unter Bonitz, Miklosich, Franz Pfeiffer, Vahlen. 1860 gieng er nach Berlin, hörte hier Vorlesungen bei Bopp, Moritz Haupt, Homeyer, Müllenhoff, Leopold v. Ranke, Trendelenburg, Albrecht Weber und trat in persönliche Beziehung zu Jacob Grimm. Schon in dem Gymnasiasten war durch die Schriften von Herder, Jacob Grimm, Gervinus, Gustav Freitag und Julian Schmidt ein glühender Eifer für deutsches Volksthum entzündet worden. Deutsche Sprache und Litteratur bildeten daher den Mittelpunkt seiner Studien. In jener Zeit hatte der „Kampf um der Nibelunge Hort“, welcher, wie Scherer selbst sagt, „der altdeutschen Philologie Wunden schlug, die noch heute bluten“, seinen Höhepunkt erreicht. Von Pfeiffer, dem Anhänger der Kürenberger-hypothese, kam Scherer, sein begabtester Schüler, in die Lehre des leidenschaftlichsten Verfechters der Lachmannschen Liedertheorie, Karl Müllenhoffs. In diesem Lehrer und in diesem Schüler schienen die Gegensätze zwischen norddeutschem und österreichischem Wesen typisch verkörpert zu sein. Jener ernst, herbe, ja bisweilen schroff, vorsichtig, mühsam nach dem Ausdrucke seiner tiefen mit Gelehrsamkeit schwer gerüsteten Gedanken ringend, dieser lebensfroh, von hinreifsender Liebenswürdigkeit, ungestüm, durch und durch künstlerisch angelegt, früh ein Meister in sprachlicher Darstellung. Aber der äufserlich rauhe Holsteiner war ein tief poetisches Gemüth und mit einer ungewöhnlichen Kraft der Phantasie ausgestattet, welche Scherer in seiner Gedächtnifsrede auf ihn hervorhebt. „Phantasie verlangte Müllenhoff ausdrücklich von dem Forscher, der die Zustände verschwundener Völker in einem einheitlichen Gemälde darstellen will. Phantasie, d. h. nicht Phantasterei, sondern die Kraft der inneren Vergegenwärtigung, durch welche wir die

überlieferte Thatsache nicht als etwas Todtes anschauen, sondern sie ins Leben zurück versetzen und sie nach unserer allgemeinen Kenntnifs menschlicher Dinge zu dem seelischen Grund alles Lebens und zu der Gesammtheit der sonst überlieferten und lebendig aufgefafsten Thatsachen in Beziehung setzen.“ Dieselbe Phantasie beseelte Scherer. So fühlte er sich von dem ihm so vielfach unähnlichen Lehrer mächtig angeregt, von dessen sittlichem Ernste, welchem die Wissenschaft Religion war, überwältigt. Eingedenk des Lachmannschen Wortes: „sein Urtheil befreit nur, wer sich willig ergeben hat“, beugte er sich der strengen Zucht Lachmannscher Kritik und Interpretation und ward ein begeisterter Anhänger derselben. Um ihn und Müllenhoff schlang sich bald das Band innigster Freundschaft, welches, nur zeitweilig durch Mifsverständnisse gelockert, erst durch Müllenhoffs Tod gelöst wurde.

Zu Ende des Jahres 1863 erschienen die Denkmäler deutscher Poesie und Prosa aus dem VIII—XII Jahrhundert von K. Müllenhoff und W. Scherer. Man war überrascht den berühmten und gefürchteten Meister in Gesellschaft eines völlig unbekannten Mannes, von dem nicht einmal eine Doctordissertation vorlag, auftreten zu sehen. Wer ist W. Scherer? Diese Frage schwebte auf aller Lippen. In der Vorrede nannte ihn Müllenhoff „seinen Freund“, „einen Mitarbeiter, wie er ihn nur wünschen konnte“. Das war nicht zu viel gesagt. Noch jüngst hat ein hervorragender Vertreter der deutschen Philologie das Buch als „die philologische Musterarbeit“ bezeichnet. Müllenhoff hat etwa zwei Drittel der poetischen Stücke bearbeitet, Scherer die übrigen und alle prosaischen. Letztere sind fast ausschliefslich trockene, für Zwecke des täglichen Lebens gemachte Aufzeichnungen, vornehmlich geistliches Inhaltes: Taufgelöbnisse, Glaubensbekenntnisse, Vaterunser, Gebete, Beichten, Katechismen, Predigten, Markbeschreibungen, Bruchstücke von Gesetzen und Capitularien, Eides- und Verlöbnifsformeln, Recepte. In ihrer Bearbeitung entfaltete Scherer auf das Glänzendste die von Müllenhoff geforderte Phantasie. Jeder Text ward kritisch festgestellt, dann aus Schrift, Sprache und dem Verhältnisse zu dem etwa vorhandenen lateinischen Originale seine Entstehungszeit ermittelt, endlich Veranlassung und Zweck der Aufzeichnung erforscht. So erhielt jedes Denkmal seinen Platz innerhalb der Entwicklungsgeschichte des Volkes angewiesen. Das todte Material

wurde zu neuem Leben erweckt und warf ganz neue Lichter auf das geistige Leben unserer Vorfahren. Für die poetischen Denkmäler unternahm Scherer aufserdem auf Grund eingehender Studien über mittelalterliche Musik die Melodien herzustellen. Diese Ergebnisse konnten nur gewonnen werden durch gleichmäfsige Beherrschung der Sprache und Litteratur, der Staats-, Kirchen- und Rechtsgeschichte des Mittelalters. In allen diesen verschiedenen Sätteln war der namenlose zweiundzwanzigjährige Jüngling, welcher hier zum ersten Male vor der Öffentlichkeit erschien, gerecht. Mit einem Schritte war er von der Bank des Hörsaales unter die Autoritäten der altdeutschen Philologie getreten. Die Wiener philosophische Facultät promovierte und habilitierte ihn auf dies Werk.

Kurz ehe es erschien, starb Jacob Grimm am 20. September 1863. Scherer, den herzliche Beziehungen an ihn und seine Familie knüpften, unternahm es seinem väterlichen Freunde, in dessen Nähe er jetzt ruht, ein Denkmal zu errichten. Im December 1864 brachten die preufsischen Jahrbücher den Anfang seiner Lebensbeschreibung des Begründers deutscher Philologie, welche demnächst abgerundeter in zwei Auflagen als selbständiges Buch erschien. Hatte Scherer durch die „Denkmäler“ sich als Gelehrter ersten Ranges bewährt, so zeigte er sich nun als ebenso vollendeter wissenschaftlicher Künstler. Er beginnt mit einer Geschichte der früheren auf das deutsche Alterthum gerichteten Studien. Dann entwickelt er die allgemeine Geistesbewegung von Herder bis zu den Romantikern. Schon hier ist ihm Goethe das Mafs aller Dinge. Man ahnt im Verfasser den künftigen Goetheforscher und Geschichtsschreiber der deutschen Litteratur. Auf diesem Hintergrunde entwirft er das Bild seines oder vielmehr seiner Helden, denn die Brüder Jacob und Wilhelm sind wissenschaftlich untrennbar, wie sie im Leben stets vereint waren. Wir sehen sie aus dem romantischen Halbdunkel der Sagenforschung sich zu immer gröfserer Klarheit erheben, bis Jacob mit der deutschen Grammatik in den Zenith tritt. Treffend, mit wenigen Worten charakterisiert Scherer die Grimms gegenüber den Romantikern, Lachmann gegenüber Jacob Grimm. „Lachmann ist ein Genie der Methode (später sagt er: der Kritik), Jacob Grimm ein Genie der Combination“, Lachmann formaler, Grimm realer Philologe. In Lach-

manns wissenschaftlicher Persönlichkeit erkennt er die Eigenthümlichkeiten des norddeutschen Wesens, in den Grimms die des süddeutschen. — Er mochte dabei an Müllenhoff und sich selbst denken. — Nur durch das Zusammenwirken zweier so grundverschiedener Naturen, deren jede der anderen als Ergänzung bedurfte, konnte die deutsche Alterthumskunde begründet werden.

Nirgend schlägt die liebevolle Begeisterung, welche jedes Wort der Biographie athmet, in urtheilslose Verherrlichung um. Vielmehr sucht Scherer gerade, indem er auch die Schwächen und Irrthümer Jacob Grimms aufdeckt, zu zeigen, wo und wie sein Werk weiter zu führen ist. Diese Biographie entfaltet eine so ungewöhnliche Fülle der Kenntnisse, Weite der Anschauung, Reife des Urtheils, alles umwoben vom Sonnendufte der Jugend und getragen von einer fesselnden Anmuth der Darstellung, dafs man nicht weifs, wen man mehr beneiden soll, Grimm um seinen Biographen oder diesen, dafs es ihm vergönnt war einen solchen Mann zu schildern. So ist das Werk ein hoch ragendes Denkmal für beide geworden, von welchem die Zeit nichts abbröckeln wird. Dem heute rückschauenden Blicke zeigt es bereits die Keime zu allen späteren Arbeiten Scherers. In der ersten, weniger geglätteten Fassung der preufsischen Jahrbücher schliefst es mit einem Programme für die deutschen Studien. Deren Heil erwartet Scherer von einer Verbindung der combinatorischen Art Jacob Grimms mit der kritischen Methode Lachmanns, von einer Vereinigung aller Strahlen des Volksgeistes in einen Brennpunkt. „Wir dürfen“, sagt er, „nachdem Jacob Grimms unsterbliche Leistungen vorliegen, um einen Schritt weiter gehen als er und jene geistigen Richtungen, die er jede für sich in besondere Darstellungen brachte, nun zugleich und auf einmal in Angriff nehmen. Wir dürfen versuchen, in der Sprache, der Poesie, dem Rechte, der Religion, der Sitte den gemeinsamen durchwaltenden Drang der Seele blofs zu legen, die Bedingungen hinzu zu finden, die ihn geboren, überhaupt die älteste Geschichte unseres Volkes zu ergründen, wie es sich abzweigt aus dem europäischen Urvolke, auf welchem Wege es sich verbreitet, wie es sich gliedert in Stämme und Völkerschaften, wie es in den Gang der grofsen Begebenheiten eingreift und aus der altgemeinsamen Erbschaft und den neuen Verhältnissen seine geistige Welt sich erschafft. Und die Schicksale

dieser Welt müssen wir verfolgen bis auf den Punkt, wo andere überherrschende Mächte der Geschichte sie brechen, zerstören und ablösen, wo das objective Dasein unseres Volkes sein Ende erreicht und das moderne Bewufstsein von ihm Besitz ergreift". Dies Ziel hatte sich Müllenhoff für seine Alterthumskunde gesteckt. Aber Scherer war ein durchaus moderner Mensch, frei von aller romantischen Schwärmerei für das Mittelalter. Die Vergangenheit ist ihm nicht Selbstzweck, sie soll ihm nur die Gegenwart erklären. Er, dessen Weltanschauung in Herder und Goethe wurzelt, blickt zurück nur um den richtigen Weg nach vorwärts zu finden. So fährt er denn fort: „Wenn es aber in jener älteren Periode erlaubt und, wollen wir hinter Jacob Grimm nicht zurückbleiben, nothwendig ist, die verschiedenen Richtungen der Geistesthätigkeit in eins zu zwingen: mufs nicht die Zeit der ausgebildeten Cultur in ihrer allmählichen Vollendung derselben Behandlung unterliegen? Mufs nicht auch hier das gesammte Geistesleben in Betracht gezogen werden und die Aufgabe der Philologie sich gestalten als die Erforschung des Ganges, in welchem die menschlichen Gedanken sich aufsteigend entwickeln? Nichts anderes aber ist die Aufgabe der Geschichte. Und in der That, der menschliche Geist ist nur einer, wie könnte es zwei Wissenschaften vom menschlichen Geiste geben? So erkennen wir in Jacob Grimm ein Vorbild, in welchem sich erfüllt hat, was wir anstreben müssen, die möglichste Aufhebung der Arbeitstheilung zwischen Philologie und Geschichte." In der Widmung seines Buches „zur Geschichte der deutschen Sprache" stellt Scherer dieselbe Forderung in anderer Form auf. Als Ziel bezeichnet er „ein System der nationalen Ethik" im Rahmen der allgemeinen vergleichenden Geschichtswissenschaft, nach Buckleschen Grundsätzen behandelt. Das klingt ganz anders, als wenn Jacob Grimm in seiner Rede auf Lachmann alle Philologen, die es zu etwas gebracht haben, in solche theilt, welche die Worte um der Sachen oder die Sachen um der Worte willen treiben. Es ist ein Programm von schwindelerregender Universalität. Drei Jahre später am Schlusse jener Widmung spricht denn auch Scherer bereits als Ahnung aus, „dafs selbst ein reiches und langes Leben im Dienste der Wissenschaft es kaum höher als zum Ausgang des Moses bringen könnte: zu einem einzigen kurzen Blicke auf das gelobte Land".

Der Grimmbiographie folgte 1866 das „Leben Willirams Abtes von Ebersberg in Baiern“, dessen Vorarbeiten Scherer schon in Berlin begonnen hatte. Auf einer kritischen Untersuchung der Ebersberger Geschichtsquellen baut er das Leben des Abtes bis ins Einzelne plastisch auf, indem er mit aufserordentlichem Geschicke die geringfügigsten Andeutungen für den Charakter, die zeitweilige Gemüthsverfassung, den Gesichtskreis und die Lebensziele seines Helden verwerthet.

Zwei Jahre später sehen wir ihn plötzlich sein grofses Programm von einer ganz neuen Seite angreifen. Es erscheint sein Buch „zur Geschichte der deutschen Sprache“. Die Pfleger der altdeutschen Philologie hatten sich bis auf wenige hervorragende Ausnahmen gewöhnt Jacob Grimms Grammatik nicht als einen ersten grofsartigen Entwurf, sondern als ein fertiges Gebäude zu betrachten, welches allein in der von Grimm unvollendet gelassenen Syntax der Erweiterung, übrigens aber nur der reicheren Füllung und Ausgestaltung zu bedürfen schien. Die Mauern selbst schienen für immer fest zu stehen. Versuche die germanischen Spracherscheinungen tiefer zu begründen und in das vorhistorische Dunkel weiter hinauf zu dringen, wie die epochemachende Schrift Adolf Holtzmanns über den Ablaut 1844 und Theodor Jacobis Beiträge 1843, blieben vereinzelt und wirkungslos. Man sammelte nur emsig Material in Grimms Scheuern. Nebenan aber auf dem Gebiete der vergleichenden Sprachforschung herrschte rührige Thätigkeit, welche auch für die germanische Grammatik reiche Früchte gezogen hatte. Es sei nur an die Westphalschen Auslautsgesetze erinnert. Wohl fühlten sich die Germanisten durch das Vorbild ihres grofsen Meisters angespornt häufiger über den Zaun ihres Nachbars zu schauen als ihre classischen Collegen. Allein sie begnügten sich mit flüchtigem Überblicke. Boppsche, zum Theil schon veraltete Lehre unvermittelt neben deutscher Specialforschung, das ist der Charakter der deutschen Grammatik in den sechsziger Jahren. Müllenhoff aber hatte stets Fühlung mit der vergleichenden Sprachforschung behalten. Scherer nun begnügt sich nicht über den Zaun zu schauen, er reifst ihn nieder. Beide Nachbarn sollen ihren Besitz gemeinsam bestellen, und das haben sie auch seitdem gethan.

Scherers Buch hat in der ganzen grammatischen Litteratur nicht seines Gleichen. Es ist von dem vielen Originellen, was er geschaffen,

das Originellste. In ihm wohnen zwei Seelen, die eine, ungestüm phantastisch, strebt himmelan, die andere, nüchtern und scharfsinnig, hält den Boden exacter Forschung fest. Das ganze Buch ist ein Ringkampf zwischen beiden. Als „einen kleinen vorläufigen Beitrag zur Alterthumskunde“ bezeichnet es der Verfasser. In seiner Grimmbiographie hatte er die Forderung gestellt: „die Grammatik soll eine Geschichte des geistigen Lebens sein, insoweit dieses in die Sprache sich hineinschlägt“. „Sie mufs die letzten geistigen Gründe für alle sprachlichen Erscheinungen aufsuchen“. „Wir sind es endlich müde“, ruft er jetzt aus, „in der blofsen gedankenlosen Anhäufung wohlgesichteten Materials den höchsten Triumph der Forschung zu erblicken“. Er will nun wirklich die Spracherscheinungen bis in die tiefsten Gründe erforschen. „Die Entstehung unserer Nation, von einer besonderen Seite angesehen, macht den Hauptvorwurf des gegenwärtigen Buches aus“. Was er darunter versteht, zeigt das erste Drittel des Buches, der Abschnitt „zur Lautlehre“. Er ist ein erster und einziger Versuch die lautliche Entwicklung der Sprache in unmittelbare Abhängigkeit von dem Charakter und der Culturgeschichte des Volkes zu bringen und verleiht dem Werke seine Grundfarbe. Scheidet man ihn aus, wie Scherer selbst, da er sich nicht bewährte, in der zweiten Auflage gethan hat, so streift man dem Ganzen seinen frischen Reiz ab und behält nur disjecta membra poetae übrig. Da gerade in ihm die Eigenart des Buches am deutlichsten ausgeprägt ist, sei es gestattet die Bahn dieses sich kühn erhebenden Gedankenfluges hier zu zeichnen.

Vergleichen wir die germanischen Sprachen mit den verwandten, so ergeben sich drei für ihre Lautform besonders charakteristische Züge: 1) die Zurückziehung des Hochtons auf die Wurzelsilbe, 2) gesetzmäfsige Verkürzung des Wortauslautes, 3) die Lautverschiebung. Dafs der zweite eine Folge des ersten ist, versteht sich von selbst. Scherer hält aber auch den dritten dafür. Das germanische Accentprincip habe die Aufmerksamkeit von den Consonanten abgezogen, diese seien deshalb möglichst erleichtert, d. h. verschoben worden. Besonders sei dies im „melodiösen“ Hochdeutschen geschehen, deshalb habe dieses sogar eine zweite Verschiebung erfahren. Läfst sich also der Grund für die Zurückziehung des Accentes finden, so ist damit der Grund für die hervorstechendsten Eigenthümlichkeiten unserer Sprache, d. h. in gewissem Sinne der Ursprung

unserer Nation gefunden. Scherer sucht ihn in der Leidenschaft und in dem Fatalismus, welche Grundzüge unseres Volkscharakters seien. Die Leidenschaft habe der Wurzelsilbe gröfsere Tonstärke verliehen, die gröfsere Tonhöhe sei durch die Allitteration, eine Folge des Fatalismus, herbeigeführt. Der Fatalismus griff zum Losen. Ein willkommenes Mittel dazu war das römische Alphabet. Buchenstäbe mit je einem Zeichen desselben bekerbt wurden ausgestreut, drei davon beim Losen aufgehoben. Sie ergaben drei Anlaute, deren jeder zwei- oder dreimal in dem auf sie gebauten Orakelspruche wiederkehren mufste. Um diese sechs bis neun Anlaute als solche hervorzuheben „mufste sie der Deutende auf eine neue Art über alle anderen erhöhen“. So habe denn „die erste germanische Entlehnung aus der alten Welt wesentlichen Einflufs auf die Entstehung der specifisch germanischen Lautform geübt“. Auch zur Erklärung der hochdeutschen Lautform in ihrem Unterschiede von der gemein-germanischen wird die Antike herbei gezogen. Die hochdeutsche zweite Lautverschiebung beruhe auf dem „höchst melodiösen Charakter“ des Althochdeutschen, dieser auf der Bewahrung der tieftonigen Silben im Gegensatze zum Niederdeutschen und Nordischen. Sie seien bewahrt durch den Otfridschen Vers, welcher unter dem Einflusse lateinischer Trochäen und Iamben stehe. „So wären wir denn in jedem Falle berechtigt die Entstehung der specifisch hochdeutschen Lautform durch Vermittelung des Versbaues auf Berührung mit der Antike zurückzuführen.“ Dieser schöne, geistreiche, auch den ungläubigen Leser in Spannung versetzende Traum hatte für Scherer „etwas Erhebendes“. Er war von ihm so bestrickt, dafs er die Hoffnung aussprach „eine Betrachtungsweise auch auf andere Sprachen angewendet und bewährt zu sehen, die am Germanischen ein so überraschendes Resultat ergab“.

Doch nicht genug mit der Entstehung unserer Nation, auch die Entstehung der indogermanischen Urformen wollte er ergründen und bot eine Fülle von Gelehrsamkeit und Scharfsinn dazu auf. Aber er hatte sich zu viel auf einmal zugemuthet. Was er von Jacob Grimm sagt: „neben einem festen Thatsachensinn bewegt sich schrankenlos eine Alles combinierende Phantasie“, das gilt ebenso von ihm selbst. Etwa die Hälfte des mit ungewöhnlich umfassender Sprachkenntnifs geschriebenen Buches war von Anfang an unhaltbar. Und doch, glaube ich, würden

viele von denen, welche das Erscheinen desselben miterlebt haben, diese Theile ungern missen, denn sie liehen dem Ganzen eine magische Beleuchtung, welche seine anregende Wirkung erhöhte.

Dieselbe Phantasie aber, welche berückende Trugbilder vorzauberte, wo sie sich durch die Controle der Thatsachen nicht beengt fühlte, wurde zur lebenerweckenden Kraft, wo sie durch diese Controle in Schranken gehalten war. Die Abschnitte des Buches, welche sich in erreichbaren Regionen bewegen, haben in die ganze Entwicklung der germanischen und der indogermanischen Sprachforschung tief eingegriffen, sie haben vielleicht von Allem, was Scherer geschrieben hat, die nachhaltigste Wirkung geübt. Er war bestrebt den alten todten Schriftzügen die lebendigen Klänge zu entlocken, deren Zeichen sie sind. Indem er auf den Pfaden R. v. Raumers, Schleichers, Ebels, welche die Lautphysiologie in den Dienst der grammatischen Lautlehre gestellt hatten, eine gute Strecke weiter gieng, suchte er die physiologischen Processe, deren Wirkungen sich in der veränderten Schreibung der Worte kund geben, zu ergründen, das todte Verzeichnifs der Lautübergänge immer mehr in eine wissenschaftliche Lautentwicklung zu verwandeln. Zur Aufklärung der früheren Zustände zog er die Vorgänge lebender Sprachen erfolgreich heran; er nannte dies „die Methode der wechselseitigen Erhellung“. Ferner betonte er mehr als seine Vorgänger die neben der rein lautlichen Entwicklung hergehende Umgestaltung der Worte durch Einflufs anderer in irgendwelcher Beziehung zu ihnen stehender, durch sogenannte falsche Analogie oder Formübertragung. Indem er die von Schleicher für das Sprachleben aufgestellte Unterscheidung einer vorhistorischen Entwicklung und eines in historischer Zeit sich vollziehenden Verfalles mit Recht bekämpfte und überall nur Entwicklung sah, forderte er für die Aufstellung der indogermanischen Formen ebenso strenge Beobachtung der Lautgesetze wie für die Herleitung der historisch überlieferten Formen aus einander. Diese Forderung, welcher die nachfolgende Generation mit der gröfsten Gewissenhaftigkeit zu genügen sucht, konnte nur erfüllt werden, wenn man zunächst auf jede begriffliche Deutung der Flexionsendungen verzichtete, nur streng gesetzlich den Bestand der Ursprache reconstruierte. Da Scherer selbst sich diesen Verzicht nicht abgewinnen konnte, hat er oft nicht weniger als die

Bekämpften gegen seine eigene Forderung verstofsen. Wo er sich nicht durch Deutungsversuche verführen liefs, beobachtete er indefs die Lautgesetze vielfach strenger als die strengsten Vorgänger. Der germanischen Grammatik im Besonderen schuf er eine breitere Grundlage, indem er sie nicht mehr einseitig auf das Gotische begründete, sondern schon für Ermittelung der urgermanischen Formen die übrigen alten Dialekte, vornehmlich das Althochdeutsche verwerthete. Dies etwa sind die wesentlichsten methodischen Fortschritte des Buches. Dazu eine Fülle neuer und richtiger Erklärungen einzelner Thatsachen nicht nur der germanischen Sprachen, eine ebenso grofse Fülle von Deutungen, welche, wenn sie auch das Richtige noch nicht trafen, doch den Weg dazu anbahnten, überall neue Gedanken mit verschwenderischer Hand ausgestreut. Sein bleibendes Verdienst ist die Vertiefung der germanischen Sprachstudien, ihr enger organischer Anschlufs an die indogermanischen.

In der ersten Fassung der Grimmbiographie klagte Scherer, dafs Grimms Grammatik „keine legitime und ebenbürtige Nachkommenschaft gehabt habe“. In der zweiten Auflage heifst es an derselben Stelle: „So ist denn seine Saat aufgegangen und die Nachlebenden zeigen sich würdig eines so grofsen Führers“. Dafs sie aufgegangen ist, verdanken wir nicht zum wenigsten dem befruchtenden Regen von Scherers Buche. Es wirkte als ein gewaltiges Ferment bei Germanisten und Indogermanisten. Zwar die älteren verhielten sich ablehnend auch gegen den trefflichen Kern desselben, aber die jüngere eben aufwachsende Generation fühlte sich mächtig angeregt. Die germanische Grammatik entfaltete sich zu ungeahnter Blüthe, die indogermanische wurde immer exacter. Die erstere hervorgerufen, bei letzterem mitgewirkt zu haben ist Scherers allgemein anerkanntes Verdienst. Unter den lebenden germanischen und indogermanischen Sprachforschern ist keiner, der nicht Scherer in vielen Dingen zu Danke verpflichtet wäre und dies offen bekannt hätte.

In Scherers Leben bildet die „Geschichte der deutschen Sprache“ eine glänzende Episode. Seiner Natur nach konnte er sich bei der entsagungsvollen Arbeit des Grammatikers, welche der Subjectivität so wenig Spielraum läfst wie keine andere historisch-philologische Disciplin, auf die Dauer nicht wohl fühlen. Nur gelegentlich streift er noch gramma-

tische Fragen in Recensionen und Miscellen. Als er zehn Jahre später das Buch wieder auflegte, war er den darin behandelten Dingen schon so weit entfremdet, dafs er im Vorworte selbst bedauerte es nicht in der Weise umarbeiten zu können, wie es die grofsen Fortschritte der Zwischenzeit erforderten. Er erkannte wohl auch, dafs das Buch überhaupt nicht neu aufgelegt werden konnte, wenn es seinen eigenthümlichen Charakter bewahren sollte.

Nach Pfeiffers Tode im Jahre 1868 wurde Scherer, dessen Erfolge als akademischer Lehrer die schriftstellerischen wo möglich noch übertrafen, zum ordentlichen Professor ernannt. Der deutsch-französische Krieg brach aus. Scherer hatte, wenn er ihn überhaupt je besessen, den österreichischen Particularismus längst abgestreift, in Preufsen den Retter Deutschlands erkannt. Ihm, der 1865 in der Grimmbiographie als „beschämend“ empfunden hatte, „dafs sich unsere Ansprüche auf Geltung unter den Nationen hauptsächlich auf Bücher gründen“, hob sich die Brust in lautem Jubel über die deutschen Siege. Rücksichtslos, mit dem ganzen Feuer seines leidenschaftlichen Temperamentes trat er öffentlich in Wort und Schrift für die deutsche Sache und den engen Anschlufs Österreichs an Deutschland ein. Kaum war der Präliminarfriede geschlossen, da brachten die beiden Freunde Ottokar Lorenz und Scherer mit der „Geschichte des Elsafs“ dem neuen deutschen Reiche ihre Huldigung dar. In dem Beust-Hohenwartschen Österreich war es aber ein nicht gefahrloses Unternehmen so beredt und überzeugend für Preufsen-Deutschland zu werben. Ein Unwetter zog sich über Scherers Haupte zusammen, dessen Ausbruche er noch glücklich durch die Berufung nach Strafsburg 1872 entgieng. Fünf Jahre lang hat er dort in der ersten Reihe derer gestanden, welche die neu gegründete Reichsuniversität zu schneller Blüthe gebracht haben.

Für Scherers schriftstellerische Thätigkeit bilden die letzten Wiener und die ersten Strafsburger Jahre eine Einheit. Nach der Geschichte der deutschen Sprache kehrte er zur deutschen Litteratur zurück. Er untersuchte die unter dem Namen des Spervogel überlieferten gnomischen Gedichte, wies drei verschiedene Verfasser nach, handelte über die Formen der Spielmannsdichtung, Spruch und Lied, über ihre Stoffe und Gat-

tungen[1]), stieg dann zu den Anfängen des Minnesanges empor, die Chronologie der Minnesinger und ihrer Gedichte durch feinsinnige syntaktische und stilistische Untersuchungen vielfach erst fest stellend[2]), unterwarf die Kürenberger-hypothese einer einschneidenden Kritik[3]). Es folgen die „geistlichen Poeten der deutschen Kaiserzeit“ 1874—1875. Verschiedenheiten des Stiles und der Behandlung des Inhaltes sowie das Verhältnifs zur Abälardschen Trinitätsformel werden benutzt um bisher als einheitlich geltende Stücke unter verschiedene Verfasser aufzutheilen und chronologisch zu bestimmen. Es ergeben sich zwei Richtungen der geistlichen Dichtung, eine volksthümliche, welche Scherer in das Kärntner Bisthum Gurk verweist, und eine gelehrte von der französischen Theologie beeinflufste, welche ihren Sitz in Osterreich und Steiermark hatte. Zu einem vorläufigen Abschlusse gediehen diese Studien mit der „Geschichte der deutschen Dichtung im elften und zwölften Jahrhundert“ 1875. Es werden die einzelnen von bestimmten Landschaften und Personen ausgehenden Anregungen nachgewiesen und ihre einander durchkreuzenden Richtungen verfolgt. Ein aufserordentlich feines Gefühl läfst Scherer in Technik, Stil und Motiven der Dichter die individuellen von den der ganzen Zeitrichtung gemeinsamen Zügen unterscheiden. Die Entwicklung dieser frühmittelhochdeutschen Zeit und die Persönlichkeiten der einzelnen Dichter sind zum grofsen Theile erst von ihm enthüllt. Durch die Methode der wechselseitigen Erhellung, welche Scherer in der Sprachgeschichte geübt hatte, wurde er zu geistvollen Parallelen zwischen dem zwölften und dem achtzehnten Jahrhunderte und entsprechend zwischen den je voraufgehenden geführt. So entwickelte sich seine Theorie dreihundertjähriger Epochen mit abwechselnd männischem und frauenhaftem Charakter, welche dies Buch eröffnet und schliefst. Es sind die neun Generationen seines Freundes Ottokar Lorenz.

Weiter hinabsteigend widmete Scherer dem Romane und Drama des sechszehnten Jahrhunderts eingehende Studien. Aus einer Recension

---

[1]) Deutsche Studien I, Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der Wiener Akad. LXIV (1870), S. 283f.

[2]) Deutsche Studien II, Sitzungsberichte LXXVII (1874), S. 437f.

[3]) Zeitschr. f. deutsches Alterthum. 1874, S. 104f.

erwuchsen, die Form derselben zum Theil noch innehaltend, „die Anfänge des deutschen Prosaromans und Jörg Wickram von Colmar“ 1877. Der Aufsatz „Dramen und Dramatiker“[1]) ist, wie wir aus der Litteraturgeschichte erfahren, die Vorarbeit zu einer umfassenden Darstellung des Gegenstandes, welche Scherer plante.

Ein Mann von so feinem künstlerischem und wissenschaftlichem Verständnisse für Poesie, der sich über die Entstehung, Mittel und Wirkungen einer jeden Dichtung bis ins Einzelste Rechenschaft zu geben strebte, der an jedes Kunstwerk Fragen stellte von einer Eindringlichkeit und Schärfe, wie sie bis dahin kaum erhört waren, ein solcher Mann konnte sich nicht auf Litteraturperioden beschränken, deren fragmentarische Überlieferung diese Fragen oft gar nicht, oft nur sehr bedingt zu beantworten gestattet. Und der Mann, welcher als Aufgabe der Philologie „die Erforschung des Ganges, in welchem die menschlichen Gedanken sich aufsteigend entwickeln“, bezeichnet hatte, konnte nicht unterhalb des Gipfels dieser Entwicklung Halt machen. Dieser Gipfel ist für uns Deutsche Goethe. Ihm neigen sich daher vom Beginne der Strafsburger Zeit Scherers Studien je mehr und mehr zu. In den letzten Jahren gravitieren sie ganz auf ihn, eine Goethebiographie war ihr Ziel. Unterstützt wurde diese Wendung durch Scherers Berufung auf den an unserer Universität errichteten Lehrstuhl für neuere deutsche Litteratur 1877. Einige Früchte dieser Studien hat Scherer selbst gesammelt „aus Goethes Frühzeit“ 1879, bei der zweiten Sammlung, welche zugleich eine Umarbeitung werden sollte, nahm ihm der Tod die Feder aus der Hand, Erich Schmidt hat die „Aufsätze über Goethe“ in einen Band vereinigt. Einen derselben, die „Betrachtungen über Faust“, vom Herausgeber als Scherers reifste Fauststudie bezeichnet, hat uns der Verfasser selbst in der Gesammtsitzung vom 8. Januar 1885 vorgetragen. Wie Lachmann die Ilias oder die Nibelungen, er selbst die Wiener Genesis analysiert hatte, so weist er hier in dem ersten Monologe des Faust verschiedene nicht zu einander stimmende Abschnitte auf und schliefst daraus auf verschiedene Abfassungszeiten derselben. So gewinnt er einen Einblick in die Werkstatt des Dichters und zeigt, welche Wandlungen der Plan des

[1]) Deutsche Studien III, Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der Wiener Akad. XC (1878), S. 185f.

Stückes im Laufe der Zeiten erfahren hat. In diesem Aufsatze tritt vielleicht am schärfsten das Charakteristische von Scherers Behandlungsweise der neueren Dichter hervor. Den Philologen heimelt sie an, Andere hat sie zu Widerspruch veranlafst.

Im Jahre 1872 schrieb Müllenhoff an Scherer, es scheine ihm von der allergröfsten Bedeutung und Wichtigkeit, dafs der Nation einmal der Gang ihrer innersten individuellsten Entwicklung kurz und übersichtlich und doch nicht zu knapp dargelegt werde. Dafür stellte er seine eigenen Arbeiten zur Verfügung. Dieser Anregung verdanken wir die „Geschichte der deutschen Litteratur“, welche in den Jahren 1880 bis 1883 erschien. Noch nie zuvor war eine deutsche Litteraturgeschichte auf Grund einer zugleich so umfassenden und so tief ins Einzelne dringenden Kenntnifs aller Quellen von der ältesten bis auf die neue Zeit geschrieben worden. In kunstvoller, fesselnder Darstellung werden die grofsen Züge der wiederholt auf und ab steigenden Entwicklung gezeichnet, welche in den Prachtgestalten Wolframs und Goethes gipfelt. Das Buch ist weder ein gelehrtes Rüstzeug noch eine populäre Darstellung. Nur Leser, denen der Stoff im Wesentlichen bekannt ist, können dies allseitig durchdachte Kunstwerk würdigen. Kaum war es abgeschlossen, da entwuchs ihm ein neuer grofser Plan. Die Geschichte der Litteratur sollte sich zu einer Naturgeschichte der Dichtkunst, zu einer Poetik auf exacter Grundlage vertiefen. In den Sommervorlesungen 1885 wurde das sorgfältig vorbereitete Unternehmen ausgeführt, und es steht zu hoffen, dafs diese Vorlesungen veröffentlicht werden. Inzwischen hatte Müllenhoffs Tod am 19. Febr. 1884 auf Scherers Schultern noch die wuchtige Last der „deutschen Alterthumskunde“ gelegt, in deren grofsartige Anlage der Meister ihn schon als Jüngling eingeführt hatte. Das folgende Jahr eröffnete Goethes Nachlass der Forschung. Welche Fülle neuer Aufschlüsse für seinen Lieblingsplan, die Goethebiographie, durfte sich Scherer nun versprechen. Sofort legte er eifrig Hand an um die Ausbeutung der neu erschlossenen Schätze zu organisieren und zu leiten. Diese Häufung der verschiedensten Aufgaben überstieg selbst seine unverwüstlich scheinenden Kräfte. Wie er es als Ahnung ausgesprochen hatte, so traf es ein. Nach einem einzigen kurzen Blicke auf dies gelobte Land schlofs er die Augen für immer.

Nur seine Hauptwerke konnten hier erwähnt werden. Wie aufserordentlich vielseitig er war, würde sich in vollem Umfange erst zeigen, wenn auch alle die zahlreichen kleineren Abhandlungen, Recensionen, populären Aufsätze und Vorträge sowie seine Beiträge zur allgemeinen deutschen Biographie in Betracht gezogen würden, was die hier zugemessene Zeit nicht gestattet. Mit ungewöhnlichem Erfolge hat er sein universales in der Grimmbiographie aufgestelltes Programm ausgeführt. Niemand hat sich in ähnlichem Mafse zugleich als formaler und realer Philologe in der alten und neueren Litteratur bewährt, wenige haben so energisch nach den letzten Gründen der Erscheinungen gefragt. In ihm waren die guten Seiten des norddeutschen und des österreichischen Charakters vereinigt, Ernst und Ausdauer mit Formensinn und Leichtigkeit gepart. Kein religiöses oder politisches Vorurtheil trübte seinen Blick. Er war nicht nur Gelehrter, sondern auch Künstler, nicht nur Forscher, sondern auch Lehrer. Jede Erkenntnifs, welche er gewonnen hatte, wollte er sofort, selbst auf die Gefahr hin, dafs sie noch nicht ganz ausgereift sei, zum Gemeingute machen und auch die höchsten Aufgaben so behandeln, dafs ihre Lösung allen Gebildeten zu Gute käme. Zündend wirkte er auf die Jugend. In Wien, Strafsburg und Berlin, überall war er einer der gefeiertsten Docenten, überall hat er eine stattliche Anzahl tüchtiger Schüler ausgebildet. Die geistige Entwicklung der Nation in der Vergangenheit zu erforschen, in der Gegenwart zu fördern war sein Lebensziel. In jeder Einzelerscheinung spürte er den treibenden Kräften des Volkslebens nach. Dabei übte er die inductive Forschungsmethode mit kaum übertrefflicher Strenge und Scharfsinn, so weit sie irgend zu führen war. Aber ihre einzelnen Ergebnisse befriedigten ihn noch nicht. Kühn und immer geistvoll ergänzte er die Lücken, fügte er die überlieferten Trümmer zu einem grofsen Baue zusammen. Oft genug hat er den Muth des Fehlens an Anderen gerühmt und für sich selbst bekannt. So haben alle seine Schriften eine stark subjective Prägung, welche die Einen anzieht, die Anderen zu Widerspruch reizt, in jedem Falle aber ihre augenblickliche Wirkung erhöht. Denn mag man Scherers Ansicht im einzelnen Falle beistimmen oder sie ablehnen, man wird keine seiner Schriften aus der Hand legen ohne vielseitige Anregung erhalten zu haben. In der Grimmbiographie sagt Scherer: „Sorgfältige, umsichtig bis in die letzten

Spitzen hin, mit der gröfsten Kraft im kleinsten Punkte ausgeführte Arbeiten geben den höchsten Mafsstab her und zeigen das Ziel, bis zu welchem jede Forschung einmal vordringen mufs. Sie haben zugleich aber etwas Niederdrückendes, Entmuthigendes, Strenges und Unnahbares. Anregung dagegen, das Schönste, was es giebt, die erweckende Kraft, die auf Andere überströmt, geht nur von Arbeiten aus, wie Jacob Grimm sie uns schenkte, Arbeiten, welche Lücken lassen, welche über denselben Gegenstand verschiedene Ansichten zur Wahl stellen, welche den Widerspruch herausfordern, welche das Gefühl geben, dafs der Reichthum der überlieferten Thatsachen und des möglichen daraus zu ziehenden Gewinnes entfernt nicht erschöpft, sondern überall erst zu erschöpfen sei". Solche Arbeiten sind auch die Schererschen.

PHYSIKALISCHE
ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

AUS DEM JAHRE
1887.

MIT 12 TAFELN.

BERLIN.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1888.

BUCHDRUCKEREI DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN (G. VOGT).

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Inhalt.

Zur Stammesgeschichte der Hexactinelliden.

Von

Hrn. FRANZ EILHARD SCHULZE.

Gelesen in der Sitzung der physik.-mathem. Classe am 17. Februar 1887
[Sitzungsberichte St. X. S. 125].
Zum Druck eingereicht am 24. März 1887, ausgegeben am 7. Mai 1887.

Für jeden Anhänger der Descendenztheorie entsteht nach der Durcharbeitung einer Thiergruppe auf dem Wege der directen Untersuchung die Aufgabe, die so ermittelten Thatsachen zu verwerthen für die Phylogenie oder Stammesgeschichte der betreffenden Abtheilung.

Indem ich es unternehme, aus den Ergebnissen meiner Studien an den jetzt lebenden Hexactinelliden Schlüsse zu ziehen auf die Phylogenie dieser Spongiengruppe, bin ich mir wohl bewufst, für die so gewonnenen Vorstellungen keine absolute Sicherheit in Anspruch nehmen zu können; und dies um so weniger als gerade hier eine Ergänzung der anatomischen und embryologischen Thatsachen durch die Resultate der paläontologischen Forschung trotz Zittel's ausgezeichneter Untersuchungen nur in sehr beschränkter Weise stattfinden kann. Wenn auch gerade von fossilen Hexactinelliden gewisse Skelettheile, zumal die zusammenhängenden Kieselbalkengerüste, gelegentlich wundervoll erhalten sind und nach der Freilegung durch vorsichtige Säuremaceration zu sehr eingehenden Studien wohl verwendbar sich gezeigt haben, so sind doch die für die Charakteristik der Formen besonders wichtigen isolirten, lose im Weichkörper gelegenen Kieselnadeln in der Regel gar nicht conservirt, von dem Weichkörper keine Spur zu finden und überhaupt nur von einzelnen kleinen Abtheilungen der ganzen Classe Überreste bekannt geworden. So werde ich mich denn darauf beschränken müssen, am Ende meiner Auseinandersetzungen die aus dem Studium der lebenden Formen gewonnenen Vorstellungen mit den Ergebnissen der paläontologischen Forschung zu ver-

gleichen, um wenigstens festzustellen, ob und in wie weit sie mit diesen harmoniren.

Wenn es sich zunächst darum handelt, die verwandtschaftlichen Beziehungen der jetzt lebenden Hexactinelliden unter einander und zu den uns bekannten, fossil erhaltenen Formen festzustellen, so werde ich mich vielfach, und zwar gerade bei der Constatirung der allernächsten Blutsverwandtschaft, auf die Mittheilungen beziehen können, welche ich der Akademie im vorigen Jahre über den Bau und das System der Hexactinelliden gemacht habe[1]). Es kann ja keinem Zweifel unterliegen und wird wohl auch nicht ernstlich bestritten, dafs eine so grofse Übereinstimmung im Gesammtbau und allen Einzelnheiten der Organisation, wie sie zur Vereinigung verschiedener Formen zu einer engen systematischen Einheit vom Werthe einer Art oder selbst einer Gattung gehört, im Allgemeinen auf einer sehr nahen Blutsverwandtschaft beruhen mufs und daher auch auf eine solche zu schliefsen erlaubt. Je weiter aber die systematischen Kategorien ausgreifen, um so gröfser pflegen die Lücken zu sein, welche zwischen ihnen in der jetzt lebenden Fauna klaffen, und um so schwieriger wird es sein, die richtige verwandtschaftliche Stellung derselben zu einander zu ermitteln. Jedenfalls reicht die überlieferte Weise ihrer Darstellung durch Anordnung der Abtheilungen in eine fortlaufende Reihe, dem sogenannten zoologischen System, hier noch weniger aus als bei den einzelnen, meistens leichter zu übersehenden Varietätenkreisen, welche eine Species, oder bei den Arten, welche je eine Gattung bilden.

Dies zeigt sich sogleich recht evident bei der Beurtheilung der beiden grofsen Unterordnungen, in welche die meisten heutigen Spongiologen, und ich mit ihnen, die Hexactinelliden einstweilen noch glauben zerfällen zu sollen, die *Lyssacina* und *Dictyonina*. Es fragt sich nämlich, ob diese beiden oft systematisch als ziemlich gleichwerthig angesehenen Abtheilungen zweien durch Gabelung eines gemeinsamen Stammes entstandenen Hauptästen oder nicht vielmehr zweien über einander gelegenen Abschnitten desselben verästelten Baumes entsprechen. Im ersteren Falle müfsten wir annehmen, dafs beide Abtheilungen mit differirenden Formen ganz oder nahezu gleichzeitig aus einer gemeinsamen Ahnenform hervor-

---

[1]) Abhandl. der Königl. Preufs. Akad. der Wiss. zu Berlin vom Jahre 1886.

gingen, und dafs jede für sich, in einer besonderen Richtung weiter entwickelt, schliefslich zu ihrem eigenartigen jetzigen Charakter gelangte; während wir im zweiten Falle zu der Vorstellung gelangen würden, dafs die Vorfahren der einen Unterordnung schon den Charakter der anderen, ihr jetzt systematisch gleichwerthigen Unterordnung gehabt haben müfsten, und als solche auch zweifellos in diese letztere systematische Abtheilung zu stellen wären. Wir würden also in diesem letzteren Falle annehmen, dafs die einen aus den anderen hervorgegangen seien.

Bevor ich mich zur eingehenden Erörterung dieser und verwandter Fragen wende, will ich die bezüglichen Ansichten früherer Forscher kurz zusammenstellen.

In seinen Untersuchungen über Hexactinelliden[1]) 1875 sagt Marshall: „Den Zustand der Verwachsung“ (bei welchem nämlich die Axencanäle der Gerüstbalken ein zusammenhängendes, offen anastomosirendes System bilden sollten) „halte ich für den phylogenetisch ältesten; aus ihm entwickelten sich die Hexactinelliden mit freien Kieselkörpern und zunächst wohl solche mit überwiegend sechsstrahligen Kieselgebilden, die dann weiter Nichts als das Resultat von Vererbung sein würden. Durch Anpassung kam nun die grofse Reihe oft überraschend schöner Nadelformen zu Stande, für die Bowerbank eine so schwerfällige Nomenclatur ersonnen hat.“ „Der dritte Zustand, der der Verschmelzung, scheint auf verschiedene Art vor sich gehen zu können“, nämlich 1) durch einfache Vereinigung der Mantelsubstanz zweier neben einander liegender Nadeln, 2) durch plattenförmige Stammbildungen, welche sich brückenartig zwischen zwei zwar genäherten, aber nicht unmittelbar aneinander liegenden Nadeln finden, und 3) durch Verhüllung zweier parallel und nahe aneinander liegenden Nadelstrahlen mittelst geschichteter lamellöser Kieselsubstanz.

In seinem Aufsatze betitelt: „Ideen über die Verwandtschaftsverhältnisse der Hexactinelliden“[2]) hat Marshall sodann seine Vorstellungen von der Phylogenie der Hexactinelliden noch etwas näher auseinandergesetzt. Indem er von einer zunächst noch skeletlosen Chalynthus-artigen Urform ausgeht, findet er es wahrscheinlich, dafs in der Wand dieses ein-

---

[1]) Zeitschr. für wissensch. Zool. Bd. XXV. Supplement.

[2]) Zeitschr. für wissensch. Zool. Bd. XXVII p. 111.

fachen Sackes rechtwinklig sich schneidende Längs-, Ring- und Radiärzüge von etwas festerer Masse („erhärtete Sarkodinstränge“) zu einem zusammenhängenden Fasergerüst mit quadratischen resp. cubischen Maschen sich vereinigten. „Die nächste Form“, so fährt Marshall l. c. p. 119 fort, „ist dann ein Schwamm mit einfachen, zusammenhängenden Kieselgittern, in denen die Centralcanäle gleichfalls zusammenhängen, und der noch keine isolirte, functionell bedeutsame Nadeln erworben hat. Aus einer solchen einfachen Protohexactinellide entwickelten sich einerseits Formen, wie *Sclerothamnus*, mit einzelnen freien Nadeln und andererseits Arten, bei denen der Zusammenhang der Axencanäle nicht mehr statttfand, die aber doch auch ein zusammenhängendes, freilich nur durch secundäre Kieselsubstanz vereinigtes Skelet besitzen können, ohne dafs sich besondere Nadeln aufser reinen Sechsstrahlern differenzirt hätten. Für diesen phylogenetischen Standpunkt ist *Eurete*“ (welche Gattung nach Marshall's Auffassung der isolirten Kieselnadeln ganz entbehren soll) „wichtig, und als ontogenetische Recapitulation der von mir (Marshall) beschriebene, höchst einfache Embryo von *Hyalonema*.“

Aus der noch lebenden Gattung *Sclerothamnus* machte Marshall die seine Urformen darstellende Gruppe der *Synàuloïdae*, bei welchen „das Lumen der Röhren der verschiedenen Nadeln, wie diese selbst, continuirlich mit einander zusammenhängt, so dafs das ganze Gittergewebe des Schwammes von einem gleichfalls zusammenhängenden Röhrensysteme durchzogen ist“. Aus den übrigen Hexactinelliden formirte er die *Asynauloïdae*, bei welchen „das Lumen der Schenkel verschiedener Nadeln nie zusammenhängt, sondern jede Nadel, was den Centralfaden betrifft, ein selbstständig entwickeltes Individuum ist. Wo sich Gitterwerke finden, sind sie das ausschliefsliche Resultat der vom Syncytium abgeschiedenen, geschichteten Kieselsubstanz“.

Wir sehen also, dafs Marshall damals das Vorhandensein eines allerdings eigenthümlichen Dictyonalgerüstes als den ältesten Zustand der Hexactinelliden annahm, aus welchem sich dann später zu den *Lyssacina* zu rechnende Formen mit isolirtem Sechsstrahler entwickelt hätten. Bei manchen Nachkommen dieser letzteren sei erst durch secundäre Verbindung der Sechsstrahler wiederum ein zusammenhängendes Kieselbalkengerüst — (das Dictyonalgerüst unserer Dictyoninen) zunächst allein wie

bei *Eurete*, sodann auch mit isolirt daneben liegenden Nadeln, entstanden. Bei anderen Nachkommen dagegen sei diese secundäre Verschmelzung nicht eingetreten, dafür aber die Form der isolirten Kieselnadeln mehr oder minder complicirt geworden.

Im Jahre 1877 hat Zittel in den „Studien über fossile Spongien“[1]) seine bei der Durchforschung eines reichen paläontologischen Materials gewonnenen Ideen über das System und die Phylogenie der Hexactinelliden publicirt. Wenn Zittel's Anschauungen auch in einzelnen Punkten mit denjenigen Marshall's übereinstimmen, so weichen sie doch in andern nicht unerheblich von denselben ab. „Wäre“, sagt Zittel l. c. p. 19, „die Annahme richtig, dafs den festen Hexactinelliden-skeleten ein aus weichen Sarkodozügen bestehendes Gitterwerk vorausging, so müfsten die älteren fossilen Hexactinelliden nothwendiger Weise, wie dies Marshall auch voraussetzt, zu den Synauloïden gehören. Dies ist indefs keineswegs der Fall. Meine Untersuchungen der fossilen Formen haben gezeigt, dafs die zusammenhängenden Gittergerüste ausnahmslos aus verschmolzenen Sechsstrahlern bestehen, deren Axencanäle zwar häufig übereinander liegen und dann anscheinend zusammenfliefsende Röhren bilden, aber in Wirklichkeit sind sie stets getrennt; und meist liegen sie auch wie bei den lebenden Gattungen *Farrea*, *Eurete* und *Aphrocallistes* in der Art neben einander, dafs die zu den verschiedenen Sechsstrahlern gehörigen Axenfäden deutlich geschieden erscheinen.“ Nachdem Zittel dann noch nachgewiesen hatte, dafs auch selbst bei *Sclerothamnus* die Axencanäle des Gittergerüstes nicht in offener Anastomose stehen, sondern, durchaus den einzelnen verschmolzenen Sechsstrahlern entsprechend, mit ihren blind endigenden Ausläufen neben einander liegen, konnte er die Abtheilung der Synauloïden ganz streichen. Auch sprach er Zweifel an der Richtigkeit der Auffassung Marshall's von *Eurete* Semper als Monacide aus.

Im Allgemeinen wendet sich Zittel energisch gegen die Verwendung der isolirten Kieselkörper als Grundlage für die Zwecke der Systematik oder gar Phylogenie der Hexactinelliden, und zwar zunächst defshalb, weil diese lockeren Nadeln sich bei den fossilen Hexactinelliden fast

---

[1]) Abhandl. der Königl. Bairischen Akad., II. Cl. XIII. Bd. 1. Abth.

gar nicht erhalten haben oder wenigstens nicht aufzufinden sind. Sodann würden auch diejenigen lebenden Formen unbestimmbar bleiben, deren Skelet abgespült und nicht mehr mit den Weichtheilen bekleidet ist. Endlich meint Zittel, dafs die isolirten Nadeln dem mehr conservativen Dictyonalgerüste gegenüber zu den leicht veränderlichen, vom ursprünglichen Typus durch Anpassungen verschiedener Art bedeutend abgewichenen Skelettheilen gehören und sich zu den im Dictyonalgerüste verschmolzenen Nadeln verhalten wie etwa die Federn der Vögel gegenüber deren Knochen. Es seien daher für die Erkenntnifs der Verwandtschaftsbeziehungen nur die zum Dictyonalgerüste verschmolzenen Nadeln von hervorragender Bedeutung und für deren ganze Entwickelung und Gestaltung dieser letzteren hauptsächlich die Art und Weise mafsgebend, in welcher sie sich mit einander verbinden.

Aus diesem Grunde zerfällt Zittel die gesammten Hexactinelliden zunächst in die beiden Hauptabtheilungen der *Lyssacina*, „bei welchen die Skeletnadeln in der Regel isolirt bleiben und nur durch Sarkode verbunden sind", und der *Dictyonina*, „bei welchen die Skeletnadeln in regelmäfsiger Weise verschmolzen sind und ein zusammenhängendes Gitterwerk mit cubischen oder polyedrischen Maschen bilden". Die bei einigen Lyssacinen, wie etwa *Euplectella aspergillum*, ebenfalls vorkommende Verkittung der Skeletnadeln zu einem zusammenhängenden festen Gitterwerk könne nicht mit der den Dictyoninen eigenen Verschmelzung der Skeletnadeln in regelmäfsiger Art und Anordnung verglichen werden und habe bei der Unregelmäfsigkeit der Anordnung und der durch diese äufserliche Verbindung ungehemmten Weiterentwickelungsfähigkeit der Nadeln offenbar nur eine secundäre Bedeutung.

Für eine weitere Gruppirung der *Lyssacina* empfiehlt Zittel mit Marshall sodann, die gröfsere oder geringere Differenzirung der lockeren Nadeln zu berücksichtigen und bildet drei Familien: *Monacidae* Zittel mit nur einer Form lockerer Skeletnadeln, zu welcher Familie die weniger bekannten fossilen *Lyssacina* gehören sollen (wie *Astraeospongia* Röhn und *Stauractinella* Zittel), *Pleionacidae* Marshall, bei welchen die Hauptmasse des Skeletes aus reinen Sechstrahlern besteht, während daneben nur noch Besengabeln und Rosetten vorkommen sollten (*Asconema* S. Kent und *Lanuginella* O. Schmidt); und *Pollacidae* Marshall, bei wel-

chen die Form der Skelet- und lockeren Nadeln sehr mannichfaltig, ein besonderes Dermalskelet und Auskleidung der Magenhöhlungen vorhanden ist und die Basis meist einen Wurzelschopf aus langen Kieselnadeln bildet (zahlreiche lebende und einzelne fossile Formen). Die *Dictyonina* dagegen werden von Zittel in eine gröfsere Anzahl von Familien mit complicirterer Charakteristik getheilt.

In dem Aufsatze: „Über einige neue und wenig bekannte Philippinische Hexactinelliden“ von Marshall und Meyer, in den Mittheilungen des Königl. zoolog. Museums in Dresden, hat Marshall (in der Anmerkung auf pag. 273) seine Ansicht von der Continuität des Axencanalsystems in dem Balkengerüste von *Sclerothamnus* zurückgenommen und damit die Gruppe der synauloïden Hexactinelliden selbst fallen lassen.

Ausführlich hat sich im Jahre 1880 O. Schmidt über diese Fragen in seinen Spongien des Meerbusens von Mexico ausgesprochen. Er sagt daselbst pag. 41: „Die Vorstellung, die man mit der Eintheilung der Hexactinelliden in *Dictyonina* und *Lyssacina* zu verbinden geneigt sein wird, dafs die einen für sich und die anderen für sich aus einer oder einigen gemeinschaftlichen Stammformen ausgegangen seien, mithin sämmtliche *Dictyonina*, und namentlich die recenteren, enger unter einander als mit den Lyssacinen verbunden seien, ist sicher nicht zutreffend. Vielmehr erscheint die Verwandtschaft zwischen diesen beiden Abtheilungen als eine viel engere; die verwandtschaftlichen Bande haben sich wahrscheinlich wiederholt geknüpft, es sind Fäden herüber und hinüber gesponnen worden, und in einer der neuen Gattungen, *Hertwigia*, ist dieses untrennbare Verhältnifs dadurch in der überzeugendsten Weise zum Ausdruck gebracht, dafs diese Spongien an der ästigen Basis eine rein ausgeprägte Dictyonine, weiter oben, wo sie unregelmäfsige Röhren und Platten bildet, eine Übergangsform und noch weiter oben und nach aufsen eine der schönsten Lyssacinen ist. Ähnlich verhalten sich *Rhabdodictyum* und *Rhabdostauridium.*“

„Jedenfalls sind einmal Lyssacinen allein die Repräsentanten der Hexactinelliden gewesen. Als Lyssacine mufs auch heute jede Dictyonine ihre Entwickelung beginnen, wenn auch vielleicht auf kürzeste Frist. Und so wird zu jeder Periode Gelegenheit gewesen sein, dafs Dictyoninen sich

wieder zu Lyssacinen aufgelöst haben. Denn auch das starrste und sprödeste Dictyoninengerüst ist nur gradweise von dem losesten Lyssacinengerüste verschieden."

Meine eigenen Untersuchungen haben mich zu der Überzeugung geführt, dafs zwar ein gewisser Gegensatz zwischen Lyssacinen und Dictyoninen besteht, welcher ganz wohl zur Unterscheidung zweier systematischer Abtheilungen der ganzen Hexactinelliden-Ordnung benutzt werden kann, — dafs dieser Unterschied aber kein principieller, das heifst in der gesonderten Abstammung beider beruhender, sondern mehr ein gradueller genannt werden mufs und auch keineswegs zu einer scharfen Sonderung der beiden Abtheilungen ausreicht.

Wenn Zittel nicht sowohl den Umstand, ob eine Vereinigung der Hauptnadeln zu einem festen zusammenhängenden Balkengerüste erfolgt ist oder nicht, sondern vielmehr die Art und Weise dieser Vereinigung als charakteristisch und für die Sonderung der beiden Gruppen mafsgebend hingestellt hat, so mufs doch zugegeben werden, dafs die für die Dictyoninen als typisch angenommene Art der Balkengerüst-Bildung durch dichte Aneinanderlagerung von je zwei entsprechenden Armen benachbarter Sechsstrahler und Umhüllung dieser aneinander gelagerten Arme durch eine gemeinsame Kieselhülle zwar sehr häufig und bei einigen Dictyoninen wie *Aulocystis* oder in den jüngsten Partien von *Farrea*-Stöcken sogar regelmäfsig und vielleicht ausnahmslos vorkommt, dafs aber doch ganz aufserordentlich häufig die Verbindungsweise der Dictyonalia entweder theilweise oder hie und da sogar durchgängig eine wesentlich andere ist. Schon Zittel selbst hat darauf aufmerksam gemacht, dafs neben den auf die genannte Weise verbundenen Sechsstrahlern auch solche vorkommen, „welche die Reihe verlassen und ihre Arme in beliebiger Weise an das übrige Gerüst ankitten. Heften sich dabei ein oder zwei Strahlen solcher unregelmäfsig gelagerter Nadeln zufällig an das verdickte Kreuzungscentrum eines Sechsstrahlers an, so können scheinbar von einem Centralpunkte

mehr als sechs Arme ausgehen. Andere Unregelmäfsigkeiten werden dadurch veranlafst, dafs sich einzelne Strahlen umbiegen oder ihre Richtung verlassen, wobei die beiden Arme einer Axe nicht mehr in gerader Linie verlaufen.

Würden nun diese von Zittel angeführten und bei den meisten Dictyoninen leicht wahrzunehmenden, von dem äufseren Schema abweichenden Verbindungsweisen wirklich nur Ausnahmen in den Balkengerüsten darstellen, deren meiste Dictyonalia doch auf regelmäfsige, typische Weise verbunden wären, so würde dies die scharfe Umgrenzung der *Dictyonina* und ihre sichere Abgrenzung von den *Lyssacina* mit zusammenhängendem Balkengerüst gewifs nicht hindern oder wesentlich beeinträchtigen. Indessen kommen doch nicht wenige Hexactinelliden vor, bei welchen die als typisch angenommene Art der Verbindung der Dictyonalia entweder nirgends zu finden ist, oder nur nach langem Suchen hier oder dort einmal und dann auch noch in so wenig charakteristischer Weise auftritt, dafs man sie zwischen den zahllosen abweichenden, in beliebiger Kreuzung der Strahlen erfolgenden auch wohl als zufällige ansehen könnte. So fehlt zum Beispiel bei den verschiedenen mir bekannten Arten der Gattung *Aphrocallistes* die typische Verbindung der Dictyonalia ganz, obwohl doch Niemand in Zweifel darüber sein kann, dafs *Aphrocallistes* sowohl nach den gesammten übrigen Charakteren des Skeletes, als besonders nach der Bildung und Anordnung der isolirten Nadeln zu den *Dictyonina* und zwar in die Nähe der Euretiden und Coscinoporiden gehört. Als Beispiel für den zweiten Fall, dafs nämlich in einem makroskopisch manchen Dictyonalgerüsten gleichenden Skelete nur ganz vereinzelt eine Verbindung zwischen zwei Sechsstrahlern aufzufinden ist, welche auf die typische Art der Vereinigung bezogen werden kann, führe ich *Euryplegma auriculare* an.

Bei dieser Form habe ich in der That selbst lange geschwankt, ob ich sie für eine Lyssacine oder eine Dictyonine erklären sollte. Nachdem ich sie anfänglich, wie noch in meinem Aufsatze „über den Bau und das System der Hexactinelliden“ in den Abhandlungen der Königl. Preufs. Akademie vom Jahre 1886, zu den Dictyoninen gestellt hatte, habe ich es schliefslich doch vorgezogen, sie zu den Lyssacinen zu bringen, und zwar zu den Rosselliden, denen sie sich nicht nur hinsichtlich der Bildung

der lockeren Nadeln, sondern auch durch das Fehlen der Uncinate weit besser einfügt als jener Dictyoninengruppe, zu welcher sie zwar ihrem übrigen Charakter nach gehören würde, in welcher sie aber durch den Mangel der Uncinata und Scopulae einen fremdartigen Eindruck machen und stets eine Ausnahmestellung einnehmen müfste.

Es war mir von grofsem Interesse, dafs mein verehrter College, Herr Prof. Zittel, zwar ein macerirtes Skelet von *Euryplegma*, welches ich ihm bei Gelegenheit seines Besuches im zoologischen Institute der Berliner Universität zur Begutachtung vorlegen durfte, unbedenklich für ein Dictyoninenskelet erklärte, dagegen zugestand, dafs verschiedene mikroskopische Schnitte desselben Skeletes in der Nadelverbindung den Balkengerüsten der *Lyssacina* durchaus gleichen.

Nun können freilich in der Verbindungsweise der Nadeln aufser den erwähnten noch einige andere Momente zur Unterscheidung der Lyssacinen von den Dictyoninen benutzt werden, doch auch diese lassen nur eine graduelle, nicht aber eine principielle und durchgreifende Trennung beider Abtheilungen zu. Es ist schon von einigen früheren Forschern darauf hingewiesen und sehr leicht zu constatiren, dafs bei allen notorischen Lyssacinen, welche zusammenhängende Skeletgerüste bilden, aufser der einfachen Verlöthung der Nadeläste sehr häufig kurze Verbindungsbrücken, sogenannte Synapticula, zwischen den mehr oder minder genäherten, aber nicht zur Berührung gekommenen Strahlen der verschiedenartigen zur Vereinigung gelangenden Nadeln vorkommen. Indem nun zahlreiche solcher Synapticula in ziemlich gleichmäfsigen Abständen auftreten, entsteht eine leiterartige Bildung, welche eben von Einigen als charakteristisch für die mit zusammenhängendem Balkengerüste versehenen Lyssacinen im Gegensatze zu den Dictyoninen erklärt wurde. Nun ist es zwar zweifellos, dafs bei den Skeletbalkengerüsten der *Lyssacina* solche Leiterbildung durch Synapticula aufserordentlich häufig, ja ganz regelmäfsig vorkommt, dagegen ist es unrichtig anzunehmen, dafs dieselbe sämmtlichen Dictyoninen fehle. Denn ich habe sie, wenn auch nicht häufig, so doch ganz typisch ausgebildet auch bei zweifellosen Dictyoninen angetroffen, z. B. bei *Fieldingia lagettoides* S. Kent, welche sich schon durch ihre Uncinate und Scopulae als ein Glied der Reihe der *Dictyonina scopularia* documentirt.

Ein anderer Umstand, auf welchen ich zuerst aufmerksam gemacht habe, ist die frühe, gleich bei der Ausbildung des betreffenden Körpertheils erfolgende Vereinigung der Dictyonalia bei allen *Dictyonina*, im Gegensatze zu der (soweit wir wissen) erst nachträglich und zwar gewöhnlich ziemlich spät (nach längst erfolgter Anlage und weitgehender Ausbildung des ganzen Körpers) eintretenden und dann auch nur allmälig in dem schon fertigen Körper von einer Stelle aus weitergreifenden Verlöthung verschiedenartiger Spicula bei gewissen *Lyssacina*.

Wenn ich nun auch diese letztere Differenz als eine wesentliche und den verschiedenartigen Charakter beider Gruppen am treffendsten kennzeichnende halte, so mufs ich doch zugestehen, dafs dieselbe ebenfalls nur einen quantitativen Unterschied markirt; da ja auch die Dictyonalspicula der *Dictyonina* (wie zuerst Marshall für *Aulocystis Zittelii* sicher nachgewiesen hat) freie Nadeln waren, bevor sie verschmolzen, und dieser Verschmelzungsprocefs von den neugebildeten, also jüngsten Theilen des Körpers allmälig zu den älteren fortschreitet. Auch wissen wir von vielen Lyssacinen mit zusammenhängendem Skeletbalkengerüste, wie z. B. von *Rhabdodictyum delineatum* O. Schmidt, *Aulocalyx irregularis* F. E. S. und speciell von dem schon oben erwähnten *Euryplegma auriculare* F. E. S. noch keineswegs sicher, ob hier auch ebenso wie bei den in dieser Beziehung sicher gestellten *Euplectella*-Arten und einigen anderen Lyssacinen, der Verlöthungsprocefs resp. die Synapticula-Bildung wirklich erst längere Zeit nach der Ausbildung des Spongienkörpers stattfindet oder nicht vielmehr ziemlich bald nach dessen Anlage erfolgt. Es ist sogar für diejenigen Lyssacinen, welche mit einer durch reichliche Nadelverlöthung fest und compact gewordenen Basis auf anderen Festkörpern aufsitzen, sehr wahrscheinlich, dafs die Verlöthung der betreffenden Nadeln ziemlich früh am unteren Ende beginnt und allmälig nach oben fortschreitend schliefslich den oberen Rand erreicht. Voraussichtlich wird das obere Ende vieler Lyssacinen mit Gittergerüst lange Zeit, so wie es O. Schmidt für seine *Hertwigia falcifera* und einige andere Hexactinelliden beschreibt, nur von isolirten lockeren Nadeln gestützt sein, während am unteren Ende schon die Verlöthung weit vorgeschritten ist.

Es zeigt sich also, dafs das Verhältnifs, wie es sich jetzt zwischen

den lebenden Lyssacinen und Dictyoninen erkennen läfst, nicht für eine seit alter Zeit bestehende Separation beider Gruppen spricht, sondern für eine allmälige Umbildung gewisser Lyssacinen-Gruppen zu Dictyoninen, während andere auf der zweifellos älteren Lyssacinen-Stufe bestehen blieben und jetzt noch stehen.

Zwar kennen wir die Entwickelungsgeschichte der Dictyoninen nicht, doch ist zu erwarten, dafs dieselben zuerst mit isolirten Nadeln aus der Larve sich hervorbilden, also eine wenngleich vielleicht nur kurze Zeit hindurch das Lyssacinen-Stadium recapituliren, bevor eine regelmäfsige Verschmelzung gewisser Sechsstrahler beginnt und damit der typische Dictyoninen-Charakter gewonnen wird.

Sehr bemerkenswerth erscheint mir ferner der Umstand, dafs nach den Resultaten meiner bathymetrischen Zusammenstellungen sich in den gröfseren Tiefen und fern von den Küsten in der Mitte der Oceane vorwiegend Lyssacinen gefunden haben, während die Dictyoninen hauptsächlich in mäfsigen Tiefen und in der Nähe der Küsten erbeutet sind. Diejenigen Hexactinelliden der Challenger-Expedition, welche aus den gröfsten Tiefen emporgezogen sind, gehören gerade zu den einfachsten und recht typischen Lyssacinen, wie z. B. gewisse *Holascus*- und *Bathydorus*-Arten, speciell *Bathydorus fimbriatus*, welcher in 2900 Faden Tiefe mitten im pacifischen Ocean angetroffen wurde.

Übrigens finden wir auch innerhalb einiger Lyssacinen-Familien, wie der Euplectelliden und Rosselliden, bei gewissen Arten eine wenngleich sehr unregelmäfsige und spät eintretende Verlöthung der gröfseren Nadeln zu einem festen zusammenhängenden Gerüste. Man kann hier an eine beginnende Dictyonalgerüst-Bildung im phylogenetischen Sinne denken.

Es erscheint demnach der Dictyonalcharakter als etwas allmälig Erworbenes, was bei einigen Gruppen schon in längst vergangener Zeit, bei anderen erst später oder noch nicht vollständig, bei wieder anderen überhaupt nicht zur Ausbildung kam. Daraus dürfte es sich erklären, dafs wir, so wie jetzt, auch schon in früheren Perioden der Erdentwickelung Dictyoninen und Lyssacinen nebeneinander antreffen.

Sehen wir uns nun nach den einzelnen Haupt- und Nebenzweigen des grofsen hypothetischen Hexactinelliden-Stammbaumes um, soweit wir

sie eben aus den Untersuchungs-Ergebnissen der lebenden Formen erschliefsen können, so zeigt sich zunächst eine tiefgreifende, ebensowohl in der Organisation des Weichkörpers als der Skelettheile deutlich ausgeprägte Spalte zwischen den *Amphidiscophora* oder Hyalonematiden einerseits und den sämmtlichen übrigen — den *Hexasterida* — andererseits.

Während bei den letzteren die für den Ernährungsprocefs zweifellos hochwichtige *Membrana reticularis* durchgehends zu annähernd gleich grofsen, fingerhutförmigen und ihrer Länge nach neben einander stehenden Kammern formirt erscheint, zeigt sich dieselbe bei den Hyalonematiden in mehr oder weniger unregelmäfsiger Weise ausgebuchtet und ohne jene typische Bildung scharf abgesetzter Kammern von annähernd gleicher Gröfse. Mir scheint, dafs man in diesem eigenartigen Verhalten der (*Membrana reticularis* bei den) Hyalonematiden vielleicht eine niedere Bildungsstufe dieser letzteren, jedenfalls aber eine nicht zu unterschätzende Abweichung derselben von den in ihrem ganzen Weichkörperbau sonst sehr gleichförmigen übrigen Hexactinelliden wird erblicken müssen. Noch viel deutlicher aber ist die scharfe Trennung der Hyalonematiden von den übrigen Hexactinelliden durch den ihnen allein eigenen Besitz jener als Amphidisken (oder *Birotulae*) bezeichneten Kieselkörper, welche ebensowenig jemals einer Hyalonematide fehlen, als bei irgend einer anderen Hexactinellide gefunden sind, sowie ferner durch den Umstand, dafs die allen übrigen Hexactinelliden zukommenden Hexaster hier (bei den Hyalonematiden) vollständig fehlen. Prägt sich nun schon hierdurch eine grofse Selbstständigkeit der Hyalonematiden und ihre weite Trennung von allen anderen Hexactinelliden aus, so treten aufserdem noch gewisse Charaktere mit einer grofsen Beständigkeit und Gleichartigkeit innerhalb der ganzen Gruppe auf, welche wir bei anderen Abtheilungen viel wechselnder und ungleichartiger sehen. Dahin gehört z. B. die übereinstimmende Art der Befestigung im Schlammboden mittelst eines Basalschopfes und die Bedeckung der ganzen Aufsenfläche mit Pinuli.

Man wird demnach nicht umhin können, eine frühe Abtrennung der Hyalonematiden oder *Amphidiscophora* von den übrigen Hexactinelliden und einen selbstständigen Entwickelungsgang derselben anzunehmen, was sich in dem zu entwerfenden Stammbaum graphisch durch eine tiefe

Abzweigung dieses bedeutenden und in der Jetztzeit verhältnifsmäfsig reich blühenden Astes darstellen mufs.

Unter den übrigen, der Amphidisken entbehrenden, dafür aber mit Hexastern versehenen Hexactinelliden, welche man in ihrer Gesammtheit zweckmäfsig als *Hexasterida* bezeichnen kann, sondert sich eine Gruppe von Familien, sämmtlich ausgezeichnet durch den Besitz der Uncinate, ziemlich scharf von den übrigen. Diese *Uncinataria* gehören sämmtlich zu den Dictyoninen und haben sich offenbar auch schon früh in zwei auseinander weichende Äste getheilt, nämlich einerseits die kleine, aber scharf ausgeprägte Familie der *Farreïdae*, welche aufser der Einschichtigkeit ihres quadratischen Gittergerüstes an den jüngsten Zuwachspartien auch noch durch den ausschliefslichen Besitz der merkwürdigen Clavulae in ihren Grenzhäuten ausgezeichnet ist, und andererseits der *Scopularia*, welche in ihren Scopulae so sonderbare und charakteristische Nadeln entwickelt haben, dafs man wohl schwerlich ein bezeichnenderes Document für Zusammengehörigkeit auf Grund naher Verwandtschaft finden dürfte. Minderwerthig, obwohl im Einzelnen oft gar nicht ohne prägnante Eigenthümlichkeit, sind die Charaktere, welche die vier lebenden Familien der *Scopularia* von einander unterscheiden lassen. So zeigt sich z. B. die Familie der *Melittionidae*, obwohl nur aus der einzigen Gattung *Aphrocallistes* mit wenigen Arten bestehend, durch die sechsseitig-prismatischen Bienenzellen gleichenden radiären Durchbohrungen ihres platten Dictyonalgerüstes so scharf charakterisirt und von den anderen Familien entfernt, dafs man wohl eine lange selbstständige Ahnenreihe, d. h. also eine ziemlich frühe Abtrennung ihres Zweigleins von dem gemeinsamen Scopularienaste, anzunehmen haben wird. Die Charaktere des Ursprungstheiles dieses letzteren scheint mir die Familie der Euretiden noch am wenigsten verändert erhalten zu haben, indem hier verhältnifsmäfsig einfache und weniger ausgearbeitete Organisationsverhältnisse besonders in Betreff des die Körperwand durchsetzenden, zu- und ableitenden Canalsystems zu bestehen scheint. Während nämlich bei den Euretiden die zu- und ableitenden Canäle, welche die schmale Wandung der den ganzen Schwamm bildenden Röhren in verschiedenen Richtungen durchsetzen, noch recht kurz und in ihrer Form uncharakteristisch, meist einfach sackförmig sich darstellen, treten die ableitenden Gänge bei den Melittioniden als gerade,

sechsseitige Prismen, bei den Coscinoporiden die zu- und ableitenden Gänge als gerade, die Körperwand rechtwinklig durchsetzende, schmale und meist ziemlich lange, alternirende Trichter, bei den Tretodictyiden endlich als unregelmäfsig gewundene Canäle auf.

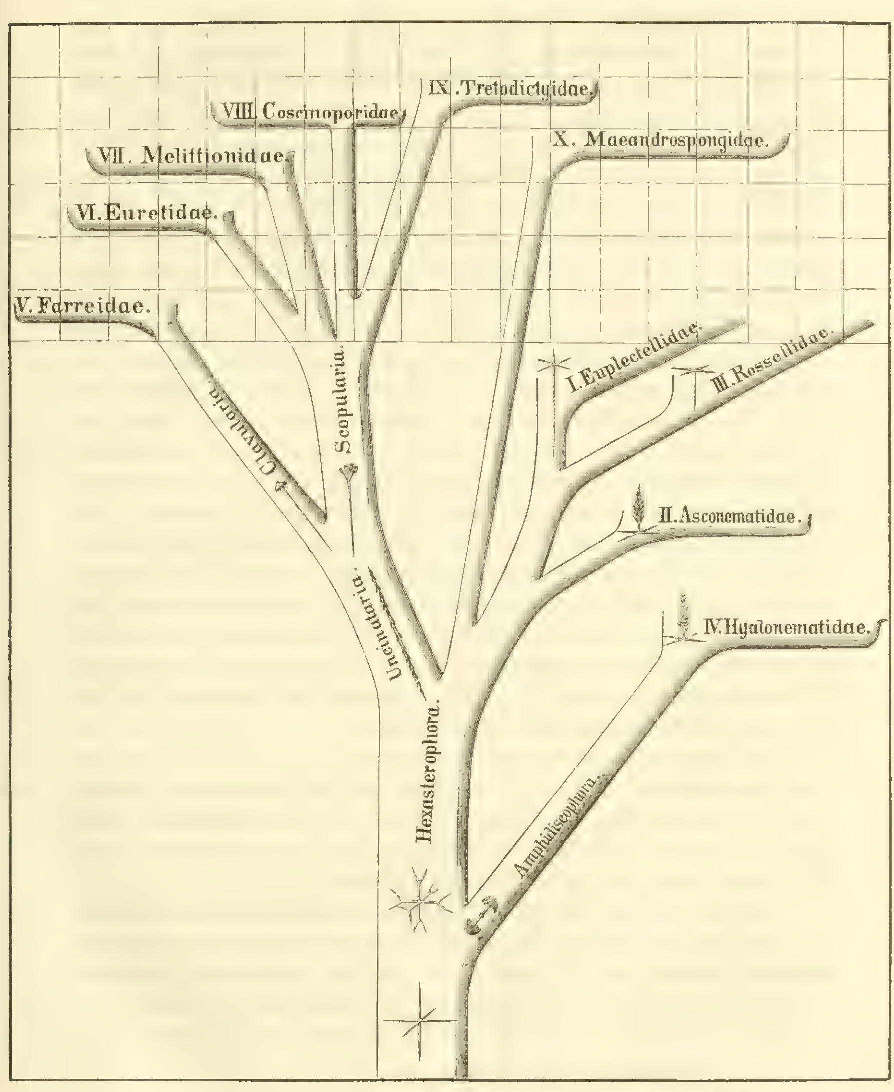
Von den bisher noch nicht näher berücksichtigten Hexasteriden, welche keine Uncinate ausbilden, zeichnet sich die schon in der Kreidezeit blühende Familie der Maeandrospongiden aus durch den Aufbau des Körpers aus einem System anastomosirender, mäandrisch gewundener, dünnwandiger Röhren mit zwischenliegendem System anastomosirender Intercanäle.

Während nun diese Maeandrospongiden längst zu wahren Dictyoninen geworden sind, haben die übrigen Uncinaten-freien Hexasteriden-Familien entweder noch vollständig den Lyssacinen-Charakter bewahrt, oder sie haben sich durch die im Alter eintretende, mehr oder minder weitgehende Verlöthung gröfserer Kieselnadeln zu zusammenhängenden Gerüsten dem Dictyoninen-Typus genähert. Von den drei hierher gehörigen Familien, den Euplectelliden, Asconematiden und Rosselliden, nimmt die erstere vorzüglich durch die Sechsstrahligkeit der Hautstütznadeln (*Hypodermalia*) eine Sonderstellung ein gegenüber den beiden anderen Familien, welche nur pentacte Hypodermalia mit innerem Radialstrahl besitzen. Während sich nun bei den Asconematiden in der Haut aufserdem noch autodermale Pinuli entwickelt haben, und dadurch diese Hexasteriden-Familie einen sehr eigenartigen, etwas an die Hyalonematiden erinnernden Charakter gewonnen haben, finden sich bei den Rosselliden derartige Autodermalia mit nach aufsen frei vorstehendem Tannenbaumstrahl nicht. Es dürfte schwierig, ja vor der Hand wohl kaum möglich sein, das verwandtschaftliche Verhältnifs zwischen diesen drei benachbarten Zweigen mit einiger Sicherheit festzustellen. Offenbar haben die Euplectelliden sowohl in ihrer ziemlich einfachen Sack- oder Röhrenform als auch gerade in der Sechsstrahligkeit ihrer Hautnadeln noch so primitive Verhältnisse bewahrt, dafs man sich nicht wundern würde, wenn man sehr einfach gebaute Familienangehörige derselben in einer verhältnifsmäfsig frühen Periode der Erdentwickelung anträfe. Dennoch finden sich sowohl in dem Parenchym mancher Arten, wie etwa *Dictyocalyx gracilis*, als auch in den äufsersten Hautspitzen vieler Gattungen, z. B. wie *Euplectella*, *Taegeria*,

Walteria etc., so complicirt gebaute, hoch differenzirte Nadeln (*Discohexaster*, *Floricome* etc.), und es neigen so viele Species zur Verlöthung der grofsen Nadeln und Bildung eines zusammenhängenden Stützgerüstes, dafs man diese Formen wenigstens nicht als primitive wird bezeichnen dürfen.

Einen sehr einfachen Bau zeigen gewisse schlauch- oder sackförmige Rosselliden, wie z. B. der aus gröfster Tiefe erhaltene *Bathydorus fimbriatus*. Dagegen stehen andererseits Arten, wie *Aulocalyx irregularis*, sowohl durch die Bildung eines zusammenhängenden Stützgerüstes als durch die complicirte Figuration der isolirten Nadeln, und die ganze Abtheilung der *Crateromorphinae* durch die Ausbildung eines mehr oder weniger festen langen Stieles und complicirte Faltelung der Kammerschichte schon bedeutend höher. Merkwürdig ist die Übereinstimmung, welche die Asconematiden mit den doch im Übrigen zweifellos weit abstehenden Hyalonematiden durch den Besitz der autodermalen Pinuli zeigen. Schwerlich liegt hier eine directe Erbschaft, sei es der einen Familie von der anderen, sei es beider von einer gemeinsamen Ahnengruppe, vor. Vielmehr bin ich der Ansicht, dafs die Neigung zur Seitenzacken-Bildung eine bei den Hexactinelliden-Nadeln überhaupt sehr allgemein verbreitete ist, welche da, wo sie physiologisch werthvoll, speciell nützlich für die Erhaltung und Kräftigung des Organismus sein kann — wie etwa durch die Bildung von Fang- oder Vertheidigungs-Apparaten an den über die Haut vorragenden Autodermalia — auch bei weit aus einander liegenden Hexactinelliden zur Entstehung von Pinuli führen kann, ohne dafs gerade eine directe Übertragung durch Vererbung stattzufinden brauchte. Dafür spricht in diesem Falle auch der Umstand, dafs sich mitten unter den typischen Scopularia vereinzelt bei einzelnen Gattungen und Arten, so z. B. bei *Aphrocallistes* und dann wieder bei *Chonelasma Doederleinii* (nicht aber bei *Chonelasma lamella*) an dem mehr oder weniger weit über die Haut hervorragenden distalen Radialstrahl der Hypodermalia ganz gleiche Zacken und somit eine Pinulus-Bildung auf das Deutlichste erkennen läfst.

In dem folgenden Entwurfe eines Stammbaumes der von mir untersuchten Hexactinelliden habe ich die soeben angedeuteten Ideen auch graphisch darzustellen versucht.



IX. Tretodictyidae.
VIII. Coscinoporidae.
VII. Melittionidae.
X. Maeandrospongidae.
VI. Euretidae.
V. Farreidae.
I. Euplectellidae.
III. Rossellidae.
Scopularia.
Clavularia.
II. Asconematidae.
Uncinataria.
IV. Hyalonematidae.
Hexasterophora.
Amphidiscophora.

Dem Unternehmen, die an den lebenden Hexactinelliden gewonnenen Kenntnisse und Vorstellungen in Verbindung zu setzen mit dem, was wir von den fossilen wissen, treten eine Reihe von Schwierigkeiten hindernd in den Weg. Vor Allem ist zu bedauern, dafs uns von den allermeisten fossilen Formen nur das Dictyonalgerüst bekannt ist, so dafs also alle Schlüsse von vornherein wegfallen müssen, welche aus der Figuration des Weichkörpers und aus der Form, Zahl und Lagerung der so charakteristischen und für die Ermittelung der verwandtschaftlichen Verhältnisse trotz Zittel's gegentheiliger Ansicht äufserst brauchbaren isolirten Skelettheile gezogen werden könnten. Dann sind hier die Lücken der geologischen Überlieferung noch viel bedeutender als bei den meisten anderen Thiergruppen. Aus ganzen geologischen Formationen sind entweder gar keine Hexactinelliden oder nur geringfügige Spuren von solchen bekannt. Eine naheliegende Erklärung dieser Thatsache deutet Zittel in folgenden Sätzen[1]) an: „Unsere Kenntnifs der fossilen Hexactinelliden-Formen beschränkt sich auf vereinzelte, zeitlich und räumlich getrennte Reste einer Entwickelungsreihe, deren Zwischenglieder vielleicht in Ablagerungen begraben liegen, die jetzt unter dem Meeresspiegel versenkt sind oder sich in noch unerforschten Erdtheilen befinden. Ist es unter diesen Verhältnissen auch noch nicht möglich, einen Stammbaum für die einzelnen Gattungen aufzustellen, so müssen wir doch schon jetzt alle die Hypothesen, welche die Hexactinelliden aus den Tetractinelliden oder Monactinelliden ableiten wollen, in eine vorsilurische Zeit verweisen, wo uns das Licht der Erfahrung nicht mehr leuchtet."

Die Erklärung des sprungweisen Auftretens der fossilen Lithistiden und Hexactinelliden dürfte sich unschwer aus der Lebensweise ihrer recenten Verwandten ergeben. Beide Gruppen sind ausgezeichnete Tiefseebewohner; nur in ehemaligen Tiefenablagerungen darf man darum auch ihre fossilen Reste in gröfserer Anzahl erwarten.

Wenn wir also die Entstehung der Hexactinelliden in eine vorsilurische Zeit zu verlegen haben, aus welcher uns keine sicheren Repräsentanten erhalten sind, so wird auch von der Paläontologie kein Aufschlufs zu erwarten sein über die Art der Entstehung und die Urformen die-

[1]) Paläozoologie I pag. 199 und 200.

ser Spongiengruppe. Immerhin ist es von Wichtigkeit, dafs schon in silurischer Zeit neben den Lyssacinen auch Dictyoninen vorhanden gewesen zu sein scheinen. Dafs die Lyssacinen in den Ablagerungen der späteren, an Dictyoninen so überreichen mesozoischen Formationen, besonders des Jura und der Kreide, kaum in Andeutungen erhalten sind, während wir sie doch jetzt in weit gröfserer Anzahl als die *Dictyonina* lebend antreffen, könnte seinen Grund haben in der schlechten Erhaltungsfähigkeit dieser ja nur von einem lockeren nach der Zerstörung der Weichkörper leicht auseinanderfallenden Nadelwerke gestützten Formen. Doch dürfte vielleicht auch folgende Überlegung einer näheren Prüfung von Seiten competenter Beurtheiler nicht unwerth erscheinen.

Schon Zittel hat aus der Thatsache, dafs die jetzt lebenden Hexactinelliden sämmtlich in grofser Tiefe, wenigstens unterhalb 95 Faden leben, geschlossen, dafs dieselben wahrscheinlich zu allen Zeiten Tiefseethiere waren.

Wenn sich nun durch die bathymetrische Statistik der Challenger-Hexactinelliden herausstellt, dafs die jetzt in den gröfseren Tiefen der Oceane lebenden Hexactinelliden fast ausschliefslich Lyssacinen sind und die jetzt lebenden Dictyoninen sämmtlich mit Ausnahme einer sehr einfach gebauten Dictyoninengattung den minder tiefen Regionen, zwischen 100 und 1500 Faden angehören, so dürfte wohl der Schlufs erlaubt sein, dafs auch ehemals die Lyssacinen vorwiegend in grofsen Tiefen, die weiter ausgebildeten oder vorgeschrittenen Dictyoninen aber wie heute so auch ehemals in minder grofsen Tiefen und zwar nicht allzuweit von den Küsten entfernt gewohnt haben. Wenn man nun annehmen darf, dafs die tiefsten Regionen der grofsen Weltmeere seit dem paläozoischen Zeitalter dauernd vom Wasser bedeckt waren, während nur minder tiefe Regionen in der Nähe der Continente hier und da über das Wasser emporgehoben und damit dem Hammer des Paläontologen zugängig geworden sind, so wäre es begreiflich, weshalb wir in gewissen Jura- und Kreideablagerungen zwar sehr viele und hoch differenzirte Dictyoninen, aber nur schwache Andeutungen von Lyssacinen selbst unter Verhältnissen antreffen, welche eine Conservirung auch der letzteren oder wenigstens ihrer charakteristischen Nadeln nicht ausschliefsen.

Während ich mich bisher ausschliefslich nur mit den Hexactinelliden beschäftigt habe, will ich jetzt auch das Verhältnifs derselben zu den übrigen Spongiengruppen und die Stellung der letzteren zu einander in Betracht ziehen; und mit den Kalkschwämmen beginnen.

Dafs die Kalkschwämme nicht nur durch die Substanz, aus welcher ihr Skelet besteht, sondern auch durch die Gestalt ihrer Nadeln den übrigen Spongien als eine eigenartige Gruppe gegenüberstehen, kann wohl als eine allgemein anerkannte Thatsache angenommen werden.

Man wird daher geneigt sein, eine sehr frühe Abzweigung derselben von dem grofsen Spongienstamme vorauszusetzen. Andrerseits wird die grofse Übereinstimmung ihrer Skeletbildungen auch zu der Vorstellung führen, dafs sie einen gemeinsamen Ausgangspunkt, das heifst also eine monophyletische Abstammung haben. Mit der letzteren Annahme stimmt die sicher beobachtete Thatsache gut überein, dafs die Syconen bei ihrer ontogenetischen Entwicklung ein deutliches Asconen-Studium durchlaufen, und dafs zwischen Syconen und Leuconen durch die neueren Untersuchungen, speciell diejenigen Poléjaeff's an den Kalkschwämmen der Challenger-Expedition und von Lendenfeld's an den australischen Formen, zahlreiche Bindeglieder aufgefunden sind.

In näherer Verbindung stehen die Kiesel-, Horn- und Schleim-Schwämme unter einander. In Betreff der letzteren habe ich schon einmal darauf hingewiesen, dafs sie ebensowohl wegen der grofsen Unterschiede unter einander, als auch wegen der offenbaren Verwandtschaft einzelner Formen mit gewissen Horn- resp. Kiesel-Schwämmen nicht als eine selbständige, in sich geschlossene und durch nächste Blutsverwandtschaft verbundene Gruppe aufgefafst werden können, sondern an verschiedenen Orten den ihnen zunächst verwandten Formen als in Bezug auf das Skelet retrograde Endausläufer zugesellt werden müssen.

In Betreff der Hornschwämme scheint mir keine andere Annahme zuläfsig, als dafs sie aus den Kiesel- resp. Kiesel-Hornschwämmen durch allmälige Reduction und schliefslichen gänzlichen Verlust der Kieselnadeln entstanden sind.

In je gröfserer Menge und Ausbildung die Hornsubstanz auftritt, um so mehr gehen die Kieselskeletbildungen zurück, um schliefslich, wie bei vielen Chaliniden, welche den echten *Ceratosa* nahe kommen, nur

noch in Gestalt ganz einfacher glatter Spindeln zu erscheinen, welche ich als eine der Endformen des grofsen phylogenetischen Wandlungsprocesses der Kiesel-Nadelformen anzunehmen gedrängt bin.

In meiner Arbeit über die Familie der Plakiniden habe ich ausführlich nachgewiesen, weshalb wir in der grofsen und schier lückenlosen Übergangsreihe, welche sich dort zwischen dem typischen regulären Vierstrahler und der einfachen graden Spindel sowohl in einzelnen Species, ja oft in einem Individuum, als auch bei der Vergleichung der Skelettheile nahe verwandter Arten auf das Leichteste finden lassen, nicht etwa die grade Spindel als die Ausgangsform ansehen können, aus welcher die Drei- und Vierstrahler durch Auswachsen neuer Strahlen sich gebildet hätten, sondern umgekehrt die Vierstrahler als die Stamm- und Ausgangsform aufzufassen haben, von welcher die übrigen Nadeln, speciell die Drei- und Zweistrahler als durch Atrophie und Verkrüppelung der betreffenden Strahlen entstandene Verwandlungsprodukte abzuleiten sind. Zu dem gleichen Ergebnisse ist Oscar Schmidt — Entstehung neuer Arten durch Verfall und Schwund älterer Merkmale. Zeitschr. f. wiss. Bot. Bd. XLII p. 639 — durch das eingehende Studium anderer Tetractinelliden, besonders der Ancoriniden gelangt, wo sich sehr gut erkennen läfst, wie durch allmälige Verkümmerung der typischen, nur durch Ausziehen eines Strahles zu Ankern veränderten Vierstrahler schliefslich die einfache Stabnadel wird; und wie dann wiederum innerhalb solcher Gattungen, welche wie *Caminus*, schon ganz die Stabnadeln acquirirt haben, hier und da noch zwischen diesen letzteren verkümmerte Anker erscheinen, welche auf den Weg der Ableitung der Stabnadeln vom Vierstrahler deutlich genug hinweisen.

Ich kann es daher wohl als zweifellos hinstellen, dafs in vielen Fällen aus den regelmäfsigen typischen Vierstrahlern durch allmälige Verkümmerung einzelner Strahlen schliefslich Zweistrahler und selbst Einstrahler entstanden sind. Damit soll nun freilich nicht gesagt sein, dafs alle Diacte und Monacte grade von Vierstrahlern herzuleiten seien. Im Gegentheil haben schon frühere Bearbeiter der Hexactinelliden darauf hingewiesen und ich glaube es in meiner Darstellung der Hexactinelliden-Nadeln auf das Überzeugendste nachgewiesen zu haben, dafs wenigstens innerhalb der Hexactinelliden selbst die hier so zahlreich und im bunte-

sten Formenreichthum vorkommenden Diacte und Monacte nicht aus dem regulären Vierstrahler der Tetraxonier (dem sogenannten spanischen Reiter), sondern aus dem regulären Hexact der Triaxonier abzuleiten sind. Während nun aber von den Tetraxoniern mit typischen Tetracten noch jetzt zahllose Übergangsstufen bis zu reinen Monaxoniern ohne andere Nadeln als grade Diacte oder Monacte in lebenden Arten vorhanden sind, fehlen Übergänge von den Triaxoniern zu reinen Monaxoniern unter den lebenden und, soviel ich weifs, auch unter den fossilen Spongien gänzlich, so dafs wir also keinen Grund zu der Annahme haben, dafs sich reine Monaxonier aus Triaxoniern entwickelt haben sollten. Etwas anders steht es mit einigen erst in neuster Zeit von v. Lendenfeld in Australien entdeckten skeletlosen Spongien wie z. B. *Bajalus*[1]), welche im Baue so sehr mit dem Weichkörper mancher Hexactinelliden übereinstimmen, dafs man geneigt sein könnte, eine Abstammung derselben von Hexactinelliden unter gänzlichem Verlust der Kieselnadeln zu vermuthen.

Unter diesen Umständen ist die Annahme zulässig, dafs die sämmtlichen Monaxonier und die aus diesen wahrscheinlich hervorgegangenen *Ceratosa* aus dem Stamme der Tetraxonier hervorgegangen sind. Und da auch die Nadeln der Lithistiden, wie durch O. Schmidt, Zittel und Andere überzeugend nachgewiesen ist, von dem regulären Vierstrahler ableitbar sind und sich sämmtlich aus demselben gebildet haben werden, so sehen wir uns auf Tetraxonier mit einfachen regulären Vierstrahlern als Ausgangspunkt der sämmtlichen Kiesel und Hornschwämme mit Ausnahme der Hexactinelliden verwiesen.

Für eine Möglichkeit, dafs auch die Hexactinelliden in einem Descendenzverhältnifs mit den Tetraxoniern stehen könnten, sehe ich keinen Anhalt. Wie denn auch schon im Jahre 1870 O. Schmidt[2]) sich in gleichem Sinne mit folgenden Worten aussprach: „Zwischen dem Nadeltypus, wo die Strahlen durch die dreiseitige Pyramide determinirt werden, und dem dreiaxigen Nadeltypus finden, soweit wir den Formen nachgehn können, gar keine Beziehungen statt. Die Spongien, die innerhalb dieser Nadeltypen sich bewegen, erscheinen daher als zwei von einander

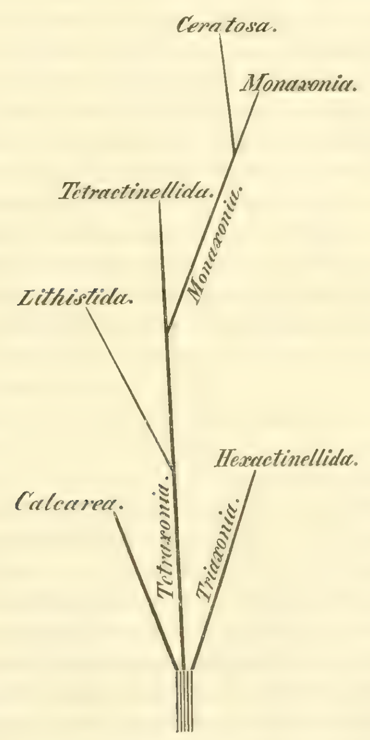
[1]) Proceed. of the Linnean Soc. of New South Wales. Vol. X. P. 1. pag. 5.

[2]) Grundzüge einer Spongienfauna des atlantischen Gebietes 1870 p. 5.

unabhängige Zweige, bei denen man die allgemeinen Homologien scharf von den Anpassungs-Analogien zu unterscheiden hat.“

So sind wir denn also zu dem Ergebnifs gelangt, dafs die Spongien aus drei Stämmen sich zusammensetzen, welche zwar aus einer gemeinsamen Wurzel — sehr einfachen skeletlosen Urschwämmen — entsprungen sein werden, welche aber von dieser Wurzel an getrennt neben einander stehen, ohne jemals seitliche Verbindungsglieder besessen zu haben.

In Stammbaumform würde sich das Gesagte etwa folgendermafsen darstellen.



Wenn wir es nun als wahrscheinlich annehmen dürfen, dafs jedem dieser drei Hauptstämme, in welche sich das grofse Volk der Spongien gliedert, nämlich 1. *Calcarea*, 2. *Tetraxonia* nebst *Monaxonia* und *Ceratosa*, 3. *Triaxonia*, bei seinem Entstehen ausschliefslich oder doch vorwiegend diejenige Form von Skelettheilen eigen war, aus welcher sich die übrigen entwickelt haben, so würde es sich nach Feststellung dieser Grundform darum handeln, zu ermitteln, weshalb sich in jedem einzelnen Stamme grade diese bestimmte Nadel-Form ausbilden mufste.

In Betreff der Kalkschwämme spricht Haeckel in seiner epochemachenden Monographie die sowohl auf anatomische als embryologische Thatsachen gestützte Überzeugung aus, dafs die Grund- und Ausgangsform aller Kalkschwammnadeln der reguläre Dreistrahler, daneben vielleicht auch in geringerer Ausdehnung die einfache Stabnadel gewesen ist. Unter „regulärem Dreistrahler“ wird aber eine dreistrahlige Nadel verstanden, deren Strahlen, an Gröfse und Gestalt völlig gleich, unter gleichen Winkeln von 120° zusammenstofsen, und genau in einer Ebene liegen. Haeckel weist l. c. Bd. I p. 352 darauf hin, dafs noch jetzt überall die Dreistrahler als die festen Stützen des Körpers erscheinen, während sich die Vierstrahler als Schutzwaffen der Gastralfläche, die Stabnadeln als Schutzwaffen der Dermalfläche darstellen; und er zieht den Schlufs, „dafs die Dreistrahler ursprünglich und primär die Hauptrolle spielten, dafs hingegen die Vierstrahler ursprünglich nur als innere Anpassungsbildungen der Gastralfläche, die Stabnadeln aber umgekehrt als äufsere Anpassungsbildungen der Dermalfläche zu betrachten und daher von secundärer Bedeutung sind.“

Als besonders wichtig für die Auffassung von der Bildung grade dieser bestimmten Form des regulären Dreistrahlers in dem Weichkörper der ersten Kalkschwämme nimmt Haeckel l. c. p. 377 einen eigenthümlichen Vorgang der „Biokrystallisation an, d. h. eine Combination der krystallisirenden Thätigkeit des kohlensauren Kalkes und der organisirenden Thätigkeit der Sarkodine“. Die Kalkspicula der Calcispongien sind nach Haeckel „als Biokrystalle aufzufassen, als Form-Individuen, welche ein Mittelding zwischen einem anorganischen Krystalle und einem organischen Sekrete darstellen und deren erste Entstehung auf einem Compromisse zwischen dem Krystallisations-Bestreben des kohlensauren

Kalkes und der formativen Thätigkeit der verschmolzenen Zellen des Syncytiums beruht". „Die ursprüngliche Grundform aller Dreistrahler und Vierstrahler ist der absolut reguläre Dreistrahler, der als eine hemiaxone Form des hexagonalen Krystallsystemes betrachtet werden kann, in welchem die kohlensaure Kalkerde als Kalkspath krystallisirt."

Auch O. Schmidt hat sich mit der Idee getragen, die Gestalt der typischen Spongiennadeln aus dem krystallinischen Verhalten der betreffenden Substanzen zu erklären. Er sagt in seinen Grundzügen einer Spongienfauna des atlantischen Gebietes pag. 4: „Schwierigkeiten macht die Frage, inwiefern die Natur des Kalkes und des Kiesels sich mit den auf das dreiseitige Prisma bezogenen strahligen und ankerförmigen Gestalten verträgt. Für den Kiesel läfst es sich zurecht kommen, für den Kalk nicht. Da wir aber in der Formen-Gruppe der dreiaxigen Kieselkörper (dem Sechsstrahler und dessen Derivaten) nur zwischen dem dreiaxigen und dem zwei- und einaxigen System zu wählen haben und das hexagonale nicht in Betracht kommen kann, so müssen wir uns an das den Mineralogen unbequeme Factum erinnern, dafs die in amorphe Grundsubstanz eingesprengten Quarzkrystalle nicht selten von dem hexagonalen System abweichende Axenanlagen zeigen, und dafs um so mehr bei unseren Spongiennadeln mit ihrer organischen Grundlage und Mischung auch andere Gestaltungen als die der krystallographischen Systeme zu erwarten waren."

Ich meinerseits mufs mich gegen jeden Versuch aussprechen, die Gestalt der Spongiennadeln, mögen sie nun aus kohlensaurem Kalk oder aus Kieselsäurehydrat bestehen, in Verbindung zu bringen mit dem Krystallisations Verhalten dieser Substanzen, oder gar von demselben abzuleiten resp. aus demselben zu erklären. Dagegen spricht zunächst bei den Kieselnadeln der Umstand, dafs die Kieselsäure in denselben überhaupt gar nicht in einem krystallinischen Zustande, sondern als völlig amorphes Kieselsäurehydrat oder Opal enthalten ist; was sich unter anderm dadurch markirt, dafs sie nicht doppelt-, sondern einfach-lichtbrechend ist.

Sodann spricht dagegen die Thatsache, dafs sich die Form der betreffenden Skeletbildungen nicht auf das Krystallsystem der Substanz, aus welcher sie bestehen, beziehen oder aus demselben ableiten läfst. Ferner vertragen sich die so aufserordentlich häufigen und oft recht bedeutenden Abweichungen der Strahlenaxen von dem typischen Winkel, welchen sie mit einander machen sollen, sowie die starken Biegungen der Strahlenaxen nicht mit der Annahme mafsgebender Krystallaxen.

Vielmehr mufs ich annehmen, dafs die Gestalt aller Spongiennadeln durch die organische Grundlage, in und aus welcher dieselben entstehen, bedingt wird, und dafs hier die formativen Kräfte keine principiell anderen sind, als diejenigen, welche überall bei der Formgestaltung des lebenden Organismus und seiner Theile wirksam sind.

Wenn wir nun auch von diesen die Form bestimmenden Kräften im Allgemeinen noch sehr wenig wissen, so lassen sich doch grade für die Skeletbildungen hier und da bestimmende Momente nachweisen, welche zwar nicht Alles erklären, aber doch Manches verständlich erscheinen lassen.

Gelingt es, einen nothwendigen, gesetzmäfsigen Zusammenhang zwischen Gestalt und Lage eines Skelettheiles einerseits und der erforderlichen Leistung desselben andrerseits überzeugend nachzuweisen, so haben wir vom Standpunkte des Nützlichkeits- und somit auch des Selektionsprincipes das Auftreten und Fixiren dieser Form und Lage des betreffenden Skelettheiles verständlich gemacht.

Für die Frage, weshalb sich als typische und Ausgangs-Nadelform bei den Kalkschwämmen der plane reguläre Dreistrahler, bei den Tetraxoniern nebst den davon abgeleiteten Monaxoniern und Hornschwämmen der reguläre Vierstrahler (spanische Reiter), bei den Triaxoniern (Hexactinelliden) der reguläre Sechsstrahler ausgebildet hat, scheint mir von wesentlichster Bedeutung der Unterschied in der Architektonik des Weichkörpers dieser drei Hauptspongiengruppen.

Die Asconen, welche als Ausgangsgruppe der Kalkschwämme betrachtet werden können, stellen bekanntlich im einfachsten Falle eine festsitzende dünnwandige, am freien Ende offene Röhre dar, deren Seitenwand von gleichmäfsig vertheilten, kreisrunden Lochporen durchbohrt ist.

Als typische Form der im Einzelnen allerdings recht verschiedengestaltigen Gruppe der Tetraxonier und ihrer Descendenz können wir einen dickwandigen Kelch hinstellen, in dessen compakter Wandung rundliche oder ganz kugelige Geifselkammern in Haufen nebeneinander liegen, etwa wie die Acini einer acinösen Drüse. So stellen sich wenigstens die meisten Tetractinelliden und Lithistiden, zahllose Monactinelliden und Hornschwämme dar, wenngleich auch Abweichungen, zum Beispiel die flachen Krusten mancher Placiniden vorkommen, welche aber wohl schwerlich als die typischen Urformen der ganzen Gruppe anzusehen sind.

Ganz anders macht sich dagegen der typische Aufbau der Hexactinelliden.

Die ungemein lockere Wandung des typisch sackförmigen Körpers weist zwischen zwei reichdurchlöcherten, dünnen parallelen Grenzlamellen eine einschichtige Lage grofser sackförmiger Geifselkammern auf, welche sowohl mit der äufseren Dermal-, als der inneren Gastralmembran durch ein System dünner fadenförmiger Balken, der Trabekel, verbunden ist. Diese dünnen Bindesubstanzbalken spannen sich bei ganz einfach gebauten und jungen Formen vorwiegend in radialer Richtung zwischen der Kammerlage und den beiden Grenzlamellen oder direct zwischen diesen letzteren selbst aus und sind dann unter einander gewöhnlich so durch tangentiale Verbindungsbalken verbunden, dafs man in der Regel von je einem Knotenpunkte sechs ziemlich rechtwinklig zu einander gerichtete Fäden abgehen sieht. Freilich läfst sich dies einfachste Verhältnifs nicht überall feststellen. Auch mögen sich wohl in vielen Fällen an dem nicht hinreichend gut conservirten Materiale die ursprünglichen Richtungsverhältnisse der Trabekel nicht mehr unverändert erhalten haben.

Sehen wir nun zu, wie sich in dem so verschieden gearteten Weichkörper unserer drei Spongien-Abtheilungen die für jede einzelne speciell typischen und als Ausgangsform angenommenen charakteristischen Nadeln gelagert zeigen.

Die regulären Dreistrahler der Asconen finden sich bekanntlich in der Röhrenwand tangential eingelagert, und zwar so, dafs der eine Strahl parallel der Röhrenaxe nach hinten gegen die Basis, die beiden andern aber schräg nach vorn und zur Seite gerichtet sind, und dafs die beiden letzteren in der Regel je eine Wandpore von hinten her umfassen.

Bei den *Tetraxonia* liegen die typischen regulären Vierstrahler in ihrer einfachsten und reinsten Form zwischen den kugeligen Geifselkammern, während in der Regel die von Geifselkammern freie Rinde, Basis oder Umgebung der grofsen Kanäle mehr oder weniger stark differenzirte Nadeln aufweisen.

Bei den *Triaxonia (Hexactinellida)* endlich finden sich die reinen typischen regulären Hexacte fast ausschliefslich dem Balkensysteme des Trabekelgerüstes eingelagert, während in der Kammerwand überhaupt keine Nadeln und in den beiden Grenzlamellen, der Basis, dem Oscularrande etc., fast nur erheblich modifizirte Skelettheile vorkommen.

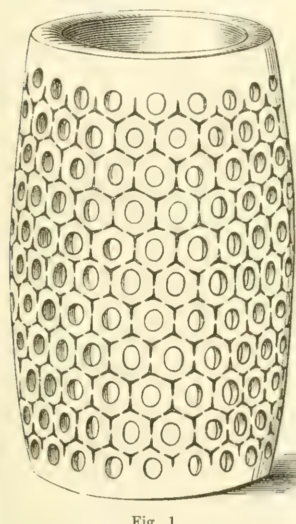
Indem ich von der Voraussetzung ausgehe, dafs die in der Körperwand der Spongien gelegenen Skeletnadeln im Wesentlichen zur Stütze oder zur Versteifung der Weichmasse dienen, so wird sich auch von vorne herein erwarten lassen, dafs diejenige Form und Lagerung der Festtheile sich hat ausbilden müssen, welche unter den bestehenden Verhältnissen am Besten geeignet war die nöthige Festigkeit der Körperwand herbeizuführen.

Ich bin nun der Ansicht, dafs sich mit überzeugender Wahrscheinlichkeit eine solche nothwendige Beziehung zwischen der Figuration des Weichkörpers jeder der drei vielgenannten Hauptspongiengruppen und den für dieselben charakteristischen typischen Nadel-Formen nachweisen läfst, welche wir als die Ur- oder Ausgangsformen für jede einzelne Abtheilung durch die vergleichende Anatomie und Entwickelungsgeschichte anzunehmen gezwungen sind.

Wenn eine Platte von möglichst vielen, gleich grofsen, kreisrunden Löchern in der Weise durchsetzt werden soll, dafs das Lumen der Löcher einen gewissen Spielraum der Erweiterung und Verengerung habe,

so werden diese Lücken nur eine bestimmte Art der Anordnung und zwar dieselbe zeigen, welche die Zellen einer Bienenwabe darbieten, aber ein Netz mit etwas breiteren Balken zwischen sich lassen.

Besteht nun die Platte aus einer Masse, welche der Stützung durch eingelagerte Festtheile bedarf; und sollen diese letzteren zwar einerseits dem Ganzen die gröfstmöglichste Festigkeit gewähren, andererseits aber doch eine gewisse Erweiterungsfähigkeit der ganzen Röhre und auch der zwischenliegenden Poren zulassen, so stellen sich *dreistrahlige Nadeln* als die zweckmäfsigste Form heraus. Dieselben könnten in einer derartigen Anordnung vertheilt sein, dafs in *jedem* Interstitium zwischen je drei benachbarten Poren der Centraltheil eines regulären Dreistrahlers zu liegen käme, und von diesem aus die drei Strahlen unter gleichen Win-



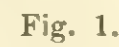


Fig. 1.

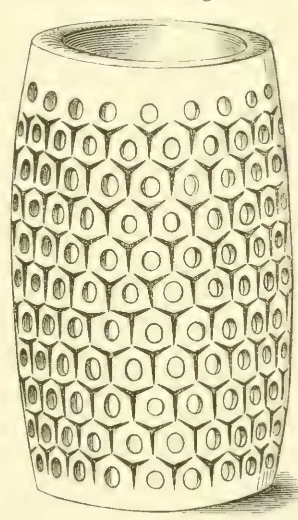


Fig. 2.

keln zwischen je zwei der benachbarten Löcher hineinragten, Fig. 1, oder so, dafs nur die Hälfte aller Poreninterstitien von dem Centraltheile der Dreistrahler eingenommen wird, während die andere Hälfte die zusammentreffenden drei Strahlenenden von je drei benachbarten Dreistrahlern enthält, Fig. 2. Diesen letztern Modus sehen wir in zahlreichen sehr ein-

fach gebauten Kalkschwämmen vom Asconen-Typus realisirt; und werden ihn für den hier vorliegenden Fall einer mit dem einen Ende festsitzenden, am andern (dem Oscular-) Ende frei emporragenden und offenen Röhre bei näherer Betrachtung der Verhältnisse für den vortheilhafteren halten müssen. Auf diese Weise wird die Umgrenzung jeder einzelnen Pore besonders an deren unteren Rande gefestigt durch die Gabelung des dahinter gelegenen Dreistrahlers, welcher die Pore von unten (hinten) her gleichsam umfafst; und es wird die ganze Schwammröhre durch die verhältnifsmäfsig längeren Nadelausläufer besser gestützt als in dem erst erwähnten Falle. — Wir dürfen also wohl die Entwickelung grade der regulären Dreistrahler als durch die ganze Architektonik des Weichkörperbaues bei den ersten Kalkschwämmen bedingt oder gefordert ansehen.

Hinsichtlich der den Tetraxoniern eigenen regulären Vierstrahler stelle ich folgende Betrachtung an. Wenn eine Anzahl gleich grofser Kugeln von allen Seiten gleichmäfsig fest zusammengedrängt wird, so lagern sich dieselben so aneinander, dafs immer zwischen je vier benachbarten und direct aneinanderstofsenden Kugeln je ein regelmäfsig geformter Hohlraum bleibt, welcher sich in vier unter gleichen Winkeln zu einander gestellte dreiseitige Spalten fortsetzt, und durch diese mit den benachbarten Zwischenräumen gleicher Form zusammenhängt. Am Besten kann man die Form dieser Räume regulären Tetraëdern mit eingebauchten Wandungen und ausgezogenen Ecken vergleichen, welche letzteren direct in die entsprechenden ebenso ausgezogenen Ecken der benachbarten Tetraëderräume übergehen und so den Zusammenhang sämmtlicher Lückenräume untereinander herstellen. Denkt man sich nun dieses ganze Lückensystem mit einer halbweichen Masse gefüllt und die Kugeln als leere Räume, so entsteht ein der Stütze bedürftiges Gerüst halbweicher Substanz. Soll das zur Stütze dieses Gerüstes erforderliche Skeletsystem aus gleichartigen beweglichen Skeletkörpern mit drehrunden Ästen bestehen, so wird jeder dieser Skeletkörper sein Centrum nothwendig in der Mitte je einer solchen tetraëdrischen Masse haben müssen, wie sie zwischen je vier benachbarten Hohlkugelräumen vorhanden ist, uud es müssen von diesem Centrum aus vier Balken in die Axen der vier ausgezogenen Ecken des tetraëdrischen Gebildes ausgehen.

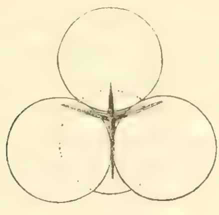


Fig. 3.

Es werden demnach als beste Stützkörper einer derartig gebauten Masse gerade solche regulären Tetracte erfordert, wie wir sie in dem entsprechend gearteten Parenchyme bei Tetraxoniern zwischen den Geisselkammern antreffen und als typische Skelettheile dieser Spongiengruppe längst erkannt haben.

Wenn uns die so gut wie unbekannte Entwickelungsgeschichte der Hexactinelliden auch einstweilen noch keinen Anhalt für die Architektonik der Urhexactinelliden geben kann, so läfst sich doch aus der grofsen Übereinstimmung, welche sämmtliche untersuchten Repräsentanten dieser Gruppe in den Grundzügen ihres Aufbaues zeigen, der Schlufs ziehen, dafs die Ausgangsformen der ganzen Abtheilung eben diesen Bau, wenn auch in sehr einfacher Form besessen haben.

Wie ich schon oben hervorhob, besteht der im Allgemeinen sackförmig zu denkende, ungemein locker aufgeführte Körper in der Hauptsache aus zwei annähernd parallelen durchbrochenen Grenzlamellen, der Dermal- und Gastralmembran, zwischen welchen die in verschiedener Weise ausgebauchte, meistens eine gefaltete Kammerlage bildende membrana reticularis durch ein Gerüst feiner Balken ausgespannt gehalten wird. Die Hauptstränge dieses das parenchymale Skelet enthaltenden Trabekelgerüstes gehen rechtwinklig von jeder der beiden Grenzlamellen ab, und treffen gewöhnlich so aufeinander, dafs sie die Körperwand quer durchsetzende gerade Balken bilden; stehen aber aufserdem seitlich mit zahlreichen Trabekeln in Verbindung, welche, in anderer Richtung verlaufend, ein an den Präparaten ziemlich unregelmäfsig sich darstellende Gerüst bilden, wenngleich longitudinal und transversal gerichtete Züge vorwalten.

Es scheint mir nun klar, dafs unter diesen Umständen zur erfolgreichen Stützung eines solchen einfachsten lockeren Hexactinelliden-Weichkörpers keine zweckmäfsigere Form von Skeletkörpern gedacht werden kann als reguläre Hexacte in solcher Stellung, dafs ein Strahl radiär stehend die beiden Grenzlamellen verbindet, der zweite tangential, der dritte longitudinal orientirt ist, Fig. 4, wie wir sie auch bei den am einfachsten gebauten Lyssacinen, *Holascus*, *Bathydorus* etc., gelagert finden.

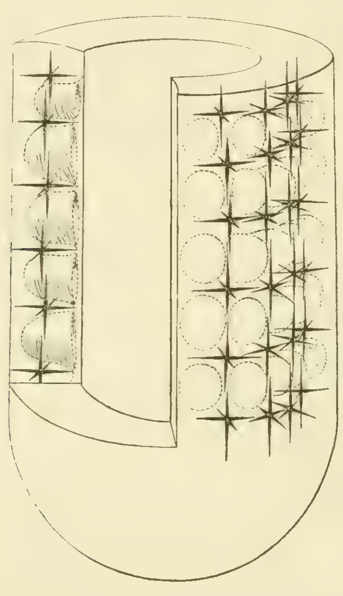


Fig. 4.

Durch feste Verbindung sämmtlicher so gelagerten Hexacte entsteht dann jenes Gittergerüst, welches wir von fast idealer Regelmäfsigkeit in den jüngeren Partien von *Farrea* ausgebildet finden. Bei weitergehender Verdickung der Wand lagern sich immer neue Schichten gleich gebildeter regulärer Hexacte an die erste Lage an, wie wir dies unter den Lyssacinen bei *Holascus fibulatus*, unter den Dictyoninen bei älteren Theilen von *Farrea*-Stöcken am Besten ausgeprägt sehen, aber in mehr oder

minder deutlicher Ausbildung bei sämmtlichen Dictyoninen und den meisten Lyssacinen erkennen können.

So dürfte die Kenntnifs der mechanischen Verhältnisse des zu stützenden Weichkörpers auch hier zur Einsicht von der Zweckmäfsigkeit einer ganz bestimmten Gestalt der stützenden Skelettheile, in diesem Falle des regulären Sechsstrahlers, führen.

Nachträge zur Kenntnifs der Coniferenhölzer der palaeozoischen Formationen.

Aus dem Nachlafs von

H. R. GÖPPERT,

im Auftrage der Königlichen Akademie der Wissenschaften bearbeitet von

G. STENZEL,

Professor in Breslau.

Vorgelegt in der Sitzung der phys.-math. Classe am 17. März 1887.
Zum Druck eingereicht am 7. Juli 1887, ausgegeben am 12. Mai 1888.

Vorwort.

Unter allen Pflanzenfamilien hat den verewigten Göppert bei seinen vielseitigen und umfassenden Studien keine so andauernd beschäftigt, wie die der Nadelhölzer und keiner hat er dabei eine so lebendige innere Theilnahme zugewendet, als dieser. Ich höre ihn noch, so viele Jahre auch darüber hingegangen sind, bei einem Gange durch den botanischen Garten über „die geliebten Coniferen“ sprechen, und wie er die lebenden liebevoll pflegte und ihr Gedeihen verfolgte, so führte er den Besucher gern zu dem durch ihn erhaltenen riesigen Stammrest von *Cupressinoxylon Protolarix* von Laasan hin, welcher eine Hauptzierde der palaeontologischen Aufstellung im Breslauer botanischen Garten bildet. Funde wie dieser, Stamm- oder Wurzelstücke ohne Blätter, Blüthen oder Früchte hatten ihn schon früh veranlafst, den inneren Bau des Holzes aus den verschiedenen Gruppen der Nadelhölzer vergleichend zu untersuchen und die Ergebnisse in der 1841 erschienenen Abhandlung „De Coniferarum structura anatomica“ niederzulegen, während er eine umfassende Anwendung auf die Bestimmung fossiler Coniferenhölzer in der „Monographie der fossilen Coniferen“ (1850) machte. Noch heut, nach vierzig Jahren, in denen unsere Anschauungen auf so manchem Gebiete der Pflanzenkunde — vorweltlicher wie lebender — eine völlige Umwälzung erfahren haben, sind die fünf, oder, wenn man die beiden Unterabtheilungen der

Pinusform besonders zählt, sechs Formen des inneren Baues der Nadelhölzer als die naturgemäfsesten anerkannt, so schätzbare und eingehende Untersuchungen über diesen Gegenstand seitdem von verschiedenen Seiten gemacht worden sind. Dies allein würde bei dem bedeutenden Antheil, welchen die Nadelhölzer an der Zusammensetzung der Floren fast aller Formationen gehabt haben und bei der Häufigkeit ihrer Erhaltung als blofse Stamm-, Ast- oder Wurzelhölzer hinreichen, um, trotz der unläugbaren Mängel bei Aufstellung und Abgrenzung der Arten, Göppert's Namen eine ehrenvolle Stelle in der Geschichte des Pflanzenreichs zu sichern. Aber unermüdlich war derselbe auch ferner bestrebt, unsere Kenntnifs dieser merkwürdigen Familie zu erweitern, wie zahlreiche Beiträge in der Preisschrift über die Bildung der Steinkohle, in der Flora des Übergangsgebirges, der Flora der permischen Formation, der Bernsteinflora und in vielen zerstreuten, bis in seine späteren Jahre reichenden Aufsätzen beweisen.

Gegen das Ende seines Lebens endlich beschäftigte ihn der Gedanke, unsere Kenntnisse auf diesem Gebiete in einer Monographie der fossilen Coniferenhölzer, namentlich der palaeozoischen Formationen, zu einem Ganzen zu vereinigen. Als einen Vorläufer derselben veröffentlichte er, ein überaus glücklicher Gedanke, sein „Arboretum fossile, eine Sammlung von Dünnschliffen fossiler Coniferenhölzer, namentlich der palaeozoischen Formationen", welche jedem die Möglichkeit bietet, durch eigene Beobachtung sich ein Urtheil über die darin enthaltenen Arten zu bilden und sie bei Vergleichung mit anderen, namentlich neu aufgefundenen zu Rathe zu ziehen, und bald danach die „Revision seiner Arbeiten über die Stämme der fossilen Coniferen, insbesondere der Araucariten, im botanischen Centralblatt von Uhlworm für das Jahr 1881".

Die beabsichtigte Monographie selbst war schon soweit vorbereitet, dafs ihr Erscheinen in dem Beiblatt zum Arboretum fossile (S. 2 Anmerkung) angekündigt werden konnte. Leider ist es dem Verfasser nicht mehr vergönnt gewesen, dieselbe zu vollenden und nach seinem, am 18. Mai 1884 erfolgten Tode hat es nicht gelingen wollen, aus den hinterlassenen Papieren das Werk herzustellen. Bei der Mehrzahl der Arten, welche grofsentheils in der Folge, wie in der „Revision seiner Arbeiten über die Stämme fossiler Coniferen", aufgeführt werden, fand sich wenig

mehr vor, als die schon aus anderen Schriften bekannten Diagnosen mit den Citaten, Angabe des Vorkommens und der Fundorte, zuweilen noch einzelne Bemerkungen über die Erhaltungsart und über besonders bezeichnende Artmerkmale. Nur bei einer kleineren Zahl war die genauere Kenntnifs der Art durch neue Abbildungen des anatomischen Baues gefördert und es schien doch wünschenswerth, diese Beiträge nicht verloren gehen zu lassen. Andererseits ist die Stellung von Interesse, welche Göppert zuletzt gegenüber dem bedeutendsten Fortschritt eingenommen hat, welchen die Beurtheilung fossiler Coniferenhölzer durch den von Grand' Eury und B. Renault geführten Nachweis erfahren hat, dafs ein erheblicher Theil derselben von Cordaiten herstamme. Es ist wahr, Göppert nahm nicht jede Neuerung ohne viele Prüfung als eine Verbesserung auf; er hielt fest am Alten, so lange das Neue nicht erwiesen oder doch durch überwiegende Gründe gestützt war — ein zwar nicht für den raschen, aber gewifs für den stetigen Fortschritt der Wissenschaft richtiger Grundsatz — hier aber hat er drei, noch im Arboretum fossile und in der „Revision“ unter Araucarites stehende Arten zu der Gattung Cordaites gebracht. Diese und die oben bezeichneten Arten sind im Folgenden behandelt.

Um dieser Arbeit ihren ursprünglichen Charakter möglichst zu wahren, habe ich Gattungs- und Artnamen, wie sie von Göppert zuletzt angenommen worden waren, unverändert beibehalten, ebenso die Diagnosen mit geringen, fast nur die Fassung betreffenden Änderungen. In demselben Sinne habe ich, wo ich die im Nachlafs vorgefundenen Figuren durch noch naturgetreuere zu ersetzen versucht habe, dazu nur solche Schliffe benutzt, welche von Göppert sicher der jedesmal behandelten Art zugerechnet worden waren. Es waren dies namentlich die Dünnschliffe und Stücke seiner früheren Sammlung, grofsentheils noch eigenhändig von ihm bezeichnet, welche sich gegenwärtig im mineralogischen Museum der Universität Breslau befinden und deren Benutzung mir durch die Güte des Herrn Geheimrath Römer in so zuvorkommender Weise ermöglicht worden ist, dafs ich ihm dafür zu grofsem Danke verpflichtet bin; ferner die Dünnschliffe in Göppert's Handexemplar des Arboretum fossile, welches ich der besonderen Güte seiner Tochter verdanke und in zwei weiteren Exemplaren derselben Sammlung aus der

Werkstatt von Voigt und Hochgesang in Göttingen. Die dabei gemachten Beobachtungen habe ich bei den einzelnen Arten unter der Überschrift: „Zur Erklärung der Figuren“ angeschlossen, welche als eine Ausführung der kurzen, im Nachlafs vorgefundenen Erklärung der Abbildungen angesehen werden können. Ich habe früher auf Wunsch des Verewigten viele Zeichnungen fossiler Pflanzen, namentlich ihrer anatomischen Verhältnisse, ausgeführt und die dabei gemachten Beobachtungen auch wiederholt ihm übergeben, und da beide stets seine Billigung gefunden haben, darf ich wohl annehmen, dafs das auch im vorliegenden Falle geschehen sein würde. Fehler oder Mängel dieser Abschnitte dürfen ihm aber jedenfalls nicht zur Last gelegt werden. Möchte es mir gelungen sein, diese Nachträge noch so zu gestalten, dafs sie des hochverdienten Verfassers nicht ganz unwerth erscheinen, welcher bis in's hohe Greisenalter für die Förderung unserer Kenntnifs der fossilen Flora mit seltenem Erfolg thätig gewesen ist.

Breslau, im Februar 1887.

Dr. G. Stenzel.

In Betreff der Abgrenzung des zu behandelnden Gebietes bemerkt Göppert in der Einleitung, dafs er Dawson's *Prototaxites* nicht für eine Conifere halten könne, sondern übereinstimmend mit Carruthers zu den Algen zähle. Nur in der Form von Abdrücken, heifst es, hatten wir bisher Anzeichen von der Existenz der Algen in jenen frühen Epochen unseres Erdballs, der silurischen und devonischen Formation. Noch war es nicht gelungen, versteinte Reste von Algen zu finden, welche Art der Erhaltung bei der für diese Verhältnisse so ungünstigen Beschaffenheit der die Algen zusammensetzenden Substanz, wie ja leicht ersichtlich, nur äufserst selten eintreten kann. Müssen doch hierzu ganz besonders günstige Umstände zusammentreffen bei der leicht zersetzbaren, von aufsen bis ins Innere hinein gleichmäfsig zelligen, durch keine Lagen gröfserer Dichtigkeit durchsetzten Substanz dieser Organismen. Eine Ausfüllung der Caulome wird noch seltener eintreten können, da eine, den Fäulnifsprozefs der inneren Schichten überdauernde Rinde, wie sie besonders den Dikotyledonen zukommt, hier völlig fehlt, welche die Einführung der mineralischen Ausfüllungsmasse nach erfolgtem Ausfaulen des inneren Gewebes ermöglichte.

Bei allen diesen Unwahrscheinlichkeiten für die Erhaltung der Algen in dieser Form ist es ganz besonders interessant, ein Vorkommen versteinerter Seealgen mit völlig erhaltener Struktur constatiren zu können.

Dawson entdeckte in den pflanzenführenden devonischen Schichten von Gaspé in Unter-Canada versteinte holzartige Massen, welche er für Coniferen, und zwar wegen der Streifung der Zellen, für taxusartige hielt und als *Prototaxites Logani* beschrieb.

Gegen diese Bestimmung erhebt sich Carruthers und meint hier wegen des Mangels der Markstrahlen — die Dawson in einzelnen radialen Sprüngen im Holz angedeutet wissen will — und dem damit zusammenhängenden Mangel jeglicher Anordnung der Holzzellen zu radialen

Reihen, wie sie sonst den Coniferen durchweg zukomme, dazu wegen der aufserordentlich mächtig entwickelten Intercellularsubstanz das Caulom einer Alge vor sich zu sehen, welche er als *Nematophycus Logani* bezeichnet.

Nach Einsicht der mir von Herrn Dawson gütigst mitgetheilten Specimina, wie der in Göttingen bei Voigt und Hochgesang hergestellten ausgezeichneten mikroskopischen Präparate, welche mit den von Carruthers gegebenen Abbildungen ganz übereinstimmen, kann ich diesem nur beipflichten. Wenn Dawson unter Anderem die bedeutende Stärke der aufgefundenen Stammstücke von 2—3′ im Durchmesser betont, so möchte ich doch an den relativ enormen Durchmesser der jetzt lebenden *Macrocystis*-Arten erinnern.

In dem systematischen Theile des Werkes werden von Göppert, abweichend von der „Revision seiner Arbeiten über die Stämme der fossilen Coniferen *Araucarites Ouangondianus*, *Ar. Brandlingii* und *Ar. medullosus* zu der Gattung *Cordaites* gebracht; ich habe geglaubt an *Cord. Brandlingii* noch den davon kaum zu trennenden *Ar. Thannensis* anschliefsen zu müssen. Dann folgen die Gattungen *Araucarites*, die gewifs mit Recht aufrecht erhaltene Gattung *Protopitys*, dann *Pitys* und endlich *Pinites*.

Nur von der Gattung *Cordaites* sind im Folgenden alle von Göppert hier zum ersten Male zu dieser Gattung gebrachten Arten aufgeführt; bei den Gattungen *Araucarites* und *Pinites* nur diejenigen, deren Kenntnifs durch die gebrachten Nachträge in etwas vervollständigt werden konnte.

I. Cordaites Grand' Eury[1]).

Trunci medulla amplissima intervallis transversis divisa, ligni stratis structura Araucariarum viventium et fossilium cincta. Folia spiraliter disposita lato-linearia, basi subconstricta sessilia, apice obtuse rotundata, integra, nervis parallelis percursa. Flores dioeci.

Cordaites Ouangondianus Göpp. (Dawson sp.).

C. truncis ramosis, medulla amplissima cavernosa, dissepimentis transversis incompletis septata, ligni stratis concentricis distinctis, tracheidis amplis punctatis, punctis 3—5-serialibus alternantibus, contiguis hexagonis, poris oblongis; radiis medullaribus 1—3-serialibus [simplicibus, v. compositis 2—3-serialibus] e pluribus [10—14] cellulis superpositis formatis.

Dadoxylon Ouangondianum J. W. Dawson, Canadian Naturalist VI, 1861, p. 165, Fig. 1—4. — On the Flora of the Devonian Period in North-Eastern America in: Quat. J. Geol. Soc. Vol. XVIII, Lond. 1862, p. 306. — Acadian Geology, 2. Ed. 1868, p. 535, Fig. 185. — The fossil plants of the Devonian and Upper-Silurian formations of Canada I, 1871, p. 12, Tab. 1, Fig. 1—4; 15 (vgl. p. 21, *Sternbergia*; dgl. II, 1882, p. 102, 124).

Araucarites Ouangondianus Göpp. in Revision der fossilen Coniferen S. 10.

Mittlerer devonischer Sandstein (*Dadoxylon*-Sandstein) von St. John und Lepreau in Neu-Braunschweig. Auch die im Oberdevon von Scaumenac-Bay gefundenen Stücke von *Sternbergia* mögen nach Dawson von *Dadoxylon Ouangondianum* herstammen (The fossil Flora of the Devon. etc. form. of Canada, II, p. 102, Tab. 24, Fig. 21).

---

[1]) Die Gattung *Cordaites* ist zuerst von Unger aufgestellt worden. Göppert bezeichnet wohl Grand' Eury als deren Autor, weil wir diesem erst die vollständige Kenntnifs derselben verdanken.

Die Stämme mit Jahresringen ähnlichen Kreisen; die Tracheiden mit 3 — 5 Reihen dicht gedrängt stehender, daher sechseckig erscheinender Tüpfel. Ein von Hrn. Dawson mir gütigst mitgetheiltes Bruchstück des Stammes ohne Markcylinder entspricht ganz und gar der von ihm gegebenen Beschreibung und Abbildung. Der Markcylinder ist sehr grofs, gekammert, ähnlich wie der von *Juglans regia*, das sicherste Gattungsmerkmal abgebend. Diese Kammerung wird auf medianen Längsschnitten durch querstreifige, nicht ganz bis in die Mitte reichende Vorsprünge kenntlich.

Sehr passend vergleicht sie schon Dawson mit den kleinen Stämmen, die in der Steinkohlenflora unter dem Namen *Sternbergia* oder *Artisia* bekannt und mit *Yucca* oder *Dracaena* verglichen worden sind, welche aber schon Dawson als die Achsen von fossilen Stämmen, unter anderen von Araucariten, ansieht. (On the varieties and mode of preservation of the fossils known as Sternbergiae. Canadian Naturalist for Oct. 1861, Fig. 1 — 7.) Er hat also lange vor Renault und Grand' Eury diesen Zusammenhang erkannt, was übrigens Grand' Eury in der Flore carbon. de la Loire etc. p. 246 auch anführt. Diesem kommt indessen das Verdienst zu, die ganze Pflanze aus ihren fossilen Resten im Zusammenhange restaurirt zu haben.

Ohne Zweifel können wir die Art zu *Cordaites* Grand' Eury bringen, da ihre Merkmale mit denen dieser Gattung übereinstimmen, bis auf die Gegenwart der concentrischen Holzkreise im Stamme, deren Fehlen bei *Cordaites* der Autor dieser Gattung ausdrücklich betont. Doch können zufällige Umstände die Erhaltung dieses Merkmals bedingen, welches bei allen Araucarien, lebenden wie fossilen, schwerlich in Abrede gestellt werden kann, wie ganz im allgemeinen bei den fossilen Coniferen concentrische, gewöhnlich Jahresringe genannte, Lagen der Holzzellen ebenso vorhanden sind, wie bei den lebenden, aber ebenso mannigfach schwankend in ihrer Ausbildung, wie bei diesen. Diese Schwankungen aber scheinen weniger abhängig von Gattungsdifferenzen zu sein, als vielmehr von äufseren Umständen, wozu bei den fossilen noch der Einflufs des gesammten Versteinerungsprozesses kommt. Hier soll nur angeführt werden, was für die Unterscheidung der Arten der palaeozoischen Coniferen erforderlich scheint.

Gewöhnlich geht das dünnwandige Frühlingsholz in das dickwandige Herbstholz allmählich über, während letzteres mit scharfer Grenze gegen das Frühlingsholz des nächstäufseren Jahresringes abgesetzt ist. Nur ist bei den Araucarien die Grenze zwischen den einzelnen Holzkreisen mitunter schwer zu erkennen, da die Reihen verdickter Zellen nur in spärlicher Weise markirt sind; letztere fehlen aber durchaus nicht gänzlich, wie Schacht einst behauptete, weder im Stamm noch in der Wurzel.

Nicht immer ferner gehen die Frühlingszellen allmählich in die dickwandigen Herbstzellen über; bei einigen Cupressineen scheint dieser allmähliche Übergang zu fehlen, wie ich solches auch bei fossilen, z. B. *Cupressinoxylon Protolarix* beobachtet habe. Auch bei Abietineen kommt Ähnliches in Folge besonderer Wachsthumsverhältnisse der betreffenden Stämme vor, besonders dann, wenn der ganze Jahresring nur eine geringe Entwickelung erfahren hat und nur aus wenigen Zellreihen besteht. In diesem Falle folgen in demselben Jahresringe weitlumige, dünnwandige Frühjahrs- und englumige, dickwandige Herbstzellen ohne Vermittelung auf einander. Dieses Verhalten beobachtete ich an einem $\frac{1}{4}$ Meter hohen Stämmchen von *Pinus Abies* L., welches ich etwa 100 Fufs unter dem Gipfel der sonst baum- und strauchlosen Schneekoppe in 4800 Fufs Höhe sammelte. Die Jahresringe bestehen hier aus 3—6 radial auf einander folgenden Zellreihen; ein allmählicher Übergang der weitlumigen Frühjahrszellen in die englumigen Herbstzellen ist selten zu beobachten.

Zwischen diesen Extremen liegen nun viele Mittelstufen, woraus denn hervorgebt, ein wie geringer Werth auf die Beschaffenheit der Jahresringe bei Unterscheidung der Arten zu legen ist.

Wie im Holz des Stammes, so ist auch in dem der Wurzel der meisten Coniferen dieses Verhalten der Jahresringe sehr schwankend und ebenso der allmähliche oder aber unvermittelte Übergang von Frühjahrs- zu Herbstholz von äufseren Verhältnissen durchaus abhängig.

Cordaites Brandlingii (Lind. et Hutt. sp.). (Taf. I, Fig. 1—4.)

C. truncis ramosis, medulla larga, ligni stratis concentricis obsoletis, tracheidis amplis punctatis, punctis 2—4-, rarius 1- vel 5-serialibus, alternantibus contiguis, poris oblongis; radiis medullaribus uniserialibus aut raro biserialibus e cellulis 2—40 superpositis formatis multipunctatis punctis areolatis.

Pinites Brandlingii Lindley et Hutton, foss. Flora of Great-Brit. I, tb. 1. — Witham, observations up. foss. veg. p. 31, tb. 4, fig. 1—4 („Wideopen tree"); Witham, intern. struct. p. 73, tb. 9, fig. 1—6; tb. 10, fig. 1—6; tb. 16, fig. 3. — Unger, Chloris prot. p. 30.

Araucarites Br. Göpp. in Index palaeont. in Bronn, Gesch. d. Nat. III, 2, S. 42 (*Ar. Brandlingii* und *Ar. Sternbergii*). — Tchihatcheff, voyage dans l'Altai p. 389. — Monogr. d. foss. Conif. S. 232, Taf. 39, 40, 41, Fig. 1—7. — Fossile Flora d. perm. Form. S. 255. — Arboretum foss. p. 4, N. 25—27. — Revis. d. foss. Conif. S. 12. — Germar, Petref. lithantr. Wettin. etc. Fasc. V, p. 49, t. 21, 22. — Gutbier, in Geinitz, Verstein. d. Dyas, II, S. 23.

Dadoxylon Br. Endl. syn. Conif. p. 299. — Unger, gen. et spec. plant. foss. p. 379. — Grand' Eury, flore carbonif. du dépt. de la Loire p. 264.

Araucarioxylon Br. Kraus, in Schimper, traité de Pal. II, p. 382.

[*Cordaioxylon Br.* Felix, verstein. Hölzer v. Frankenb. in Sachs., in Sitzungsber. d. natf. Ges. Leipzig, IX. Jahrg. 1882, S. 6. — *C. Brandlingii* und *C. Credneri*, Morgenroth, fossile Pflanzenreste v. Kamenz in Sachsen, S. 38. 39.]

In grofsen Stämmen bekannt aus der Kohlenformation von New-Castle, des Loire-Departements, von Saarbrücken, von Wettin bei Halle a. S., von Chomle in Böhmen und von Waldenburg in Schlesien; aus der permschen Formation von Zwickau und Halle. Nach Felix auch bei Frankenberg in Sachsen, Altenberg bei Chemnitz, vom Potzberg bei Wolfstein in der Rheinpfalz, nach Morgenroth bei Kamenz in Sachsen und bei Ilmenau in Thüringen.

Ich folge hier dem Vorgange von Witham und Grand' Eury, insofern ich nur des Baues der Tracheiden wegen die Art annehme; wie

es sich aber mit der für die Bestimmung der Gattung so wichtigen Gröfse und Beschaffenheit des Markcylinders verhält, konnte ich nicht ermitteln, da sich derselbe in meinen, 1 — 3′ dicken, durch sehr dunkelgefärbtes kieselsaures Eisen versteinten Stämmen nicht erkennen liefs.

Zwischen dieser Art und *Dadoxylon Acadianum* unterscheidet Grand' Eury (l. c. p. 264) noch *D. intermedium*, welches ihm selbst aber nur als eine Mittelform oder als eine Übergangsform erscheint.

Zur Erklärung der Figuren.

Taf. I, Fig. 1. Das von Göppert mit Bestimmtheit zu dieser Art gezogene fossile Holz von Altwasser bei Waldenburg in Schlesien, von welchem auch die Dünnschliffe des Arboretum fossile entnommen sind, ist durch ausgeschiedene Kohle dunkel gefärbt und vor oder bei der Versteinerung durch die Einwirkung des Wassers stark angegriffen worden. Die Wände der Tracheiden sind meist nur noch ganz dünn, daher selbst an den besser erhaltenen Stellen in einer, auch bei anderen Arten sich oft wiederholenden eigenthümlichen Art Sförmig verbogen (*tr*, *tr′*), was sich durch einen, schief gegen die Richtung der Markstrahlen wirkenden Druck erklären läfst. Ein solcher mufste bei dem liegenden Stamm auch durch das Gewicht der oberen Theile auf die unteren ausgeübt werden, durch die darüber gelagerten Massen aber auf alle Theile des Stammes, welche nicht gerade oben oder unten lagen, wo dann der Druck parallel den Markstrahlen, oder gerade seitwärts, wo er rechtwinklig auf diese traf, und selbst an diesen Stellen konnte eine kleine Veränderung in der Druckrichtung während des Zusammensinkens des Stammes leicht ähnliche Erscheinungen hervorrufen. Weniger verbogen sind die Markstrahlen (*m*, *m′*, *m″*) und wo die Tracheiden sich an diese anschliefsen, kann man deren radialen Durchmesser noch ziemlich gut, durchschnittlich auf $0{,}07^{mm}$ schätzen.

Bei der geringen Dicke der Tracheidenwandungen treten schon im Querschnitt die Tüpfel als kleine, knollenförmige Anschwellungen aus denselben hervor, mit fast ebenso verbogenem Umrisse, wie die Tracheiden und nur selten mit deutlichem, scharf umgrenzten Tüpfelraum. Schon hier sieht man sie selten einzeln, meist 2 oder 3 (Fig. 1, *t*, *t*), sehr sel-

ten 4 neben einander. Ähnlich zeigen sich auch auf dem radialen Längsschliff die etwa 0,013 — 0,014^{mm} hohen, nicht selten aber noch kleineren Tüpfel[1]) fast gleich häufig in 3 (Fig. 2, *t*, *t*) wie in 2, selten in einer oder in 4, immer alternirenden Reihen; dicht gedrängt, so dafs sie meist einen scharf sechseckigen Umrifs haben. Ziemlich verschieden erscheint auch der innere Porus. Er ist zwar stets elliptisch, oft aber so schmal, dafs er faſt linealisch wird; dabei bald so schief gestellt, dafs er unter einem halben Rechten geneigt ist (Fig. 2, *p*) und dann die Tüpfelspalte der anliegenden Tracheidenwand fast rechtwinklig kreuzt; bald wenig geneigt, ja fast wagerecht. Ähnliche Schwankungen beobachtet man auch bei anderen Arten, und da die grofse Verschiedenheit in der Richtung der Tüpfelspalten bei nahe an einander in derselben Tracheidenwand liegenden Tüpfeln nicht wohl durch Veränderungen beim Versteinerungsprozefs erklärt werden kann, so wird deren Werth für die Unterscheidung der Arten mindestens sehr zweifelhaft.

Die Markstrahlen sind sehr zahlreich; am häufigsten sind sie im Querschnitt des Stammes nur durch zwei Tracheidenreihen getrennt (Fig. 1, *m'* — *m''*), weniger häufig schon durch 3 — 5, selten durch 7 (*m* — *m'*). Sowohl der radiale wie der tangentiale Längsschnitt zeigen die einfachen Markstrahlen im Vergleich zu früheren Angaben überraschend hoch, die Mehrzahl 8 — 12, nicht wenige darüber, bis 40 Stockwerke hoch. Die einzelnen Zellen dagegen sind niedrig, ihr Lumen nicht viel mehr als $1\frac{1}{2}$ mal so hoch, als einer der gröfseren Tüpfel der Tracheidenwand, ein Verhältnifs, welches ziemlich beständig ist und vielleicht zur Unterscheidung der Arten etwas beitragen kann. So ist, wenn man

---

[1]) Die hier, wie im Folgenden angeführten Mafse der Tüpfel geben die Höhe derselben, nicht ihre Breite an, weil die letztere an den von mir untersuchten Hölzern noch viel gröfseren Schwankungen unterlag, als die Höhe. Bei sechseckigen Tüpfeln wird daher die von der Mitte der unteren bis zur Mitte der oberen Seite gemessene Höhe nur annähernd $\frac{6}{7}$, genauer schon $\frac{13}{15}$ der von Ecke zu Ecke gemessenen Breite betragen oder diese $\frac{7}{6}$ der Höhe. Ich habe ferner, um bei der verschiedenen Gröfse der Tüpfel, oft in derselben Reihe, brauchbare Werthe zu finden, da, wo sie einander oben und unten berührten oder gar plattgedrückt hatten, die Höhe einer Reihe von Tüpfeln gemessen und daraus den Durchschnittswerth berechnet. Meist sind zu diesem Zweck viele Reihen aus verschiedenen Stellen der mir zugänglichen Schliffe gemessen und von den am besten erhaltenen der Mittelwerth genommen worden.

für die hier behandelten Cordaiten- und Araucaritenhölzer mittlere, abgerundete Werthe zu Grunde legt, bei:

	Höhe eines Tüpfels	Höhe einer Markstrahlzelle	Tüpfel auf die Höhe einer Markstrahlzelle
Cord. Brandlingii	0,013mm	0,02mm	$1\frac{1}{2}$
Ar. Thannensis	0,014 „	0,026mm	$1\frac{4}{5}$
Cord. medullosus	0,013 „	0,023 „	$1\frac{4}{5}$
Ar. Ungeri	0,01 „	0,06 „	6
Ar. Beinertianus	0,01 „	0,06 „	6
Ar. Tchihatcheffianus . . .	0,0085mm	0,03 „	$3\frac{1}{2}$
Ar. carbonaceus	0,014 „	0,02 „	$1\frac{1}{2}$
Ar. Elberfeldensis	0,011 „	0,025 „	$2\frac{1}{4}$
Ar. cupreus α) Ural. . . .	0,0125 „	0,025 „	2
„ „ *β) Mansf.* . . .	0,0125 „	0,03 „	$2\frac{1}{2}$

Die verhältnifsmäfsige Höhe der Tüpfel zu der der Markstrahlzellen hält mit der letzteren ziemlich gleichen Schritt und die aufgeführten Arten lassen sich danach in 4 Gruppen bringen; indem auf die Höhe einer Markstralzelle kommen bei

I. *Ar. carbonaceus* und *Cord. Brandlingii* : $1\frac{1}{2}$ Tüpfel,

II. *Ar. Thannensis, Cord. medullosus, Ar. Elberfeldensis, Ar. cupreus* : 2 Tüpfel ($1\frac{4}{5}$ — $2\frac{1}{2}$),

III. *Ar. Tchihatcheffianus* : $3\frac{1}{2}$ Tüpfel,

IV. *Ar. Ungeri, Ar. Beinertianus* : 6 Tüpfel.

Natürlich wird es, wie bei jedem zuerst zur Artumgrenzung benutzten Merkmale, erst noch umfangreicher vergleichender Untersuchungen bedürfen, um seinen Werth und das Mafs seiner Verwendbarkeit festzustellen; so manche Berichtigungen aber auch die angeführten Zahlen erfahren mögen, so ist ihr Unterschied doch so grofs, dafs man wohl erwarten darf, dafs manche derselben der Ausdruck für beständige Verhältnisse sein werden.

Schwer war es, wie leider nur zu oft, über die den Markstrahlen eigenthümliche Tüpfelung ins Klare zu kommen. Zuweilen schienen die gewöhnlichen Tüpfel der Tracheiden durch (Fig. 2, *t'*); meist liefsen sich etwas kleinere, länglichrunde, schief gestellte Höfe erkennen, eine Reihe

in jeder Markstrahlzelle, 3—4 auf die Breite einer Tracheide (Fig. 2, *mt*, Fig. 3), seltener 2 Reihen, wie Fig. 4, *mt*. Doch sind diese Höfe theils so unklar begrenzt, theils von so verschiedener Gestalt und Gröfse, und neben ihnen sonst ähnliche, ganz kleine Ringe, dafs ihre Natur immerhin zweifelhaft bleibt. Sicher als Markstrahltüpfel kann man wohl nur die kleinen rundlichen Poren (Fig. 2, *mt'*) ansehen, mit undeutlich umgrenzten hellen Höfen, ähnlich den weniger gut erhaltenen Markstrahltüpfeln von *Araucarites Thannensis* (Fig. 8, *mt*).

Morgenroth trennt in seiner oben angeführten Abhandlung über die fossilen Pflanzenreste im Diluvium von Kamenz in Sachsen von *Cordaioxylon Brandlingii* mit meist in 3, seltener in 2 oder 4 alternirenden Reihen stehenden Tüpfeln, welche durchschnittlich nur 0,0172^{mm} im Durchmesser haben, und mit häufiger zusammengesetzten Markstrahlen, Hölzer mit verhältnifsmäfsig engen Tracheiden, mit fast stets zweireihigen, durchschnittlich 0,0185^{mm} breiten Tüpfeln und meist einreihigen, doch auch an beliebigen Stellen zweireihigen Markstrahlen und bezeichnet diese als *Cord. Credneri*.

Dafs bei den lebenden Nadelhölzern der Tüpfeldurchmesser eine gewisse Beständigkeit zeigt, geht schon aus den Untersuchungen von H. Mohl (Botan. Zeitung 1862, Sp. 235) hervor und es kann dieselbe gewifs für die Erkennung verschiedener Arten vorweltlicher Nadelhölzer um so werthvoller sein, als die Zahl der für jede Art beständigen Merkmale eine so aufserordentlich geringe ist. Leider ist die Gröfse der Tüpel bei den fossilen Hölzern, selbst bei einem und demselben Stücke gröfseren Schwankungen unterworfen, als es wohl bei den lebenden der Fall war. Sicher ist, dafs die Tüpfelhöfe oft nicht bis an den ursprünglichen Rand erhalten sind, wie die zerstreuten kleinen Tüpfel von *Cordaites medullosus* (Taf. II, Fig. 24); von *Araucarites cupreus* (Taf. IX, Fig. 68, *t'*); von *Pinites Conwentzianus* (Taf. XII, Fig. 98, *t''*) zeigen; aber selbst sechseckig abgeplattete Tüpfel sind nicht selten durch helle oder undurchsichtige schwarze Streifen getrennt, innerhalb deren man die ursprüngliche Grenzlinie nicht mehr erkennt. In diesen Fällen kann durch eine vorsichtige Schätzung der eigentliche Durchmesser oft noch annähernd bestimmt werden. Nicht selten scheinen aber auch gut erhaltene Tüpfel bald durch Quellung des Holzes ausgedehnt, bald durch Schwinden desselben verklei-

nert worden zu sein, so dafs man auch von diesem Merkmal für die Unterscheidung der Arten nur mit grofser Vorsicht wird Gebrauch machen können. Der von Morgenroth gefundene Unterschied scheint dazu zu gering zu sein. Abgesehen von dem nicht unerheblichen Gröfsenunterschied in verschiedenen Theilen des Baumes, wie Ästen, Stamm und Wurzeln und Morgenroth nimmt wenigstens von einem erheblichen Theil der von ihm zu *Cord. Credneri* gezogenen Hölzern an, dafs sie vielleicht Wurzelhölzer sind — liegt der von ihm zwischen *C. Credneri* und *C. Brandlingii* angegebene Unterschied innerhalb der Grenzen, zwischen denen der Tüpfeldurchmesser auch gleichartiger Theile schwankt. So giebt Mohl an, dafs z. B. im Wurzelholz der Föhre einreihige Tüpfel einen mittleren Durchmesser = 0,011‴ hatten, zwei neben einander liegende zusammen nur = 0,0198‴, also jeder = 0,0099‴; es war also einer der einreihigen Tüpfel $\frac{1}{9}$ breiter, als einer der zweireihigen. Bei *C. Credneri* sind die zweireihigen Tüpfel nach Morgenroth 0,0185^{mm} breit, die meist dreireihigen von *C. Brandlingii* 0,0172, also die ersten noch nicht $\frac{1}{13}$ breiter als die letzteren. Bei den von mir verglichenen Schliffen von Altwasser ist die Höhe der Tüpfel noch geringer; durchschnittlich, wie oben angeführt, nicht über 0,014^{mm}, oft bis 0,013^{mm} und darunter herabgehend, so dafs ihre Zugehörigkeit zu einer anderen Art, als die der beiden von Morgenroth untersuchten schon mehr Wahrscheinlichkeit hat.

Ob die bei *C. Brandlingii* Fel. viel häufiger als bei *C. Credneri* Morg. zusammengesetzten Markstrahlen so beständig mit den etwas kleineren, in der Regel dreireihigen Tüpfeln zusammen vorkommen werden, um darauf einen grofsen Werth zu legen, wird bei der weiten Verbreitung der Art erst durch umfangreiche Untersuchungen festgestellt werden müssen, um so mehr, als die von Morgenroth hierher gerechneten Stücke z. T. zu *Ar. ambiguus* gehören, welchen er mit *C. Brandlingii* vereinigt. Die Stämme, auf deren Bau die Art gegründet ist, *Pinites Brandlingii* With., welche man also doch keinesfalls von derselben ausschliefsen kann, haben nach der ausdrücklichen Angabe Witham's einreihige Markstrahlen.

Auf das augenfälligste Merkmal, die in der Regel bald zwei-, bald drei- bis vierreihigen Tüpfel hat Göppert schon in der für die Kenntnifs der Coniferenhölzer grundlegenden Monographie der fossilen Conife-

ren hingewiesen und die Wahrscheinlichkeit, dafs diese Verschiedenheit auf zwei verschiedene Arten hindeute, eingehend besprochen, ohne dafs Morgenroth, welcher die für beide Formen gegebenen Abbildungen bei seinen beiden Arten anführt, sich veranlafst sieht, dies zu erwähnen. Es wäre das für die bessere Begründung seiner neuen Art um so erheblicher gewesen, als Göppert seine Unterscheidung nicht auf Stücke gründet, welche theils von Stämmen, theils von Wurzeln herrühren, sondern nach Anführung der verschiedenen Zahl der Tüpfelreihen ausdrücklich hinzufügt „ein Moment, das dann in Beziehung auf Unterscheidung der Arten mir wichtig erscheint, wenn von Stämmen gleichen Durchmessers oder gleichen muthmafslichen Alters, wie im vorliegenden Falle, die Rede ist". Trotzdem sind diese Merkmale Göppert zu unsicher erschienen, um auf sie besondere Arten zu gründen. Er hat den in dem Index palaeontologicus a. a. O. aufgestellten *Ar. Sternbergii* schon in der Monographie der fossilen Coniferen wieder mit der von Germar veröffentlichten Form von Halle a. S. unter *Ar. Brandlingii*, wie wir glauben mit Recht, vereinigt.

Wir schliefsen an diese Art, wegen der fast vollständigen Übereinstimmung ihres anatomischen Baues an:

Araucarites Thannensis Göpp. (Taf. I, Fig. 5—10.)

Ar. ligni tracheidis leptotichis punctatis, punctis uni-triserialibus spiraliter dispositis subcontiguis, radiis medullaribus simplicibus (raro compositis), e cellulis 1—25 et pluribus superpositis formatis.

Ar. Beinertianus β. Thannensis Göppert, Arboretum fossile S. 4; N. 13—15.

Kohlenkalk von Thann in den Vogesen.

Die Markstrahlenzellen sind auf ihren radialen Wandungen mit Hoftüpfeln versehen und zwar stehen letztere gewöhnlich zu je zwei über der Breite einer Holzzelle, selten drei oder auch vier.

Organische Substanz ist noch in reichlichem Mafse hier erhalten. Interressant ist bei dieser Art das aufserordentlich häufige Vorkommen von concentrisch gebauten Kieselablagerungen im Innern der Holzzellen.

Von *Araucarites vogesiacus* leicht durch die viel höheren Markstrahlen zu unterscheiden.

Zur Erklärung der Figuren.

Der Querschliff, von welchem Fig. 5 eine der am besten erhaltenen Stellen wiedergiebt, aus Göppert's Sammlung und von diesem selbst bezeichnet, jetzt im mineralogischen Museum der Breslauer Universität, läfst weder mit blofsem Auge noch unter dem Mikroskop Zuwachsstreifen oder Jahrringe erkennen. Die ursprünglich fast quadratischen Tracheiden lassen an den abgerundeten Ecken deutliche Intercellularräume frei. Sie zeigen in ausgezeichneter Weise den Übergang in solche Tracheiden, welche durch schief-seitlichen Druck etwas verbogen (*tr'*), endlich ganz zusammengedrückt sind (*tr''*) und nun scheinbar sehr viel kleinere Zellen mit Sförmig gebogenem, sehr engem Lumen darstellen. Ob aber die jetzt ganz dünnen Wandungen, obgleich sie nach innen meist ganz glatt begrenzt sind, anfänglich nicht erheblich dicker gewesen sind, bleibt immerhin zweifelhaft.

Nur hier und da sieht man zwischen den wenig auseinander weichenden radialen Wänden feine Tüpfelspalten (*t*, *t*), während die Tüpfel auf dem tangentialen Längsschnitt oft ebenso als knollenartige Anschwellungen aus der Tracheidenwand heraustreten (Fig. 9, *t*), wie auf dem Querschnitt von *Cord. Brandlingii.* Auf den radialen Langseiten der Tracheiden stehen die Tüpfel ein- bis zweireihig, selten dreireihig, besonders in den lanzettlich verbreiterten, zugespitzten Enden, gedrängt, einander mehr oder weniger zu regelmäfsigen Sechsecken abplattend. Nicht selten aber stehen die einreihigen Tüpfel so gedrängt übereinander, dafs sie nicht nur oben und unten platt, sondern auch so auffallend in die Breite gezogen sind (Fig. 6), dafs sie einigermafsen an die von *Protopitys Buchiana* erinnern; nur ist hier der innere Porus überall rundlich; und selten nur sieht man eine schmale elliptische Spalte über ihn weglaufen. Bei anderen Tüpfeln wieder ist die ursprüngliche Umgrenzung als ein Netz scharf gezeichneter sechseckiger Maschen erhalten; der erhaltene Theil des Tüpfelhofes füllt die Maschen nicht mehr vollständig aus, sondern liegt als braune Scheibe, mit kleinem, rundlichen Porus in ihrer Mitte, innerhalb derselben, manchmal kaum noch halb so grofs, als der sie umgebende Umrifs (Fig. 7). Dieser braucht nur noch undeutlich zu werden und endlich zu verschwinden — und die Tüpfel zeigen ganz das Bild, wie bei *Cordaites medullosus* (Taf. II, Fig. 23, 24).

Die zahlreichen Markstrahlen sind ziemlich breit (Fig. 5, *m*), fast stets einschichtig[1]) und im Allgemeinen hoch (Fig. 9); einstöckige sind selten, nur etwa der hundertste, dagegen sind zwei-, drei-, vier und fünfstöckige fast gleich häufig, viele bis zwanzigstöckig; nicht wenige gehen darüber hinaus, und hier und da zählt man über 50 Stockwerke. Die Zahl der hohen Markstrahlen ist vielleicht noch gröfser, als es anfangs scheint, weil dieselben an vielen Stellen seitlich zusammengedrückt, ihre Zellen dunkel ausgefüllt von den zusammengedrückten und verbogenen Wänden der angrenzenden Tracheidan schwer zu unterscheiden sind. Die einzelnen Zellen sind etwa 0,026^{mm} hoch; ihre tangentialen Scheidewände senkrecht oder wenig schief nach aufsen geneigt.

---

[1]) Ich wähle diesen Ausdruck für die Zahl der im Markstrahl neben einander liegenden Zellschichten. Auf dem tangentialen Längsschnitt erscheint freilich jede solche Schicht nur als eine Reihe über einander gestellter Zellen und die Markstrahlen werden danach oft als ein-, zwei-, drei- und mehrreihige, als uni-, bi-, tri- v. pluriseriales bezeichnet. Von anderen wird aber, und nicht mit Unrecht, davon ausgegangen, dafs im Markstrahl jeder dieser Zellen eine horizontale oder radiale Zellreihe entspricht und es heifst dann, der Markstrahl bestehe aus so viel Zellreihen, wie im tangentialen Längsschnitt Zellen über einander stehen; auch einfache Markstrahlen würden dann als mehrreihig zu bezeichnen sein, wenn sie mehr als eine Zelle hoch sind. Diese Zweideutigkeit wird vermieden, wenn wir mit Hartig die über einander stehenden Zellreihen als Stockwerke und danach die Markstrahlen als ein-, zwei-, drei- und mehrstöckig bezeichnen. Der für die neben einander liegenden Zellreihen vorgeschlagene Ausdruck „Lager" hat sich vielleicht deshalb nicht allgemein eingebürgert, weil wir bei einem Lager unwillkürlich an eine liegende Schicht denken, während der Ausdruck „Schicht" sich eher auf stehende, neben einander geordnete Platten anwenden läfst. Es würden dann die Markstrahlen sein:

A. Einschichtige (unilaminares), einfache, simplices: aus nur einer Schicht über einander gestellter, horizontaler Zellreihen gebildet;

   a) einstöckige, unistrues: nur eine horizontale Zellreihe;

   b) zwei- und mehrstöckige, bi- v. pluristrues: aus 2 und mehr solchen Reihen zusammengesetzt.

B. Mehrschichtige (plurilaminares), zusammengesetzte, compositi: aus zwei oder mehreren neben einander gestellten Schichten zusammengesetzt, deren jede aus einer oder mehreren über einander gestellten horizontalen Zellreihen besteht;

   a) zweischichtige, bilaminares;

   b) drei- und mehrschichtige, tri- v. plurilaminares.

Auch hier kommen zuweilen Markstrahlen vor, bei denen einzelne Stellen zweischichtig sind, meist nur ein Stockwerk, selten mehrere (Fig. 10), wo durch die verschiedene Höhe, in welcher die abwechselnden Zellen der beiden Schichten liegen, jede Täuschung ausgeschlossen ist, während bei etwas schief getroffenen Markstrahlen wohl durch die zum Vorschein kommenden Seitenwände der Schein zweischichtiger Markstrahlen hervorgerufen werden kann, deren scheinbar doppelte Zellen dann aber neben einander auf gleicher Höhe liegen.

Die Markstrahltüpfel (Fig. 8) zeigen eben so grofse Verschiedenheiten, wie die Tüpfel der Tracheiden, theils nach der Art ihrer Erhaltung, theils nach der Lage der Fläche, in welcher der Schliff sie durchschnitten hat. Das beste Bild ihrer ursprünglichen Beschaffenheit geben wohl die feinen, schief nach links aufsteigenden Spalten mit kleinem, scharf begrenztem Hof (*mt'*); wo der Porus rundlich ist (*mt''*), da ist wohl der Tüpfelkanal nahe am Hofe getroffen worden, während dieser oft allein noch sichtbar ist, bald scharf begrenzt (*mt'''*), bald mehr oder weniger verwaschen. In einem durch eine Markstrahlzelle und eine Tracheide gebildeten Felde steht oft nur ein solcher Tüpfel, nicht selten aber zwei neben einander, doch auch 3—4 in 1—2 Reihen, wie dies bei *C. Brandlingii* die Regel ist.

Auch sonst stimmt der Bau des Stammes von *Ar. Thannensis* mit dem von *Cord. Brandlingii* von Altwasser bei Waldenburg in Schlesien so sehr überein, dafs die geringen oben bemerkten Abweichungen uns nicht bestimmen würden, beide verschiedenen Arten zuzurechnen. Nur das Alter der sie beherbergenden Formationen könnte dagegen angeführt werden. *C. Brandlingii* ist vornehmlich in der obern Kohlenformation und im Rothliegenden gefunden worden, seltener, wie bei Waldenburg, in der älteren Kohlenformation; *Ar. Thannensis* im Culm. Bei der vielfachen Verwandtschaft der Floren dieser ganzen Schichtenreihe würde aber dieser Umstand allein der Vereinigung beider Formen nicht schlechthin entgegenstehen und es würde dann die bessere Erhaltung der letzteren zur vollständigeren Kenntnifs der Art einige erwünschte Beiträge liefern. Das von Morgenroth a. a. O. S. 39 erwähnte Holz von Thann im Elsafs stimmt nach seiner Angabe mehr mit der von ihm als *Cord. Brandlingii* Felix bezeichneten Form überein.

Cordaites medullosus Göpp.

(Taf. I, Fig. 11; Taf. II, Fig. 12—24; Taf. III, Fig. 25, 26.)

C. truncis ramosis, medulla amplissima in trunculis variae aetatis corpore lignoso vix angustiore, transverse septata, ligni stratis concentrisis obsoletis, tracheidis punctatis, punctis 1—2-(3—4)-serialibus alternantibus approximatis v. contiguis parvis rotundatis, radiis medullaribus simplicibus e cellulis plerumque 4—6, rarius 1—18 superpositis formatis.

Araucarites medullosus Göpp., fossile Flora d. perm. Format. S. 259, Taf. LX, Fig. 3—8. — Revis. foss. Conif. S. 16. — Arbor. fossile N. 53—55.

Araucarioxylon medullosum Kraus l. c. p. 383.

Calamitea lineata Cotta, Dendrol. S. 72, Taf. 16, Fig. 1.

Calamites lineatus Sternb. Vers. II, S. 51.

In der permischen Formation bei Chemnitz.

An dem bisher in nur mäfsig dicken, sonst gut erhaltenen Stücken gefundenen Stamm beobachtete ich das Vorkommen von Ästen an mehreren Exemplaren, so an dem in der Flora der permschen Formation Taf. LX, Fig. 5 abgebildeten; ebenso an dem, welches wir jetzt Taf. II, Fig. 13, *a, a* darstellen und bei dem ganz anders gestalteten Fig. 14, *a, a*, bei welchem eine Andeutung einer quirlförmigen Stellung der Äste nicht zu verkennen ist.

Der Markcylinder ist ganz allgemein von ungewöhnlicher Entwickelung, so dafs er dem Durchmesser des ihn umgebenden Holztheiles in der Regel gleichsteht, namentlich bei den kleineren (Fig. 13, *M*; 16 *M*), während er selbst bei gröfseren nicht allzusehr zurücktritt (Taf. I, Fig. 11, Taf. II, Fig. 12, *M—M*). In der Regel ist er durch meist aus Thon bestehendes Bergmittel ausgefüllt, nur selten, wie der umgebende Holzmantel durch Kieselsäure versteint und zeigt dann die der Gattung *Cordaites* nach Renault's und Grand' Eury's Entdeckungen eigenthümliche Querfächerung (Fig. 15, *M*). Bei dieser Art der Versteinerung sind auch wohl noch die grofsen Parenchymzellen des Marks (Fig. 17, *M*) im Zusammenhange mit den anstofsenden Tracheiden des Holzes (*tr*) erhalten. In diesem lassen sich concentrische Kreise oder Jahresringe bei einzelnen

Exemplaren nicht verkennen, bei anderen sind sie nicht zu bemerken und mikroskopisch überhaupt nicht nachzuweisen.

Zur Erklärung der Figuren.

Das Mark besteht aus dünnwandigen, rundlichen, namentlich im mittleren Theil sehr grofsen Parenchymzellen (Fig. 17, *M*), welche bis über 0,1^{mm} im Durchmesser haben. Weiter nach aufsen werden dieselben kleiner (0,05 — 0,03^{mm}) und sind hier auf dem Querschnitt von den innersten Holzzellen nicht sicher zu unterscheiden, weil auch diese an der Grenze des Markkörpers noch nicht radial gestellt sind, sondern erst weiter nach aufsen in diese Anordnung übergehen.

Auf dem Längsschnitt ist das Mark von mehr oder weniger regelmäfsigen, oft mit buntem Chalzedon ausgefüllten Lücken unterbrochen, ohne doch immer zusammenhängende Querscheidewände zu bilden; doch sind die Zellen breiter als hoch und in queren oder schiefen, niemals aber in Längsstreifen erhalten, was immerhin auf die Bildung eines gefächerten Markes hinweist.

Die inneren, das Mark umgebenden Holzzellen, welche, wie schon erwähnt worden ist, noch nicht in radiale Reihen geordnet sind, eine Anordnung, welche in Fig. 17 bei *H* wohl etwas zu sehr hervortritt, sind keine getüpfelten Tracheiden, sondern gleichen sehr fein gestreiften Treppengefäfsen, sind zum Theil vielleicht auch Spiralzellen mit sehr engen Windungen, doch liefs der mir zur Verfügung stehende Dünnschliff kein ganz befriedigendes Bild gewinnen. Indefs dürfen wir wohl hoffen, über den Bau, namentlich der inneren Theile des Stammes von einem der sächsischen Palaeontologen, welchen reicheres Material zu Gebote steht, eine vollständige Darstellung zu erhalten.

Die weiter nach aufsen folgenden Tracheiden des eigentlichen Holzes sind in streng radiale Reihen geordnet (Fig. 17 *tr*, Fig. 18). Sie sind im Querschnitt fast quadratisch, durch radiale Streckung mehr rechteckig, auch stumpf-sechseckig, die gröfseren von einem mittleren Durchmesser von etwa 0,05^{mm} in radialer Richtung, einzelne bis gegen 0,1^{mm}. Sie scheinen wie in eine durchsichtig-amorphe Masse eingebettet zu liegen, indem ihre äufsere Wandschicht mit der der anstofsenden Tracheiden so zusammengeflossen ist, dafs die ursprüngliche Trennungsfläche nur

hier und da durch eine zarte Linie angedeutet ist. Rings um den Hohlraum jeder Tracheide zieht sich aber in annähernd gleicher Stärke eine dünne Schicht, durch scharfe Linien oft so deutlich nach innen und aussen abgegrenzt, dafs sie wohl nicht der Ausfüllung zuzurechnen, sondern als die innerste Lage der dicken Tracheidenwand zu betrachten ist.

Tüpfel sind im Querschnitt nicht deutlich zu erkennen; vielleicht deuten einzelne trübe Flecke zwischen den radialen Tracheidenwandungen (Fig. 18, *t*) ihr Vorhandensein an. Auch die radialen Längsschliffe zeigen nur selten zusammenhängende Tüpfelreihen, eine oder zwei auf einer Tracheidenwand (Fig. 19, *t*, *t'*) zuweilen vielleicht auch drei (*t''*). Doch sind dann die Tüpfel meist nur an den einander zugekehrten Seiten erhalten, nach aufsen aber offen (Fig. 20), indem die äufsere Hälfte abgebrochen oder aufgelöst worden ist. Hier ist ihre Höhe durchschnittlich etwa $0{,}012^{mm}$; doch schwankt sie zwischen 0,011 und $0{,}013^{mm}$ und selbst $0{,}014^{mm}$, indefs möchten diese Verschiedenheiten grofsentheils in der verschiedenen Art ihrer Erhaltung begründet sein. Bei weitem zierlicher sind die ganz vereinzelten oder in kleiner Zahl übereinander gestellten kleinen rundlichen Tüpfel mit kreisrundem oder etwas länglichrundem Porus (Fig. 23, 24). Oft sind dieselben gesprungen oder zerbrochen, bald einander noch berührend, bald durch kleine Zwischenräume getrennt; es macht ganz den Eindruck, dafs die Tracheidenwand bei der Verkieselung stark aufgeweicht, die meisten Tüpfel undeutlich geworden und nur die wenigen, welche in einen festen braunen Stoff verwandelt worden, als zierliche, in der Mitte durchbohrte Scheibchen übrig geblieben seien, bald einander noch berührend, bald auseinander gerückt oder ganz zerstreut. Dafs indefs der kreisrunde Porus kein der Art eigenthümliches Merkmal ist, zeigen hier und da vorkommende Tüpfelreihen, wo derselbe gröfser und länglich rund ist (Fig. 21); selten findet man sogar solche mit spaltenförmigem, von dem der Nachbartracheide gekreuzten Porus (Fig. 22).

Die Markstrahlen sind zahlreich, gewöhnlich nur durch 2—3, selten durch eine, öfter durch 4—9 Tracheidenreihen von einander getrennt, einfach, von verschiedener Höhe; bei manchen Stücken herrschen die vier- bis sechsstöckigen Markstrahlen vor, bei anderen sind die einstöckigen besonders zahlreich (Fig. 25); doch kommen auch höhere (Fig.

26, *m*), bis 18 Stockwerke hohe vor. Die einzelnen, etwa 0,023^{mm} hohen wie breiten Zellen sind oben und unten eingezogen und gegen einander abgerundet, so dafs der Markstrahl im Tangentialschnitt ein fast rosenkranzförmiges Ansehen hat.

II. Araucarites Presl et Göppert.

Truncorum structura fere Araucariarum et Dammararum viventium. Trunci e medulla centrali intervallis non divisa et ligni stratis concentricis plus minus conspicuis v. obsoletis formati. Tracheidae punctatae, punctis 1—4-serialibus spiraliter dispositis. Puncta approximata saepius contigua ac mutua compressione sexangularia vel subcontigua, plerumque nonnisi in parietibus radiis medullaribus parallelis et invicem oppositis obvia, in alteris parietibus rarius obvia et semper minora. Radii medullares simplici rarius duplici cellularum serie formantur, punctati, punctis fere semper annulatis, rarius exannulatis.

Die vorstehende Diagnose ist von der früheren von 1839 kaum abweichend und hat nur eine wesentliche Berichtigung in so fern erfahren, als zufolge neuerer Beobachtungen die Tüpfel auf den Markstrahlen mit einem Hofe umgeben und nicht einfache Tüpfel sind.

a. Devon[1]).

Araucarites Ungeri Göpp. (Taf. III, Fig. 27—35.)

Ar. medulla larga, ligni stratis concentricis vix distinctis, tracheidis pachytichis punctatis, punctis 1—3-serialibus, spiraliter dispositis, radiis medullaribus simplicibus (rarius biserialibus) e cellulis pluribus formatis.

Ar. Ungeri Göpp., Revis. d. fossilen Coniferen S. 10. — Arbor. foss. N. 9—11.

[1]) Zimmermann, Jahrbuch der preufs. geologischen Landesanstalt für 1884, S. LXXI, ist geneigt, den Cypridinenschiefer von Saalfeld dem untersten Culm zuzurechnen.

Aporoxylon primigenium Ung. in Unger und Richter, Beiträge zur Palaeontologie d. Thüringer Waldes, in Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss. (Wien), math.-natw. Cl. 10. Bd. 1855, S. 181, Taf. 13, Fig. 3—11. Kraus in Schimper l. c. p. 385.

Im Cypridinenschiefer, im Bereich der ersten Landflora, bei Saalfeld in Thüringen.

Für diese Art, welche im Bau ihres Holzes ganz von dem Typus der Abietineen ist, wurde wegen des Fehlens der Tüpel auf den Holzzellen bei den von Unger untersuchten Exemplaren von diesem eine eigene Gattung gegründet und diese dem entsprechend *Aporoxylon* genannt. Auch ich konnte bei mehreren mir von Herrn Dr. Richter mitgetheilten Exemplaren dieses merkwürdigen Fossils in der That keine Tüpfel bei den Holzzellen auffinden; bei anderen aber gelang dies (Fig. 30). Fast niemals fehlten sie bei einem jüngeren mit der vielstrahligen Markkrone, wie sie bei Abietineen vorkommt, versehenen Stämmchen (Fig. 27, 28). Die Gattung *Aporoxylon* mufste daher eingezogen werden.

Eine Andeutung von Jahresringen kann man bei diesem Holze in dem zonenweiseneVorkommen radial verkürzter Zellen finden.

Die Markstrahlen sind einreihig, eine bis wenige Zellen über einander.

Zur Erklärung der Figuren.

Die letzte Angabe, sowie eine Vergleichung der in Göppert's Nachlafs enthaltenen Figuren mit den Dünnschliffen im Arboretum fossile N. 9—11 lassen keinen Zweifel darüber, dafs diese wie die damit ganz übereinstimmenden im mineralogischen Museum der Breslauer Universität von Göppert der Charakteristik seines *Araucarites Ungeri* zu Grunde gelegt worden sind. Auf diese allein beziehen sich die folgenden Angaben. Ob sie aber zu derselben Art gehören, wie Unger's *Aporoxylon primigenium*, scheint trotz wesentlicher Übereinstimmung der grofsen Verschiedenheit der Markstrahlen wegen doch nicht ganz sicher zu sein und wird sich nur durch Vergleichung der von Unger benutzten Stücke und Dünnschliffe entscheiden lassen, welche ich leider trotz vielfacher Bemühungen nicht habe erlangen können.

Das Mark des Stammes (Fig. 27, *M*; Fig. 28, *M*) war fast so dick, wie der dasselbe umgebende Holzring (*H*), aber nicht, wie bei den Cordaiten, gefächert. In dem Holz sind unzweifelhafte Zuwachs- oder Jahrringe nicht vorhanden; es finden sich wohl hier und da tangentiale Streifen radial verkürzter Tracheiden, dieselben sind aber meist nach aufsen nicht scharf abgegrenzt, sondern gehen hier eben so allmählich wie nach innen in die weiteren Tracheiden über; auch sind sie nicht durchgehend, sondern verlieren sich nach rechts wie nach links.

Die radialen Reihen der Tracheiden (Fig. 29) keilen sich nicht selten nach aufsen (*tr'*) oder nach innen (*tr''*) aus. Im Querschnitt sind sie quadratisch, die gröfseren etwa 0,03^{mm} breit, öfter noch rechteckig, indem sie von innen nach aufsen etwas gestreckt erscheinen. Innerhalb der oft scharfen Umgrenzungslinie zieht sich meist eine ebenfalls ziemlich scharfe Linie hin, welche wohl eine, nicht eben dicke, äufsere Zellwand begrenzte. Der Innenraum ist entweder ganz dunkel ausgefüllt oder die Mitte wird von einer hellen Lücke eingenommen, welche zuweilen bei ganzen Tracheidenreihen so gleichmäfsig gestaltet und begrenzt ist, dafs sie ganz den Eindruck eines kleinen Lumens macht, welches noch von einer dicken inneren Wandschicht umgeben war, wie dies Unger für sein *Aporoxylon primigenium* a. a. O. Fig. 5 auch annimmt.

Tüpfel sind nur bei wenigen Tracheiden auf den radialen Längswänden mit einiger Sicherheit zu erkennen. Wo aber längere Strecken dieser Wände mit einem regelmäfsigen Netz von sechseckigen dunklen Flecken bedeckt sind, welche durch feine helle Linien gegen einander abgegrenzt werden, wie Fig. 31, und dabei oft in längere, mit einander abwechselnde Reihen geordnet sind, da ist die Ähnlichkeit mit den Tüpfelreihen anderer Araucariten- und Cordaiten-Hölzer so grofs, dafs man die einzelnen Flecke wohl unbedenklich als Tüpfel betrachten kann, auch wenn, was bei der ganzen Erhaltungsweise nicht zu schwer ins Gewicht fällt, ein Porus nirgends zu unterscheiden ist. Unterstützt wird diese Annahme noch durch die, in den tangential durchschnittenen Wänden oft sichtbaren längeren Reihen linsenförmiger dunkler Stellen (Fig. 33, *t*), deren senkrechter Abstand mit dem über einander stehender Tüpfelflecke übereinstimmt, und welche ganz den Reihen von Tüpfelspalten in den längs durchschnittenen radialen Wänden der Araucaritenhölzer gleichen.

Diesen Tüpfeln reihen sich dann ein- oder zweireihig stehende Tüpfel mit schon mehr verwaschenem Umrifs an (Fig. 32, *t'*, *t''*) und an diese die in 2—3 Reihen über die Tracheidenwände zerstreuten dunklen Flecke mit grofsem trüben Hof, wie in der aus Göppert's Nachlafs entnommenen, bei stärkerer Vergröfserung gezeichneten, Fig. 30, bei welcher diese doch noch ziemlich in der Anordnung und gegenseitigen Entfernung stehen, wie bei den vorher bezeichneten Tüpfeln. Diesen schon einigermafsen zweifelhaften Bildungen ähneln endlich mehr oder weniger dunkle, über die Fläche zerstreute Punkte auf trübem, auch wohl mit feinen Sprüngen durchzogenen Grunde, welche sicher nur dem ausfüllenden Kalk angehören. Danach würden die sehr kleinen, nur $0{,}01^{mm}$ hohen Tüpfel in 1—3 Reihen, alternirend, gedrängt oder doch sehr genähert stehen; die mehrreihigen vieleckig, die einreihigen abgerundet (Fig. 32).

Sehr ausgezeichnet sind bei *Ar. Ungeri* Göpp. die Markstrahlen. Mehr als drei Viertel derselben waren einstöckig, nur etwa der siebente Theil zweistöckig, noch nicht halb so viel dreistöckig und nur sehr wenige, unter mehr als hundert nur zwei, vier- und vielleicht sechsstöckig; sämmtlich einschichtig; zusammengesetzte Markstrahlen scheinen nur als unregelmäfsige und mehr zufällige Bildungen vorzukommen, indem sich hier oder da eine einzelne Zelle schief an die Fuge zweier Zellen eines einfachen Markstrahls anlegt (Fig. 35, *m'*). In so enge Grenzen aber die Zahl der Stockwerke eingeschlossen ist, einen um so ungewöhnlicheren Spielraum hat die Höhe der einzelnen Markstrahlzellen. Bei einstöckigen Markstrahlen sind dieselben im Querschnitt, also auf dem tangentialen Längsschnitt des Holzes breit elliptisch, beiderseits spitz (Fig. 33, *m*, *m'*; Fig. 35, *m*), im Durchschnitt etwa $0{,}056^{mm}$ hoch, aber zwischen ganz kleinen, $0{,}04^{mm}$, und grofsen, bis $0{,}08^{mm}$ hohen schwankend. Die wenigen mehrstöckigen Markstrahlen haben meist auffallend hohe und dabei schmale Zellen mit fast rechteckigem Querschnitt, aber an den Fugen doch etwas eingezogen (Fig. 34). Wie der Querschnitt zeigt (Fig. 29, *m*, *m*) sind sie etwa $0{,}08$—$0{,}09^{mm}$ lang, also durchschnittlich nur etwa ein und einhalb mal so lang, wie hoch. Besonders häufig ist es hier, dafs ein- und zweistöckige Markstrahlen zwischen denselben zwei Tracheiden in gröfserer Zahl nahe über einander stehen, wie Fig. 33, *m'*, ja, durch so kleine Strecken der Tracheidenwand getrennt, dafs sie zusammen fast das An-

sehen eines vielstöckigen Markstrahls haben, wie das in ähnlicher Weise auch bei anderen Arten vorkommt; so stellt Fig. 49 auf Taf. 5 ein derartiges Zusammenstofsen über einander stehender Markstrahlen bei *Araucarites Tchihatcheffianus* dar.

Ganz anders ist dies alles bei *Aporoxylon primigenium* Ung. Hier fehlen einstöckige Markstrahlen, welche bei *Araucarites Ungeri* Göpp. die weit überwiegende Mehrzahl bilden, ganz und statt höchstens vierstöckiger sind hohe, bis zwanzigstöckige Regel; dazu sind sie oft auf ziemliche Strecken zweischichtig und wie gewöhnlich aus lauter ziemlich gleich hohen und breiten Zellen zusammengesetzt. Nun ist ja die Höhe der Markstrahlen sehr wechselnd. Zu *Cordaites Brandlingii*, zu welchem Göppert anfangs nur Stämme mit höchstens siebenstöckigen, später bis zehnstöckigen, Markstrahlen rechnete, zählen wir jetzt auch solche mit dreifsig bis vierzig Stockwerke hohen; aber bei den kleinsten Zahlen scheint das Schwanken so grofs nicht zu sein. Einstöckige Markstrahlen sind bis jetzt bei manchen Arten noch gar nicht, bei keiner sonst vorwaltend angetroffen worden. Kommt nun noch die Verschiedenheit in der Zahl der Schichten und in der Gestalt der einzelnen Zellen dazu, so ist der oben ausgesprochene Zweifel, ob *Aporoxylon primigenium* Ung. und *Araucarites Ungeri* Göpp. derselben Art angehören, gewifs gerechtfertigt.

Zusatz.

Die Anführung von *Araucarites Richteri* Göpp. (Unger sp.), = *Dadoxylon Richteri* Unger, in Sitzungsber. der k. k. Akad. der Wiss. zu Wien, Bd. XXXIII, p. 270, Tab. 11, Fig. 6, 8 (soll heifsen p. 230, Tab. II, Fig. 9—11), in Revision d. foss. Conif. S. 10 aus dem Cypridinenschiefer von Saalfeld in Thüringen beruht wohl nur auf einem Versehen. Unger's *Dadoxylon Richteri* stammt aus dem Weifsliegenden und die sowohl im Arboretum fossile N. 12 gegebenen, wie die aus Göppert's Sammlung im mineralogischen Museum der Breslauer Universität allein vorhandenen radialen Längsschliffe haben ein von sämmtlichen Schliffen des sicher aus dem Cypridinenschiefer von Saalfeld herstammenden *Araucarites Ungeri* Göpp. so abweichendes Aussehen, dafs der Fundort des *Araucarites (Dadoxylon) Richteri* im Devon wohl unbedenklich gestrichen werden kann.

b. Culm.

Araucarites Beinertianus Göpp. (Taf. IV, Fig. 36—39.)

Ar. ligni stratis concentricis haud conspicuis, tracheidis amplis punctatis, punctis 1—2-, rarius 3-serialibus spiraliter dispositis approximatis aut subcontiguis rotundatis, radiis medullaribus latis 1-, rarius 2-serialibus e cellulis crassis 1—10, rarius pluribus superpositis formatis.

Ar. Beinertianus Göpp., Monogr. d. foss. Con. S. 233, Taf. 42, Fig. 1—3; Taf. 43, Fig. 1; — Flora des Übergangsgeb. S. 254, Taf. 35, Fig. 1—4; — Revis. d. foss. Con. S. 11; — Arbor. foss. N. 13—15.
Araucarioxylon Beinertianum Kraus in Schimper l. c. p. 381.

Im Kohlenkalk bei Glätzisch-Falkenberg mit *Protopitys Buchiana* Göppert.

Wie schon in der Flora des Übergangsgebirges a. a. O. angeführt ist, findet sich diese, an dem angezeigten Ort aufgefundene Art, wie die mit ihr zugleich vorkommende *Protopitys Buchiana* und *Stigmaria* mitten in dichter, kiesel- und kalkhaltiger Grauwacke in einzelnen Bruchstücken von grauer Farbe, welche sich im Äufseren wenig von denen der *Protopitys* unterscheiden, durch kohlensauren Kalk versteint. In ihnen ist keine Spur einer concentrischen Ablagerung der Holzzellen sichtbar.

Wegen der Undurchsichtigkeit des Versteinerungsmaterials wurde die mikroskopische Untersuchung damals nur an Schliffen bei auffallendem Licht ausgeführt und eine Ansicht des Horizontal- und des Tangential-Längsschliffes nur bei schwacher Vergröfserung gezeichnet (Monogr. d. foss. Conif. Taf. 42, Fig. 2, 3; Flora d. Überg. Taf. 35, Fig. 2, 3), die Ansicht des radialen Längsschnitts (Mon. d. f. C. Taf. 43, Fig. 1; Flora d. Üb. Taf. 35, Fig. 4) durch Behandlung mit Salzsäure gewonnen, die das versteinernde Material auflöste und die organische Faser zurückliefs und bei starker Vergröfserung ($\frac{300}{1}$) gezeichnet. Jetzt gestatten die bei Voigt und Hochgesang hergestellten Dünnschliffe eine genauere Erkenntnifs des anatomischen Baues des Holzes.

Zur Erklärung der Figuren.

Das aus Göppert's Sammlung stammende Hauptstück dieser Art im mineralogischen Museum der Universität Breslau ist ein handbreites flaches Holzbruchstück ohne Mark und Rinde. Dasselbe besteht aus radialen Reihen von Tracheiden (Fig. 36) von sehr verschiedener Gröfse, deren mittlerer radialer Durchmesser etwa 0,05^{mm}, deren tangentialer 0,04^{mm}, ist; aber Reihen weiterer Tracheiden von 0,06—0,08^{mm}, vereinzelt bis 0,10^{mm} wechseln mit mittleren und kleinen von 0,037^{mm} und darunter; namentlich werden die Markstrahlen mehrfach von Reihen auffallend kleiner Tracheiden begleitet. Wo das Holz gut erhalten ist, sind die Tracheiden quadratisch, mit kleinen Intercellularräumen an den Ecken; einige mit stumpf gebrochener Seitenkante, mit scharf begrenztem, oft mit doppeltem Umrifs umzogenen, rundlichen Lumen, daher besonders dickwandig an den Ecken. Vielfach ist aber das Holz ganz verwittert und in ein Haufwerk von Tracheidenwandungen zusammengefallen, von dem ein kleiner Theil Fig. 36 bei *tr* dargestellt ist. Selbst in den besser erhaltenen Theilen sind die Tracheiden meist etwas seitlich (tangential) zusammengedrückt und wo sie noch in ihrer ursprünglichen Lage erhalten sind, doch ihre Wände verbogen. Auch hier sind diese an den Ecken meist noch dick, an den breiten Wänden aber oft nur noch ganz dünn.

Die Tüpfel auf ihren radialen Wänden (Fig. 38) sind fast immer ein- bis zweireihig, selten drei- und vielleicht zuweilen vierreihig; die mehrreihigen wechselständig, wenn auch einzelne, wie das bei anderen Arten ebenfalls vorkommt, neben einander rücken (*t'*). Sie stehen einander nahe; die mehrreihigen namentlich berühren einander fast, sind aber selbst dann kreisrund oder etwas queroval, nur selten platten sie sich gegen einander ein wenig ab. Sie gehören zu den kleinen Tüpfeln, indem ihr Hof nur 0,01^{mm} hoch ist; manchmal beobachtet man die merkwürdige Erscheinung, dafs sie nach dem spitzen Ende einer Tracheide hin an Gröfse abnehmen (*t''*), wenn auch nicht annähernd in dem Grade, wie Eichwald dies bei *Araucarites biarmicus* abbildet[1]). Der innere Porus zeigt sich als eine schmal-lanzettliche Spalte, stets schief, aber

[1]) *Lethaea Rossica*, P. I, p. 242; Tab. XXI, Fig. 2.

bald mehr, bald weniger geneigt, öfter sehr steil, meist von dem Porenspalt der angrenzenden Tracheide gekreuzt.

Nicht so zahlreich wie gewöhnlich sind die dafür sehr breiten Markstrahlen; auf dem Querschnitt durch 1—15 und mehr, durchschnittlich durch etwa 8 Reihen von Tracheiden getrennt (Fig. 36, *m*), sind sie zwar in der Mehrzahl einschichtig (Fig. 39, *m*), aber doch nicht wenige, im Ganzen vielleicht der dritte Theil, ein oder mehrere Stockwerke hoch zweischichtig (Fig. 36 *m*, Fig. 39 *m'*) selten sogar dreischichtig (*m''*). Ihre Höhe ist im Ganzen gering; wenige zwar sind einstöckig, die bei weitem meisten aber nur zwei- bis acht-, auch wohl zehnstöckig; nur auf dem radialen Längsschliff zeigte ein Markstrahl 18 Stockwerke, doch ist eine solche Zählung weniger zuverlässig, weil bei ein wenig schief gehendem Schnitt zwei über einander und nahe hinter einander liegende Markstrahlen scheinbar zusammenfliefsen können.

Ist schon die Breite der Markstrahlen, welche wenig hinter der mittleren Breite der Tracheiden zurückbleibt, eine grofse, so steht die Höhe ihrer einzelnen Zellen in einem noch ungewöhnlicheren Verhältnifs zu der Weite der Tracheiden und der Kleinheit ihrer Tüpfel, etwa wie bei *Araucarites Ungeri* Göpp. Kommen dort, bei der aufsergewöhnlichen Verschiedenheit der Markstrahlzellen auf die Höhe von einer derselben 3—8 Tüpfel, so sind hier die Markstrahlzellen bei einer Höhe von 0,04—0,07^{mm}, ja selbst 0,1^{mm} so hoch wie 4—6, selten bis 9 Tüpfel. Niedrigere Markstrahlzellen sind nicht häufig; auf dem radialen Schnitt scheinen sie, wo derselbe etwas schräg gegangen ist, bei ihrer geringen Breite leicht niedriger, als sie wirklich sind, auf dem tangentialen Schnitt dagegen die seitlich zusammengedrückten zu hoch. Bei einer radialen Länge von 0,12^{mm} würden dann etwa 60 Tüpfel auf die Seitenwand einer Markstrahlzelle kommen, während bei den meisten Arten nur 4—20 auf derselben Platz finden würden.

Danach scheint es wenigstens nicht unwahrscheinlich, dafs die vielen kleinen Ringe mit dunklem Mittelpunkt, welche an manchen Stellen der radialen Markstrahlenwände zahlreich bei einander stehen (Fig. 37, *mt*), von Markstrahltüpfeln herrühren. Dieselben würden dann einen etwas kleineren Hof haben, als die Tracheidentüpfel und einen runden

Porus. Doch sind sie viel zu wenig deutlich, um sie sicher von blofsen Färbungen des Gesteins zu unterscheiden.

Araucarites Tchihatcheffianus Göpp.

(Taf. IV, Fig. 40, 41; Taf. V, Fig. 42—50; Taf. VI, Fig. 51.)

Ar. medulla parca, ligni stratis concentricis distinctis latis v. latissimis, tracheidis punctatis, punctis 1—4-serialibus spiraliter dispositis contiguis, inde hexagonis, radiis medullaribus uni- v. hinc inde biserialibus e cellulis 1—25 superpositis formatis.

Ar. Tchihatcheffianus Göppert in Tchihatcheff, voyage scient. dans l'Altai; Paris 1845, p. 389; pl. 30—35, fig. 14—19, 21, 23. — Mon. foss. Con. S. 235. — Revis. der Conifer. S. 11. — Arboretum foss. N. 22—24.

Dadoxylon Tch. Endlicher, synops. Con. p. 300.

Araucarioxylon Tch. Kraus in Schimper l. c. p. 381.

Am Altai bei Alfonino am rechten Ufer der Inia. Nach Angabe des Finders aus dem älteren Kohlengebirge oder dem Liegenden desselben. In neuerer Zeit wird diese Bestimmung in Zweifel gezogen, da die sonst daher stammenden Petrefacten sogar der Juraformation angehören (Joh. Schmalhausen, Beiträge zur Juraflora Rufslands, mit 16 Tafeln, St. Petersburg 1879). An der Selbständigkeit der Art würde dies zunächst nichts ändern, da sie doch nur als locale Art in Betracht kommt, sonst eigenthümliehe Merkmale nicht besitzt.

Durch Kalk versteint; im Äufseren und nach Art der Erhaltung sehr ähnlich *Araucarites Beinertianus.* Die Stücke zeigen eine auffallende constante Längswellung der Holzfasern, wie man sie unter den lebenden Hölzern häufig bei der Birke findet, bei Nadelhölzern aber nur äufserst selten und dann nur bei sehr schwachen Stämmen auf steinigem Untergrunde.

Jahresringe sind auf dem Querschnitte makro- und mikroskopisch deutlich zu unterscheiden.

Zur Erklärung der Figuren.

Das Mark ist bei dem Stammstück, von welchem Fig. 40 einen Streifen darstellt, leider nicht sicher zu erkennen, an dem vollständiger erhaltenen Stück mit engeren Jahresringen, das daher vielleicht von einem Aste stammt, aber immerhin einen stattlichen Umfang hatte, und von welchem Fig. 41 einen ähnlichen Theil wiedergiebt, war es nur etwa 3^{mm} stark, also ganz ähnlich den jetzt lebenden Nadelhölzern; noch nicht so dick, als durchschnittlich die einzelnen Jahresringe, wodurch es schon von einem grofsen Theil der fossilen Araucaritenhölzer der palaeozoischen Formationen abweicht.

Die scharf begrenzten Jahrringe sind bei dem grofsen Stammstück, welches aufsen ein paar starke Astnarben zeigt (Tchihatcheff, voyage, pl. 30, fig. 14), von einer Breite, wie sie nicht so leicht wieder vorkommen dürfte. Nur die engsten schwanken zwischen $4—11^{mm}$ oder zwischen $7—10^{mm}$ im radialen Durchmesser, die stärksten zwischen 8—11, ja $10—20^{mm}$, so dafs ihre Dicke durchschnittlich zu mehr als 1^{cm} angenommen werden kann (Fig. 40), während sie bei dem gedrungener gewachsenen Stücke (Fig. 41) auf der schmalen Seite durchschnittlich $2\frac{3}{4}^{mm}$, auf der breiteren bis 4^{mm} dick sind. Von diesem scheinen auch die Dünnschliffe entnommen zu sein, welche nur $1\frac{1}{3}—4^{mm}$ breite Jahrringe zeigen.

Der scharfen Begrenzung der Jahrringe bei Betrachtung mit blossem Auge entspricht ein so plötzlicher Wechsel in der Weite der Tracheiden zwischen dem Herbstholz des älteren und dem Frühlingsholz des nächstjüngeren Jahrrings, wie man denselben bei einem lebenden Nadelholz der gemäfsigten Zone nur erwarten kann, weshalb man diese Zuwachsstreifen wohl unbedenklich als Jahrringe bezeichnen kann. Ist die Weite der Tracheiden des Frühlingsholzes an verschiedenen Stellen eine sehr verschiedene — bei den gröfseren kann man den Durchmesser im Durchschnitt zu $0{,}047^{mm}$ annehmen — so ist die Veränderung des radialen Durchmessers von innen nach aufsen in jedem Zuwachsringe ein viel regelmäfsigerer. Unmittelbar an die engen Herbstholztracheiden des letzten Jahrrings (Fig. 42, *h–h*) schliefsen sich nach aufsen mehrmal so weite Frühlingsholztracheiden; meist nicht sogleich die weitesten, sondern

einige Lagen von etwas kleinerem Durchmesser (f'), dann erst die weitesten, jüngeren Frühlingstracheiden (f''), welche den gröfsten Theil des Jahrrings bilden. Nach aufsen gehen diese oft ziemlich rasch in die Mittelbildung zwischen Frühlings- und Herbstholz über, welche ich der Kürze wegen als Sommerholz (s) bezeichnen will, dessen Tracheiden fast durchweg in radialer Richtung merklich zusammengedrückt sind, und mit den ganz plattgedrückten wenigen (1—3) Reihen Herbsttracheiden (h-h) schliefst der Jahrring ab. So hatten bei einigen radialen Reihen eines Jahrrings einen mittleren radialen Durchmesser die Tracheiden:

	a	b
des älteren Frühlingsholzes . . .	0,050^{mm}	0,050^{mm}
des jüngeren Frühlingsholzes . .	0,062	0,060
des Sommerholzes	0,050	0,036
des Herbstholzes	0,031	0,018

Bei den Reihen schmalerer Tracheiden, wie sie oft zwischen den weiteren eingeschaltet sind, haben dagegen, öfter als dies bei den weiteren der Fall ist, schon die innersten Tracheiden des Jahrrings die gröfste Weite. So hatten einen radialen Durchmesser:

die des älteren Frühlingsholzes .	0,052^{mm}
die des jüngeren Frühlingsholzes	0,047
die des Sommerholzes	0,036
des Herbstholzes	0,012

Diese an den verschiedenen Stellen verschiedener Stücke zwar mehr oder weniger ausgeprägte, aber sich immer wiederholende stufenweise, starke Verengerung der Sommer- und Herbsttracheiden und der unvermittelte Anschlufs weiter Frühlingstracheiden ist eine so ausgezeichnete Eigenschaft der vorliegenden Art, dafs wir Göppert nur beistimmen können, wenn er in der Beschreibung derselben in Tchihatcheff's Reisewerk einen so grofsen Werth auf dasselbe legte, dafs er danach den *Araucarites Tchihatcheffianus* von allen anderen Araucaritenhölzern mit undeutlichen Zuwachsringen (annulis concentricis minus distinctis) trennte und wir hier seiner älteren Auffassung vor der oben angeführten den Vorzug geben. Ja, es scheint diese, den anderen Araucariten der älte-

sten Formationen fehlende Ausbildung der Jahrringe die Annahme zu unterstützen, dafs die Schichten, aus welchen das Fossil stammt, nicht dem Bergkalk, sondern der Juraformation angehören, was um so glaublicher ist, als Tchihatcheff sie nicht selbst an Ort und Stelle hat beobachten können (a. a. O., p. 390).

Die Dicke der Wandungen war wohl nicht nur bei den Herbsttracheiden mit ihrem engen Lumen, sondern auch bei den Frühlingstracheiden, von denen jetzt oft nur noch der äufsere Umrifs erhalten ist, hier und da mit Andeutung der Tüpfel (Fig. 42, *t, t*), eine ziemlich bedeutende, wie besser erhaltene Stellen zeigen (Fig. 43). Hier sind die Tracheiden noch in ihrer ursprünglichen Lage erhalten; eine feine Linie in der Mitte der Scheidewände ist vielleicht eine Andeutung der ursprünglichen Trennungsfläche. Öfter aber sind die Tracheiden, namentlich des Sommer- und Herbstholzes, bald nach der einen, bald nach der anderen Seite auseinander gerückt und haben unregelmäfsige helle, strukturlose Zwischenräume zwischen sich gelassen (Fig. 42, *s'*, *s'*).

Auch im radialen Längsschnitt (Fig. 44) lassen sich die Jahrringe deutlich erkennen. Auf englumige, oft durch helle Zwischenräume an Stelle der dicken Wandungen (vgl. Fig. 42, *s'*, *s'*) getrennte Tracheiden mit einreihigen Tüpfeln (Fig. 44 *h*) folgen unvermittelt weite Frühlingstracheiden (*f'*) mit 2—3, dann die jüngeren, noch weiteren (*f''*) mit 3 bis 4 Tüpfelreihen, welche wohl die innere Wandfläche ganz bedeckt haben mögen. Die schon im Querschnitt (Fig. 42, *t, t*), wie im Tangentialschnitt (Fig. 45 *t*) angedeuteten sehr kleinen Tüpfel stehen dicht, wo sie mehrreihig sind alternirend, abgeplattet sechseckig; ihre gewöhnliche Höhe schwankt nur wenig um 0,0085^{mm}; die des Herbstholzes schienen mir meist etwas kleiner zu sein. Der Porus bildet eine enge Spalte, wie auch Göppert in einer Bemerkung anführt zur Berichtigung der in Tchihatcheff's Reisewerk (l. c. pl. 34, fig. 21) gegebenen Abbildung, in welcher der Porus rund dargestellt ist. Meist ist er horizontal oder wenig schräg, in welchem Fall er sich zuweilen mit dem der anliegenden Tracheiden unter sehr schiefen Winkeln kreuzt.

Die zahlreichen Markstrahlen (Fig. 42, *m, m'*) sind auf dem Querschnitt des Stammes meist nur durch 2—4 Tracheidenreihen getrennt, öfter auch durch 5—9, selten durch mehr oder auch nur durch

eine. Sie sind zum bei weitem gröfsten Theile einfach (Fig. 45) — unter mehr als 300 an einem Schliffe verglichenen waren es fast 95% — und die wenigen zusammengesetzten erscheinen nur in der Höhe von einer (Fig. 45 *m*) oder wenigen Zellen (Fig. 46—49) durch daneben gelagerte zweischichtig. Die ein- bis dreistöckigen Markstrahlen habe ich stets einschichtig gefunden; bei den höheren sind nur äufserst selten einige obere und zugleich einige untere Zellen verdoppelt (Fig. 46); meist sind es mittlere Zellen, wie Fig. 45, *m*; Fig. 47—49. Sind es mehrere, so liegen sie gewöhnlich nicht auf gleicher Höhe, sondern mit einander abwechselnd, kaum aber mehr als drei über einander. Etwa ein Fünftel aller Markstrahlen ist einstöckig, die ein- bis dreistöckigen bilden mehr als die Hälfte, nur selten trifft man 10—16stöckige an; auch in dem tangentialen Längsschnitt in Tchihatcheff, l. c. pl. 35, fig. 23 sind nur 1—5stöckige abgebildet. Gleichwohl ist es bei den grofsen Schwankungen, welchen die Höhe der Markstrahlen unterliegt, nicht unwahrscheinlich, dafs auch solche mit 25 Stockwerken vorkommen, wie sie Göppert in der Diagnose angiebt.

Schwankend ist, wie gewöhnlich, die radiale Länge der Markstrahlzellen, welche zwar in der Regel nicht viel über oder unter 0,16^{mm} beträgt, aber doch nicht selten unter 0,1^{mm} sinkt oder bis gegen 0,25^{mm} steigt; dagegen sind sie ziemlich gleichmäfsig etwa 0,03^{mm} hoch.

Nicht so leicht ist der Bau der Markstrahltüpfel zu erkennen. Die behöften schienen mir durchscheinende Tracheidentüpfel zu sein; nur an dünnen Rändern zeigten die Markstrahlzellen mehrfach ziemlich dicht gestellte, länglichrunde, ein wenig schief gestellte, aber unbehöfte Poren (Fig. 50, *mt*). Ähnlich sind auch auf dem radialen Längsschnitt in Tchihatcheff l. c. pl. 34, fig. 21 kleine, runde, hoflose Poren, 6—13 auf einem, durch einen Markstrahl und eine Tracheide gebildeten Felde abgebildet, 3—4 über wie neben einander. Dagegen bemerkt Göppert nun, in Übereinstimmung mit der Zeichnung, von welcher der Haupttheil Taf. VI, Fig. 51 wiedergegeben ist, dafs „die Markstrahlzellen auf der radialen Wand mit kleineren Tüpfeln versehen waren, die keine bestimmte Anordnung erkennen lassen. Gewöhnlich kommen 3—4 auf die Breite einer Holzzelle. Auch diese Tüpfel haben einen spaltenförmigen, schräg gestellten Porus.“ „Harzgänge jeder Art fehlen.“

c. Kohlenformation.

Araucarites carbonaceus Göpp.
(Taf. VI, Fig. 53—59; Taf. VII. VIII.)

Ar. ligni stratis concentricis plus minus distinctis punctatis, punctis 1—3-serialibus spiraliter dispositis contiguis, radiis medullaribus uniserialibus e cellulis 1—20 et pluribus superpositis formatis.

Ar. carbonaceus Göpp., Monogr. d. foss. Con. S. 234, Taf. 43, Fig. 5. — Revis. d. Conif. S. 11. — Arbor. foss. S. 4, N. 31—33. — *Ar. carbonarius* Göpp. in Bronn, Gesch. d. Nat. III, S. 42.

Pinites carbonaceus With., int. struct., p. 73, tab. 11, Fig. 6—9 (vgl. p. 49. 50).

Araucarioxylon carbonaceum Kraus a. a. O. p. 381.

In einzelnen Bruchstücken in der productiven Steinkohlenformation aufserordentlich verbreitet; bildet hier eigentlich den abfärbenden Theil der Kohle unter dem Namen mineralische Holzkohle, faseriger Anthracit, obschon sie nicht wie dieser schwer, sondern leicht verbrennlich ist. Kleinere Reste dieses Holzes kann man wohl in jedem Steinkohlenstücke auffinden; den mikroskopischen Nachweis liefern Splitter (wie die in Göppert, fossile Flora des Übergangsgebirges in Nova Acta Ac. L. C. Vol. XXII (Bd. 14) Suppl. auf Tafel 39, Fig. 6—9 abgebildeten), welche zerbrochene Tracheiden mit 1—3 Tüpfelreihen zeigen.

Seltener kommt die Art in gröfseren Stämmen vor, wie in den einzelnen Kohlenlagern Oberschlesiens, z. B. bei Myslowitz in der Theodorgrube in förmlichen Scheiten, auf Heinrichs Freude bei Lendzin in 1^m Länge und darüber. Auf der sammetglänzenden Oberfläche solcher Stücke, wie dem breitgedrückten Stamme aus der Przemsa-Grube in Oberschlesien (Taf. VIII, Fig. 61) sieht man auf den zarten Längsstreifen der Holzfaserung noch feinere, jene rechtwinklig durchschneidende Streifen, die Markstrahlen. Durch diese Zeichnung unterscheiden sich diese Reste von grofsen Blättern von *Noeggerathia* oder auch von *Cordaites*, nicht aber von den Stämmen der letzteren, wodurch dann die specifische Bedeutung des *Ar. carbonaceus* noch mehr in Frage gestellt wird. Inzwischen ist er doch als Collectivname noch beizubehalten und die photographischen

Abbildungen jener grofsen Stämme, wie auch desjenigen aus der Luisengrube in Oberschlesien (Taf. VII, Fig. 60) dürften dies vielleicht rechtfertigen.

Zur Erklärung der Figuren.

Das Mark ist freilich, wo es überhaupt erhalten ist, wie Taf. VI, Fig. 53, *M*, gegen das angrenzende Holz nur undeutlich abgegrenzt, doch scheint es nur von geringer Dicke gewesen zu sein, nicht dicker vielleicht, als bei unseren Nadelhölzern, jedenfalls weit zurückbleibend hinter dem weiten Markkörper gleich dicker Cordaiten-Stämme.

Das Holz zeigt so deutliche, abwechselnd hellere und dunklere concentrische Ringe (Taf. VI, Fig. 53; Taf. VII, Fig. 60), dafs man auf den ersten Blick Jahrringe vor sich zu haben glaubt. Die Regelmäfsigkeit, mit welcher sie auf grofse Strecken abwechseln, die Breite der Flächen, über welche sie sich gleichförmig erstrecken, unterstützen diese Annahme, namentlich aber die Zu- und Abnahme ihrer Dicke ganz wie bei den lebenden Nadelhölzern. So folgen bei dem Stämmchen Fig. 53 auf die inneren, 2—3^{mm} breiten Jahrringe nach aufsen ganz allmählich schwächer werdende, erst $1\frac{1}{2}^{mm}$, dann nur noch 1^{mm} dicke. Ähnlich sind bei dem grofsen Stamm die Jahrringe an sich zwar viel dicker, als bei dem schwächeren Stücke, welches vielleicht von einem Aste herrührt; aber auch hier sind die inneren Ringe 5^{mm}, die äufseren nur noch 4^{mm} dick. Selbst wenn sich unter dem Mikroskop weder eine Verengerung des Lumens der Tracheiden gegen die Grenze des Jahrrings wahrnehmen läfst, noch eine Verdickung der Wandungen, so kann man doch ebenso wenig wie da, wo bei lebenden Araucarien solche Ringe regelmäfsig wechseln, dies einem blofsen Zufall zuschreiben. Mag das ungleiche Aussehen der abwechselnden Schichten nun von der hier gröfseren, dort geringeren Dichtigkeit der Wandungen, von der Ablagerung fremder Stoffe in ihnen, namentlich von Farbstoffen oder von anderen Ursachen herrühren — immer wird die regelmäfsig auftretende Erscheinung mit gröfster Wahrscheinlichkeit auf die wechselnden Jahreszeiten zurückzuführen sein. Es scheint deshalb die Angabe von Zuwachsstreifen, wo sie mit einer gewissen Regelmäfsigkeit auftreten, namentlich im ganzen Umfange des Stückes wahr-

nehmbar sind, nicht ohne Werth, auch wo die gewöhnlichen Unterschiede der verschiedenen Schichten der Jahrringe nicht ausgebildet sind.

Die Wandung der Tracheiden des Holzes ist in Kohle verwandelt, welche wenigstens da, wo sie nur eine merkliche Dicke hat, undurchsichtig und schwarz erscheint. Die ziemlich dicken Wände (Fig. 54) haben zahlreiche Risse und Sprünge; sie erscheinen daher vielfach durchbrochen, oft wie aus kurzen Stücken zusammengesetzt. Dafs diese aber häufig ihre ursprüngliche Lage beibehalten haben, so dafs das Zellnetz noch gut genug erkannt werden kann, deutet darauf hin, dafs diese Risse nur kurz sind, und über wie unter denselben die in einem Querschnitt getrennten Theile noch zusammenhängen. Oft freilich sind die Tracheiden nicht nur schief, wie in Fig. 54, sondern so zusammengedrückt und verschoben oder es sind so unzusammenhängende Trümmer der Wände erhalten, dafs man kein Bild mehr von der ursprünglichen Anordnung und Gröfse derselben gewinnen kann. Wo ihr Umrifs am besten erhalten ist, bilden sie gerade radiale Reihen von gleichförmigen quadratischen oder quer-rechteckigen Feldern von 0,04 — 0,05^{mm} mittlerem Durchmesser. Doch scheint die Gröfse der Tracheiden wie gewöhnlich sehr wechselnd; an dem in Göppert's Monogr. d. foss. Con. Taf. 43, Fig. 5 abgebildeten Querschnitt sind sie nur 0,02 — 0,025^{mm} breit.

Auch an den Längsschliffen sind die dickeren Theile der Wandungen, also namentlich die sich von vorn nach hinten erstreckenden, undurchsichtig schwarz; die dünnen dagegen scheinen braun durch und die allerfeinsten lassen auf gelbbraunem Grunde hier und da noch die zarten Umrisse der Tüpfel, zuweilen noch in grofser Deutlichkeit erkennen. Dieselben sind im Mittel etwa 0,014 — 0,015^{mm} hoch, gedrängt, oft einreihig (Fig. 55) oder zweireihig alternirend (Fig. 56), hier und da auch dreireihig (Fig. 57), dann namentlich von scharfer, dunkler Linie begrenzt. Der ganze Schnitt zeigt eine unverkennbare Ähnlichkeit mit dem durch Verkohlen eines Holzstücks von *Araucaria Cunninghami* erhaltenen Präparat (Fig. 52). Sehr mannigfach stellt sich der innere Porus dar, bald als einfacher schmaler Spalt, fast senkrecht, ein wenig bald nach links (Fig. 55, p'), bald nach rechts oben (p'') ablenkend, hier und da der eine hinter dem anderen durchscheinend, so dafs sie einen nach unten offenen sehr spitzen Winkel bilden; öfter ist der Porus breiter, selbst elliptisch

und mehr geneigt, so dafs die hinter einander liegenden sich unter schiefen Winkeln kreuzen (Fig. 56, 57), obwohl auch hier öfter nur eine Porenspalte sichtbar ist, oder nur die Kreuzungsstelle als rundlicher heller Fleck hervortritt (Fig. 57, *p*).

Am wenigsten deutlich sind die Markstrahlen. Auf dem Querschnitt ziehen sie sich als schmale Unterbrechung der sonst an einander schliefsenden radialen Reihen der Tracheiden von innen nach aufsen (Fig. 54, *m*), ohne dafs irgend etwas von ihrem Bau zu erkennen wäre. Im Tangentialschliff (Fig. 59) sind sie meist zwischen undurchsichtigen, vielfach zerdrückten und geborstenen Kohlenstreifen eingeschlossen, so dafs nur bei wenigen die Zusammensetzung sicher zu ermitteln ist. Diese schienen einfach; die wenigen neben einander liegenden Zellen waren wohl nur durch den etwas schiefen Schnitt getroffene hinter einander liegende. Die Höhe der Markstrahlen betrug nur selten 1—4, meist 6—16 Stockwerke, doch zählte ich einigemal über 20. Die Höhe der einzelnen Zellen ist wenig über $0{,}02^{mm}$, so dafs sie noch nicht $1\frac{1}{2}$mal so hoch sind, als die Tüpfel der Tracheiden.

Die Markstrahltüpfel scheinen nur in geringer Zahl auf einem durch einen Markstrahl und eine Tracheide gebildeten Felde zu liegen (Fig. 58). Sie erscheinen einzeln oder zu zwei auf einer Tracheidenbreite als kleine dunkle Flecke, in denen man hier und da einen schwarzen Mittelpunkt zu erkennen glaubt (p'), oder als gröfsere elliptische Ringe (p''), vielleicht die Höfe derselben.

Araucarites Elberfeldensis Göpp. (Taf. IX, Fig. 62—65.)

Ar. ligni stratis concentricis hinc inde conspicuis, tracheidis punctatis, punctis 1—4- (raro 5-) serialibus spiraliter dispositis contiguis, radiis medullaribus uniserialibus e multis cellulis superpositis formatis.

Ar. Elberfeldensis Göpp. in Arbor. foss. Beilage, S. 3.

Kohlenrevier der Grafschaft Mark, entdeckt unweit Elberfeld. Als ich auf der Reise von Ems nach Breslau durch den Döppersberger Bahnhof der Bergisch-Märkischen Eisenbahn fuhr, bemerkte ich vom Waggon aus drei stammartige Gebilde, welche sich bei näherer Betrach-

tung auch wirklich als versteinte Stämme auswiesen. Woher stammten dieselben? In der nächsten Nähe ist nichts als devonisches Gestein, aus welchem ich allerdings schon vor 30 Jahren, aber auf einem anderen Punkte, ein Farnkraut, *Trichomanites grypophyllus*, gefunden hatte. Auch der überwiegende Kalkgehalt, die Araucarienstructur, sprachen nicht dagegen, nur das kohlige Äufsere derselben nicht dafür, dafs die Stämme jener Formation angehörten. Sogar amtlich eingezogene Kunde bezeugte, dafs diese Steine von einer ganz genau bezeichneten Stelle vor einer Reihe von Jahren gefunden, auf den Bahnhof geschafft und dort in Vergessenheit gerathen seien. Inzwischen ruhte man doch nicht und suchte gröfsere Gewifsheit über das Vorkommen zu erlangen, und es stellte sich denn nun endgültig heraus, dafs diese Angaben nicht richtig seien, sondern dafs die fraglichen Stämme aus dem benachbarten Märkischen Kohlenreviere herrührten (nach Beiblatt z. Arbor. foss. S. 3 aus der Kohlenformation bei Witten), von wo sie in unbestimmter Zeit nach dem Bahnhofe auf die von mir bemerkte Stelle gelangt wären.

Ob nun alle (es sollen 5 — 6 Stück gewesen sein) zu einem und demselben Stamm oder derselben Art gehört haben, vermag ich nicht zu sagen. Die beiden Exemplare, welche ich der Freundlichkeit des Herrn Pastor Heinersdorf verdanke, stimmen mit einander überein. Von schwarzer Farbe, wie gewöhnlich entrindet, kohlehaltig und durch Kalk versteint kann man auf der Oberfläche keine concentrischen Kreise entdecken, während bei der mikroskopischen Betrachtung einzelne dunklere Streifen zum Vorschein kommen.

Herr Pastor Heinersdorf sandte einen der Stämme nach Bonn, den ich nicht weiter zu beschreiben vermag, und zwei zu mir nach Breslau, wo ich dieselben bei unserer palaeontologischen Parthie im botanischen Garten aufgestellt habe. Sie sind ziemlich gleich hoch, $1\frac{1}{4}^{m}$, und auch gleich dick, $\frac{2}{3}^{m}$, von schwärzlichem, kohligem Äufseren, durch welches nirgends krystallinisches Gestein hervortritt; wenig Kiesel-, überwiegend Kalkgehalt, wie aus der beistehenden, von Herrn Gissmann gefälligst angestellten Analyse sich ergiebt:

Kohlenstoff	0,18 %
Wasser	1,21 „
Kohlensaurer Kalk . . .	65,75 „
Kohlensaure Magnesia .	9,45 „
Kohlensaures Eisenoxydul	12,22 „
Eisenoxyd	10,48 „
Kieselsäure	0,93 „
	100,22 %

Zur Erklärung der Figuren.

Der Querschnitt (Fig. 62) zeigt die Tracheiden, wo sie noch gut erhalten sind, von gleichförmigem Umrifs, wenn auch wie gewöhnlich mit den Reihen weiterer Tracheiden von $0,08^{mm}$ mittlerem Durchmesser hier und da Reihen engerer, ja ganz enger abwechseln. Bei dem einen der beiden von mir verglichenen Querschliffe aus der Göppert'schen Sammlung im Breslauer mineralogischen Museum ist, obwohl er von innen nach aufsen 20^{mm} mifst, nirgends eine Verengerung der Tracheiden zu erkennen; bei dem anderen, nur 12^{mm} messenden sind wohl zwei deutliche concentrische Streifen etwa 9^{mm} von einander entfernt vorhanden; beide sind aber dadurch entstanden, dafs mehrere Lagen gleich weiter Tracheiden dunkler gefärbt sind, ohne darum dickwandiger zu werden, oder stark zusammengedrückt mit verbogenen und zerknickten Wänden, wie dies freilich in der Nähe der Jahrringgrenze z. B. bei *Araucarites Tchihatcheffianus* öfter vorkommt, aber auch an anderen Stellen. In beiden Fällen liegt ferner bei *Ar. Elberfeldensis* die Grenze nicht streng in einem concentrischen Bogen, sondern schweift stellenweise nicht unerheblich nach innen oder aufsen ab. Als Jahrringe können daher diese concentrischen Streifen hier wohl nicht betrachtet werden.

Die Tracheiden sind dickwandig; die Wände, mit stärkeren und schwächeren Sprüngen in den verschiedensten Richtungen durchsetzt, lassen hier und da Andeutungen der zwischen ihnen liegenden Tüpfelräume (Fig. 62, *t*) erkennen. Die Tüpfel sind ein- bis zweireihig (Fig. 64), öfter drei- bis vierreihig, an den verbreiterten Enden der Tracheiden stellen-

weise selbst fünfreihig (Fig. 63), stets alternirend, gedrängt, daher bei mehreren Reihen scharf sechseckig, nur etwa 0,011^{mm} hoch. Der Porus erscheint oft als rundlicher dunkler Fleck oder als heller Kreis, bei günstiger Erhaltung als Spalte, meist schmal, fast strichförmig, oft aber schmal elliptisch; fast wagerecht oder schief bis 45° geneigt, nach rechts oder links aufsteigend, je nachdem die vordere oder hintere Tracheidenwand vom Schnitt getroffen worden ist; zuweilen sind beide sich kreuzenden Spalten sichtbar.

Zwischen den Tracheidenreihen verlaufen zahlreiche Markstrahlen, durchschnittlich etwa durch 6, die Hälfte derselben aber nur durch 1—4, selten durch viele, vielleicht bis 20, derselben getrennt (Fig. 62, *m*, *m*). Sie sind meist 2—11 Stockwerke hoch (Fig. 65), selten bis über 20 oder nur 1; die einzelnen Zellen im Tangentialschnitt rechteckig, etwa 0,025^{mm} hoch. Wenig deutlich sind ihre Tüpfel. Der eisenhaltige Kalkstein, durch welchen das Holz versteint ist, hat so zahlreiche feine Risse, welche in allen Richtungen verlaufend oft kleinere oder gröfsere zellenähnliche Umrisse nachahmen, dafs man selbst bei schärfer umschriebenen Ringen mit dunklem Mittelpunkt (Fig. 63, *mt*) nicht jeden Zweifel an ihrer Natur unterdrücken kann. Sind dieselben wirklich behöfte Markstrahltüpfel, so haben diese in mehreren Reihen, also in ziemlich grofser Zahl auf dem durch einen Markstrahl und eine Tracheide gebildeten Felde gestanden.

Araucarites Elberfeldensis stimmt in manchen Stücken mit dem derselben Formation angehörigen *Ar. carbonaceus* überein, so dafs man geneigt sein könnte, ihn derselben Art zuzurechnen. Die bei *Ar. Elberfeldensis* etwas gröfsere Höhe der Markstrahlzellen würde bei den immerhin erheblichen Schwankungen dieser Gröfse bei einer und derselben Art nicht erheblich ins Gewicht fallen; ebenso dafs die Tüpfel oft drei- bis vierreihig, bei *Ar. carbonaceus* nur ein- bis zwei-, selten dreireihig stehen; dafs dieselben aber bei der letzten Art $\frac{4}{3}$ mal so hoch sind, als bei der ersten, macht die Zugehörigkeit beider zu derselben Art an sich schon unwahrscheinlich, noch mehr aber, weil bei der Verkohlung der Stämme des *Ar. carbonaceus* wahrscheinlich ein starkes Schwinden des Holzes stattgefunden hat, bei der Verkalkung des *Ar. Elberfeldensis* eher eine Quellung, wofür auch die ungleiche, oft grofse Dicke der Tracheiden-

wandungen (Fig. 62) spricht. Mögen beide Veränderungen in der Längsrichtung nicht bedeutend gewesen sein, so hätten sie immerhin auf eine Ausgleichung des Unterschiedes in der Höhe der Tüpfel hinwirken müssen.

d. Permische Formation.

Araucarites cupreus Göpp.

(Taf. IX, Fig. 66—69; Taf. X, Fig. 70—77; Taf. XI, Fig. 78—84.)

Ar. ligni stratis concentricis obsoletis, tracheidarum punctis uni-biserialibus, in var. β uni-triserialibus, spiraliter dispositis contiguis aut subcontiguis, radiis medullaribus simplicibus e cellulis magnis plerumque 1-10, interdum 30 et pluribus superpositis formatis.

Ar. cupreus Göpp., Monogr. d. foss. Conif. S. 233; Taf. 43, Fig. 2—4. — Flora d. perm. Form. S. 258. — Revision d. foss. Con. S. 15. — Arbor. foss. S. 6; N. 56—61.

Araucarioxylon cupreum Kraus in Schimper l. c., p. 383.

In der permischen Formation des Urals stets reich an Kupferoxyd, oft grün gefärbt, mitgetheilt durch den verstorbenen verdienten Forscher jener Gegenden, Wangenheim v. Qualen; identisch mit dem im Kupfersandstein vom Kossinitz in Böhmen und mit dem von Mansfeld, wodurch sich die Identität der gedachten Formationen mit der russischen nachweisen läſst.

Zur Erklärung der Figuren.

a) *Ar. cupreus* vom Kossinitz in Böhmen (Fig. 66—69). „In der unteren Etage des Rothliegenden, bemerkt Jokély[1]), finden sich fossile Hölzer namentlich am Kozinec bei Starkenbach, wo sie neben anderen Pflanzenresten in der erzführenden Sandsteinbank vorkommen. Es

[1]) Allgem. Übers. über d. Gliederung u. d. Lagerungsverhältn. d. Rothlieg. im westl. Theile des Jičiner Kreises in Böhmen, im Jahrbuch der K. K. geolog. Reichsanst. (Wien), Jahrg. 1861/62, Bd. XII. S. 393.

ist dies ein grauer, glimmerführender Sandstein ..... von 5 Klafter Mächtigkeit. .... Die Holzstämme, deren nähere Bestimmung Herr Professor Dr. Göppert übernommen hat" und unter denen sich auch *Araucarites cupreus* Göpp. vorgefunden hat, „sind bei verschiedener Länge $\frac{1}{2}$ — 2′ im Durchmesser stark und liegen parallel zu den 20 — 25° in Süd einfallenden Schichten". Ein Stück eines solchen von der Grube Emilie Pauline am Berge Kossinitz (Kozinec; in der Flora der permischen Formation S. 258 steht wohl nur durch Druckfehler Koriner) ist in Fig. 66 dargestellt.

Jahrringe sind im Querschnitt (Fig. 67) nicht aufzufinden. Die noch in einzelnen, seltener in 2 neben einander verlaufenden Reihen erhaltenen Tracheiden mit fast quadratischem Umrifs laufen ohne Unterbrechung von innen nach aufsen, die gröfseren von 0,04 — 0,05^{mm} im Durchmesser und etwas darüber. Meist aber sind sie schief zusammengedrückt, mit länglich-rundem (*tr*) oder ganz flachem S-förmigem Lumen (*tr'*), während ihre starken Wandungen noch in ihrer ursprünglichen Dicke erhalten sind.

Die im Querschnitt nirgends deutlichen Tüpfel sind auf dem radialen Längsschnitt (Fig. 68) meist nur in zarten Umrissen zu erkennen, in 1 — 2, hier und da vielleicht in 3 Reihen. Zwischen ihnen läuft freilich meist eine schmale helle Leiste hin, so dafs sie sich nicht eigentlich berühren. Da sie aber, wenn sie mehrreihig sind, einen scharf vielkantigen Umrifs angenommen haben (*t*), und selbst einreihig oben und unten abgeplattet und dadurch queroval geworden sind, haben sie sich wohl anfänglich in der Mitte des hellen Streifens berührt. Dann haben die Tüpfel wohl eine mittlere Höhe von 0,013^{mm} gehabt, obwohl sie nicht unerheblich um diese Gröfse schwanken. Der meistens rundliche Porus ist selten scharf begrenzt, doch an manchen Stellen deutlich genug schiefspaltenförmig; sehr selten nur ist die Kreuzung der über einander liegenden noch zu erkennen.

Daneben liegen, auf den ersten Blick ganz verschiedene, viel kleinere kreisrunde Tüpfel mit rundem oder kurz-elliptischem, steilen Porus, welche wie kleine braune Scheiben in senkrechten Reihen auf der Tracheidenwand liegen. Ihre gegenseitige Entfernung ist aber doch so, dafs eine senkrechte Reihe derselben eben so hoch ist, wie die einer

gleichen Zahl sich berührender gewöhnlicher Tüpfel, so dafs es wohl keinem Zweifel unterliegt, dafs diese kleinen Tüpfel nicht eigenthümliche Bildungen sind, sondern nur die inneren, den Porus umgebenden Theile gewöhnlicher Tüpfel, vielleicht dadurch auf dem Schliffe erhalten, dafs derselbe mitten durch den Tüpfelhof gegangen ist.

Einfache oder doppelte Reihen wirklich kleinerer Tüpfel (Fig. 69, *t'*) sind zuweilen auf den tangentialen Wandflächen der Tracheiden zerstreut, während man in den radialen Wandungen Reihen durchschnittener gewöhnlicher Tüpfel erkennt (*t*).

Die Markstrahlen sind, wie dies bei der meist starken Zusamdrückung des Holzes kaum anders zu erwarten war, so verdrückt, dafs auf dem Tangentialschliff nur wenige ganz zu verfolgen sind. In der Regel sind sie einfach (Fig. 69, *m*), doch kommen auch hier zuweilen 2 neben einander gelagerte Zellen vor (*m'*, *m'*). Auf dem Radialschliff zählt man 1 — 30 Stockwerke und darüber; die einzelnen Zellen sind rechteckig, $0{,}025^{mm}$ hoch und etwa 4 — 6 mal so lang.

b) *Ar. cupreus* vom Ural (Taf. X, Fig. 70 — 72).

Über das Vorkommen der Stämme dieser Art und ihre merkwürdigen Beziehungen zu dem Auftreten der Kupfererze, fast ausschliefslich Kupferlasur und Malachit, des südwestlichen Urals um Bjelebei im Gouvernement Orenburg zwischen der Diöma (Djema oder Dema, Nebenflufs der Bjelaja, welche in die Kama mündet) und des Ik's (Nebenflufs der Kama) bemerkt Wangenheim von Qualen[1]): „Eine besondere Art reicher Erze liefern im bunten Sandsteine die, die ungemein grofsen Anhäufungen von fossilen Holzstämmen begleitenden Kupferoxyde. . . . . Diese Holzstämme sind oft von der Dicke eines Fingers bis zu $\frac{1}{2}$ Arschin“ (Arschin, Elle = 71^{cm}) „haben selten Seitenäste, durchschneiden den bunten Sandstein horizontal nach allen Richtungen, doch immer in einem gewissen Niveau mit unbedeutendem Steigen und Fallen, sind mit Kupfergrün ganz durchzogen, das nicht allein die Rinde nebst dem Holze und den näher umgebenden Sandstein in reiches Kupfererz verwandelt hat, sondern auch gewöhnlich noch in dem tauben Gesteine Spuren von Ku-

[1]) Geognost. Beiträge z. Kenntnifs der Gebirgsform. d. westl. Urals in Bull. d. l. société impér. d. natural. de Moscou, 1840, p. 389 — 429.

pfergrün zeigt, so dafs, je näher dem Holze, desto reicher der Kupfergehalt ist. .... Die kleineren Holzstämme oder Äste sind oft etwas plattgedrückt, die gröfseren aber gewöhnlich rund mit deutlicher Holztextur“ (wohl in den an einer anderen Stelle genannten „wahren Lignit“ verwandelt) „ganz mit Kohlenstoff oder Rufs durchzogen“.

„Nicht selten finden sich viele Arschinen lange, horizontal liegende Holzstämme, wo Rinde und Holz in den schönsten erdigen Malachit verwandelt, der innere Kern des Holzes aber ganz mit braunschwarzem mildem Rufs angefüllt ist, daher die Bergleute diese Holzstämme gewöhnlich Röhren nennen. .... Der Bergmann mufs sich oft mehrere Faden lang durch die taube und harte Gebirgsart hindurcharbeiten, bis er einen kleinen, einzeln im bunten Sandstein liegenden, mit Kupfergrün durchzogenen Holzstamm findet, der nun als Spur dient, um auf noch weiter liegende reiche Anhäufung dieser fossilen Hölzer mit Kupfererz hinzuleiten“.

Wenn Wangenheim von Qualen die Ansicht ausspricht, dafs die meisten dieser Holzstämme den Dikotyledonen — zu denen er offenbar auch die Nadelhölzer rechnet — anzugehören scheinen, obwohl sich einzelne mit bündelweisen Holzfasern finden, bei denen keine Jahrringe zu erkennen sind, so ist dem gegenüber zu bemerken, dafs an den Querschliffen gerade an den gut erhaltenen Stellen Jahrringe so wenig, wie an den böhmischen Stücken zu finden sind. Lange radiale Reihen von Tracheiden (Fig. 70) zeigen nirgends eine Verdickung der Wände oder eine Verringerung ihres radialen Durchmessers in mehreren neben einander liegenden Reihen, geschweige in ganzen Bogen. Auch sonst stimmen sie mit denen der böhmischen Hölzer überein, nur in der geringen Dicke der zierlichen Wandungen liegt ein auffallender Unterschied beider Vorkommnisse, doch ist dieselbe wohl nur der Zerstörung der Verdickungsschichten während der Versteinerung der Uralischen Stämme zuzuschreiben. Die gut erhaltenen Tracheiden hatten radial und tangential ziemlich gleichen Durchmesser, eher etwas mehr nach aufsen als quer gestreckt; wie gewöhnlich mehrere Reihen mittelgrofser von $0{,}04^{mm}$ mittlerem Durchmesser mit Reihen gröfserer von $0{,}05^{mm}$ und wieder kleinerer von $0{,}025^{mm}$ Breite abwechselnd.

Nicht selten hat der Querschnitt die zierlichen, linsenförmigen Tüpfelräume, 1—2 zwischen 2 radialen Tracheidenwänden getroffen (Fig. 70, *t*). Recht deutlich zeigt sich hier an einigen Stellen (*t'*), wie Tüpfel auf den gebrochenen, eigentlich radialen Tracheidenwänden so schief liegen können, dafs sie auf einem Tangentialschnitt das Ansehn von Tüpfeln auf den nach aufsen und innen gewendeten Wandungen haben, vollends, wenn der Schnitt ein wenig schief gerichtet ist, was bei den aufserordentlich häufigen Verbiegungen der radialen Reihen schon am lebenden Holz keineswegs selten, viel öfter noch an den bei der Versteinerung aufgeweichten und gequetschten Hölzern vorkommt. Die wie bei den Stücken vom Kossinitz nur in zarten Umrissen angedeuteten Tüpfel stehen auf den radialen Längswänden der Tracheiden (Fig. 71) fast stets gedrängt, die zweireihigen abwechselnd, einander eckig plattdrückend, die einreihigen oft oben und unten flachgedrückt, daher queroval oder eiförmig, etwa $0{,}0125^{mm}$ hoch, also ein wenig niedriger, als im Durchschnitt bei den böhmischen Hölzern; aber selbst abgesehen davon, dafs auch bei diesen oft kleinere Tüpfel vorkommen, ist der Unterschied zu gering, um für eine Unterscheidung verschiedener Arten ins Gewicht zu fallen.

Viel deutlicher, als bei den Stücken vom Kossinitz sind die Markstrahlen erhalten, gewöhnlich durch 3—6, zuweilen durch mehrere oder nur durch 1—2 Tracheidenreihen getrennt (Fig. 70, *m*, *m*). Sie sind einschichtig (Fig. 72); nur zuweilen, wie wohl immer in diesem Fall, liegen namentlich bei den mehrstöckigen an einer bis drei Stellen je zwei Zellen neben einander oder sie sind selbst auf gröfsere Strecken zweischichtig, indem jederseits 2—6 Zellen mit einander abwechseln. Die Höhe der Markstrahlen ist in der Regel gering, 1—25 stöckig, aber unter ihnen bilden die 2—5 stöckigen über die Hälfte. Die einzelnen Zellen sind etwa $0{,}025^{mm}$ hoch, rechteckig, durch beinahe senkrechte Wände gegen einander abgegrenzt (Fig. 71), und 5—10 mal so lang als hoch.

c. *Ar. cupreus* von Mansfeld (Taf. X, Fig. 73—77; Taf. XI, Fig. 78—84).

Auf den Querschnitten (Fig. 73, 74) verlaufen die radialen Reihen von gleichförmigen Tracheiden auf lange Strecken, ohne dafs irgendwo eine Zuwachsgrenze zu erkennen wäre, bald viele Reihen gröfserer,

0,075 — 0,1^{mm} breiter, neben einander, bald mit einzelnen Reihen mittlerer und kleiner, 0,025^{mm} breiter, abwechselnd. Fallen die grofsen Tracheiden (Fig. 73, *tr*) aufser ihrer ungewöhnlichen Weite namentlich durch ihre Breite auf, welche den radialen Durchmesser oft nicht unerheblich übertrifft, so sind von den mittelgrofsen und kleineren ganze radiale Reihen mit dunklem, ja schwarzem Inhalt erfüllt (Fig. 74, *tr*), manchmal so dicht, dafs die Querwände sich nur schwach als schmale helle Streifen abheben. Ähnliches zeigt sich auch oft bei einzelnen Markstrahlzellen, doch dürften beiderlei Färbungen wohl nur zum kleineren Theil von zersetzten organischen Inhaltsstoffen, hauptsächlich aber von der eigenartigen Versteinerungsmasse herrühren. Dagegen ist die dunkle Färbung der noch ziemlich dicken Tracheidenwandungen mehr oder weniger verkohltem organischen Stoffe zu danken, welcher sich am längsten im Innern derselben erhalten hat.

Die Tüpfel treten schon an manchen Stellen des Querschnitts, 1—3 neben einander als rundliche dunkle Stellen mit hellerem Spalt in den radialen Wänden der Tracheiden eingeschlossen (Fig. 73, *t*; 74, *t*) oder wie dickere Knollen hervor (Fig. 74, *t'*), die Wand unterbrechend, doch nirgends recht scharf begrenzt. Auf den radialen Längswänden dagegen stehen die Tüpfel bei einigen Stücken vorwiegend in 1 — 2, bei anderen in 2 — 3 schnurgraden Reihen, kaum je, wie das bei den Stücken vom Ural sehr häufig ist, bald nach rechts, bald nach links vortretend. Die einzelnen Tüpfelhöfe erscheinen kreisrund, einander nur eben berührend, seltener sechseckig. Nur wo die geraden Reihen unterbrochen sind, wo 3 Reihen in 2 oder 2 in eine übergehen, sind vereinzelte Tüpfel quereiförmig, wie sie bei den Hölzern vom Ural und vom Kossinitz häufig vorkommen. Während ferner bei diesen der Porus meist undeutlich, rundlich oder nur wenig länglich ist, erscheinen hier in ganzen Tüpfelreihen scharf umgrenzte, elliptische, schiefe Spalten, welche sich mit denen der anliegenden Tracheiden kreuzen. Ja, nicht selten setzen sich Reihen dieser schiefen Spalten auf den Tracheidenwänden fort, wo die Höfe undeutlich geworden oder ganz geschwunden sind (Fig. 75, *p*, *p*). Äufserlich ähnlich den Reihen zerstreuter kleiner Tüpfel bei den Stücken vom Kossinitz (Fig. 68, *t'*), aber doch ihrem Wesen nach wahrscheinlich verschieden sind Reihen zerstreuter Tüpfel auf denselben Tracheiden-

wandungen (Fig. 78), welche darüber oder darunter geschlossene Tüpfelreihen tragen; denn sie sind so wenig kleiner als diese letzteren, dafs sie, auch zu deren Gröfse ergänzt, oft noch erheblich von einander abstehen würden. Gruppen etwas kleinerer Tüpfel sonst auch mit schief-spaltenförmigen, auch wohl gekreuzten Poren finden sich hier und da ohne bestimmte Ordnung über kurze Strecken der nach aufsen gekehrten Wandungen der Tracheiden zerstreut (Fig. 79).

Noch kleiner sind die Markstrahltüpfel (Fig. 76), von denen in der Regel 2—4, aber auch 5 oder 6 auf einem, durch eine Markstrahlzelle und eine Tracheide gebildeten Felde stehen, mit kreisrundem oder etwas schief-länglich-rundem Hofe und schiefem Porenspalt. Die Tracheidenwand rings um sie her ist aber fast immer uneben, wie runzelig und die so beschaffene Stelle rundlich abgegrenzt, so dafs sie scheinbar von einem sehr grofsen Hofe umgeben sind. Fällt nun gar ein solches gröfseres oder kleineres Stück der Tracheidenwand heraus, wie dies namentlich oft bei den oberen (*m*) und unteren (*m'*) Zellen eines Markstrahls stattfindet, so wird der Anschein eines sehr grofsen Tüpfelhofes noch mehr erweckt. An seinem Rande liegen aber oft noch die kleinen Tüpfel gut genug erhalten, um das Irrige einer solchen Annahme zu zeigen.

Die Markstrahlen selbst sind wie gewöhnlich durch 1—8, durchschnittlich durch 4 Tracheidenreihen getrennt. Etwa vier Fünftel derselben sind einschichtig (Fig. 77, *m*) 1—50 Stockwerke hoch, doch sind mehr als zwanzigstöckige selten, die zwei- bis vierstöckigen betragen schon mehr als die Hälfte, die zweistöckigen allein etwa den fünften Theil der einfachen Markstrahlen. Sehr mannigfaltig sind die mehrschichtigen ausgebildet. Die Hälfte derselben hat nur eine Doppelzelle, beide entweder neben einander (Fig. 80), oder eine zwischen zwei andere seitlich eingeschoben, mit ihnen abwechselnd, wie Fig. 77, *m'*; dies ist in der grofsen Mehrzahl der Fälle die 2. Zelle vom oberen oder unteren Ende des Markstrahls. Seltener sind 2 Doppelzellen über einander (Fig. 81, 82) oder an verschiedenen Stellen des Markstrahls (Fig. 77, *m'*, *m''*); noch seltener liegen 3—4 Doppelzellen über einander, wie Fig. 84 an einer oder Fig. 85 an zwei Stellen des Markstrahls; ja hier erscheint derselbe sogar 1—2 Zellen hoch dreischichtig. Endlich kommen selbst Markstrahlen vor, welche an drei, durch einschichtige Strecken getrennten

Stellen Doppelzellen führen. Die Breite der Markstrahlzellen ist etwa 0,03mm und etwas darüber, die Höhe derselben aus der Mitte der Markstrahlen etwa eben so grofs, während die Endzellen und dem entsprechend die Zellen der ein- und zweistöckigen Markstrahlen meist höher sind, bis 0,05mm. Die sehr schwankende radiale Erstreckung ist gewöhnlich vier- bis fünfmal so grofs, als die Höhe der Zellen.

Blicken wir schliefslich auf die drei Vorkommnisse von räumlich weit auseinander liegenden Örtlichkeiten noch einmal zurück, so finden wir den Bau der Hölzer aus den Kupfergruben des Ural mit dem der böhmischen vom Kossinitz so übereinstimmend, dafs ihrer Zugehörigkeit zu einer und derselben Art nichts entgegensteht. Die wenigen Verschiedenheiten stehen in Beziehung zu der sehr geringen Dicke der Tracheidenwandungen bei den Hölzern vom Ural, welche wohl nur eine Folge der verschiedenen Art der Versteinerung ist. Auffallend verschieden tritt uns dagegen der innere Bau der Stämme von Mansfeld entgegen. Wer die oft viel gröfseren Tracheiden, die groben Markstrahlen mit etwas höheren Zellen, namentlich aber die schnurgraden Reihen von kreisrunden oder rundlich-sechseckigen Tüpfeln, meist zu 2—3 auf einer Tracheidenwand mit scharf umgrenzten schiefen, oft gekreuzten Porenspalten neben den ein- bis zweireihigen, oben und unten abgeplatteten, oft bald rechts, bald links etwas vortretenden breit-eirunden Tüpfeln der uralischen Hölzer mit ihren rundlichen Poren sieht, der möchte schwerlich geneigt sein, beide von derselben Art herzuleiten. Gleichwohl sind diese in die Augen springenden Unterschiede alle nicht von so grofser systematischer Bedeutung, dafs man eine Trennung in zwei Arten darauf begründen möchte, ehe durch Vergleichung mehrerer Stücke von jedem der verschiedenen Fundorte festgestellt ist, welche dieser Merkmale an jedem derselben beständig auftreten. Es scheint daher am richtigsten und zugleich im Sinne des Verfassers, welcher, wie ich aus der später geänderten Bezeichnung der Figuren schliefse, auch anfänglich geneigt gewesen ist, die Mansfelder Stämme als eigene Art zu betrachten, auf das Vorhandensein dieser Verschiedenheiten durch Aufstellung zweier Formen hinzuweisen, deren weitere Verfolgung erst ihren Werth feststellen kann.

Araucarites cupreus G. *α*) *Uralensis.*

Tracheidis mediocribus, punctis 1—2-serialibus, seriebus plus minus flexuosis, radiorum medullarium gracilium cellulis c. 0,025^{mm} altis.

In der permischen Formation des Urals und Böhmens.

β) *Mansfeldensis.*

Tracheidis amplis, punctis 1—3-serialibus, seriebus strictis, radiis medullaribus grossis, e cellulis c. 0,03^{mm} et ultra altis compositis.

Im Kupferschiefer von Mansfeld.

III. Pinites Göppert.

Trunci structura interna Pinorum viventium, e medulla centrali et ligni stratis concentricis plus minusve conspicuis formati. Tracheidae punctatae, punctis plerumque rotundis discretis uni- aut in truncis annosioribus et in radicibus bi- vel triserialibus, semper tamen in eodem plano horizontali juxta positis. Radii medullares tum simplices aequales tum compositi inaequales bi- vel triseriales ductum magnum resiniferum includentes. Ductus resiniferi simplices (parenchyma lignosum) et compositi.

Göpp. Monogr. d. foss. Con. S. 211.

Cedroxylon et *Pityoxylon* Kraus in Schimper l. c., p. 364.

Ich habe die Gattung *Pinites* in ihrem ganzen Umfange, also für die Abietineen, mit Ausnahme der Araucarien und *Dammara*, beibehalten und nur einzelne daraus entfernt, deren Kennzeichen hinreichenden Anlafs zur Aufstellung neuer Gattungen darboten aus den bereits in der „Revision meiner Arbeiten über die Stämme der fossilen Coniferen“ entwickelten Gründen.

Abgesehen vom Fehlen von Vegetations- und Fructificationstheilen entbehren die Stämme selbst auch oft der wesentlichen, zu ihrer Unter-

scheidung nothwendigen Theile, wie namentlich des Markes und der Tüpfel der Markstrahlen, sodafs Unsicherheit uns auf jedem Schritte begegnet. So vermochte ja Kraus, der die Gattung in zwei selbstständige Gattungen *Cedroxylon* und *Pityoxylon* spaltete, für die von ihm abgetrennte Gattung zwar eine Art als wenigstens vermeintlich sicher zu gewinnen, die anderen aber nur sehr unsicher als hierher gehörig zu erklären. Wozu also die Trennung? Man warte so lange, bis die dazu gehörigen anderweitigen Organe mit einiger Sicherheit bekannt sind.

Pinites Conwentzianus Göpp.

(Taf. XI, Fig. 85—87; Taf. XII, Fig. 88—100.)

P. ligni stratis concentricis distinctis, tracheidis punctatis, punctis rotundis discretis in una serie vel in duabus seriebus in eodem plano horizontali juxta positis, radiis medullaribus simplicibus vel bi-pluriserialibus ductum resiniferum magnum includentibus [ductibus resiniferis compositis per stratorum zonam exteriorem dispersis].

P. Conwentzianus Göpp., Revis. d. foss. Con. S. 19; Arbor. foss. S. 6, N. 68—70.

Im Waldenburger Kohlenrevier von Dr. Conwentz gefunden und von mir nach ihm benannt.

Interessant wegen der Seltenheit des Vorkommens; durch die grofsen, in den Markstrahlen vorhandenen Harzgänge den Abietineen (*Pinus picea, Abies, silvestris*) verwandt.

Schon früher habe ich eigenthümliche, Coniferennadeln sehr ähnliche Blattabdrücke aus der oberschlesischen wie niederschlesischen Steinkohle, die einzigen dieser Art, abgebildet, ohne sie besonders zu benennen; zuerst in meiner Preisschrift über die Entstehung der Steinkohlen, Haarlem 1848; sodann wiederholt in meiner Flora der permischen Formation, S. 244, Taf. 64, Fig. 1, 2. Das Vorkommen dieser Abdrücke auf gleicher Lagerstätte mit den Stammresten vorliegender Art dürfte, wenn auch nicht mit Sicherheit, so doch mit einiger Wahrscheinlichkeit, die vielleicht später durch weitere Funde mehr gestützt werden wird, die Zugehörigkeit jener Blattabdrücke zu *Pinites Conwentzianus* nahe legen.

Zur Erklärung der Figuren.

Das Stück, auf welches die Art gegründet ist, hat Dr. Conwentz nach einer gefälligen Mittheilung desselben, auf einem, im Sommer 1878 in Gemeinschaft mit Göppert unternommenen Ausfluge auf einer Halde des Kohlenreviers unweit Altwasser bei Waldenburg in Schlesien gefunden. Der Haupttheil desselben, eine etwa 1^{cm} dicke, 5^{cm} breite und eben so hohe Platte befindet sich jetzt nebst einem kleineren Stücke im mineralogischen Museum der Breslauer Universität; ein noch kleineres, aber dem Ansehen nach besonders gut erhaltenes Stück ist im Besitz des Entdeckers. Alle sind graulich schwarz, von einem Gehalt an kohliger Substanz, denn sowohl ein dünner Splitter brannte sich vor dem Löthrohr fast weifs, als auch das Pulver auf dem Platinblech über der Gasflamme. Der salzsaure Auszug gab eine deutliche, wenn auch nicht starke Eisenreaction und der wässerige Auszug des mit Soda geschmolzenen Pulvers erstarrte mit Salzsäure versetzt beim Stehen zu einer festen Gallert von Kieselsäure. Es ist daher anzunehmen, dafs das Holz durch etwas eisenhaltige Kieselsäure versteint ist, während die kohlige Substanz, wie die Dünnschliffe zeigen, fast ausschliefslich in den oft ganz undurchsichtigen, schwarzen Zellwänden sich erhalten hat und nur in schwachen wolkigen Flecken oder Streifen im Innern der Zellen, namentlich an den vermuthlich früher harzführenden Stellen; doch kann die braune Farbe hier auch wohl durch Eisenhydroxyd hervorgebracht sein.

Auf dem radialen Längsbruch sieht man deutlich hellere, matte und dunklere, glänzende Streifen abwechseln, offenbar von Jahrringen herrührend. Von diesen zeigt der, Fig. 87 in fünffacher Vergröfserung wiedergegebene Querschliff fast 5, etwa 2^{mm} breite, das helle Frühlingsholz (*f*) gegen das dunklere Sommer- und Herbstholz (*s*) meist ziemlich deutlich abgesetzt. Das Frühlingsholz (Fig. 91, *f*) nimmt die gröfsere Hälfte, bis drei Viertel, jedes Jahrrings ein. Es ist nur selten noch in stetigem Zusammenhange mit dem Herbstholz (*h*) des vorangegangenen Jahrrings erhalten, da es aus grofsen, etwa $0{,}05 — 0{,}06^{mm}$, zuweilen aber über $0{,}1^{mm}$ weiten Tracheiden mit dünnen Wänden besteht, welche daher meist sehr verbogen, zerbrochen, an einander gedrückt und dabei von den derberen Herbstholzzellen abgerissen sind. Sonst scheinen sie

trotz allem, wohl vermöge der Durchdringung mit der anfänglich noch zähen Kieselsäure noch ziemlich an ihrer ursprünglichen Stelle erhalten, was namentlich der Längsschnitt zeigt, wo oft ganze Reihen von Frühlingsholz-Zellwänden beinahe gleich weit von einander entfernt und nur wenig gebogen herablaufen.

Daran schliefsen sich nach aufsen die viel besser, oft in langen radialen Reihen erhaltenen Sommerholz-Tracheiden (Fig. 85, *s*—*s*; Fig. 90, *s*; Fig. 91, *s*—*s*), nur noch 0,05—0,03mm im radialen Durchmesser, aber die letzteren meist erheblich breiter, daher im Querschnitt rechteckig, mit ziemlich dicken Wandungen.

An der äufseren Grenze des Jahrrings endlich liegen meist eine oder mehrere Reihen Herbstholz-Tracheiden mit ganz engem, oft nur eine Querspalte bildenden Lumen (Fig. 85, *h*, *h*; Fig. 89, *h*), in radialer Richtung nur 0,015—0,02mm im Durchmesser, dabei so breit wie die Sommerholz-Tracheiden, daher flach-rechteckig, mit dicken Wandungen, in beiden Beziehungen scharf gegen die aufsen anstofsenden Frühlingsholztracheiden abgesetzt. Ist diese Abgrenzung auch nicht überall gleich ausgeprägt, so trifft dies doch vorzugsweise Stellen mit unvollkommener Erhaltung der Gewebe, wie Fig. 91, *s*, und selbst an den wenigen Stellen, an denen die Grenze des Herbst- und des Frühlingsholzes mehr verwischt ist, läfst sich eine erhebliche Verkürzung des radialen Durchmessers von der inneren nach der äufseren Grenze des Jahrrings nicht verkennen. Diese läfst sich überall verfolgen. Beispiele aus denselben radialen Reihen zeigen sie noch deutlicher, als die oben gegebenen Mittelwerthe aus einer gröfseren Zahl Tracheiden in verschiedenen Reihen. So war der mittlere radiale Durchmesser:

In einer Reihe

a) einer Tracheide aus dem Frühlingsholz	0,052mm
„ „ „ „ inneren Sommerholz . .	0,041
„ „ „ „ äufseren Sommerholz . .	0,034
„ „ „ „ Herbstholz (4 Reihen) .	0,016

In einer anderen Reihe

b) einer Tracheide aus dem	Frühlingsholz	0,053^{mm}
„ „ „ „	inneren Sommerholz . .	0,035
„ „ „ „	äufseren Sommerholz . .	0,034
„ „ „ „	Herbstholz (3 Reihen) .	0,017

In einer dritten Reihe

c) einer Tracheide aus dem	inneren Frühlingsholz .	0,083^{mm}
„ „ „ „	äufseren Frühlingsholz .	0,049
„ „ „ „	Sommerholz	0,027
„ „ „ „	Herbstholz (6 Reihen) .	0,017

Eine so durchgreifende Ausbildung abgegrenzter Zuwachsringe konnte bei *Araucarites Tchihatcheffianus* die Vermuthung unterstützen, dafs derselbe nicht aus der Steinkohlenformation herstamme, sondern einer viel jüngeren Ablagerung angehöre, bei deren Bildung schon ein Wechsel sehr verschiedener Jahreszeiten stattgefunden habe; daran aber, dafs *Pinites Conwentzianus* aus der Steinkohlenformation herstamme, haben wir gar keinen Grund zu zweifeln und wir werden ebensowenig anstehen können, auch schon zur Zeit ihrer Ablagerung in jedem Jahr eine regelmäfsige Folge von Zeiträumen anzunehmen, in welchen auf ein rasches Wachsthum ein verlangsamtes und auf dieses eine Zeit der Ruhe folgte.

Ebenso auffallend wie die Ausbildung der Jahrringe ist die Vertheilung der Tüpfel auf den Längswänden der Tracheiden. Die grofse Mehrzahl der letzteren ist überhaupt frei davon, namentlich die radialen Wände der Herbstzellen; die der weiteren Tracheiden zeigen hier und da Tüpfel. Fig. 86, aus dem Göppert'schen Nachlafs, zeigt freilich die radialen Wände aller Tracheiden (*tr*) ihrer ganzen Länge nach mit Tüpfelreihen besetzt. Bei der Treue der beiden anderen Figuren 85 und 87, habe ich geglaubt, auch diese, offenbar etwas schematische Abbildung nicht übergehen zu dürfen, obwohl ich selbst an keinem Präparate eine gleich vollkommene Ausbildung der Tüpfel gefunden habe. Die Anord-

nung, die Gestalt, die verschiedene Gröfse der letzteren stimmen mit den verglichenen Schliffen so weit überein, dafs es recht wohl möglich ist, dafs die Zeichnung einem wirklichen Schliffe nachgebildet ist. In der Regel aber finden sie sich bei weitem häufiger auf den Tangentialschliffen. Mag ein Theil derselben immerhin radialen Wandstücken angehören, welche bei dem Zerbrechen und Verschieben der Wände in eine annähernd tangentiale Lage gekommen sind, so bleibt das häufigere Auftreten von Tüpfeln an sich schon auffallend; nicht selten aber liegen diese dicht neben genau rechtwinklig getroffenen Markstrahlen, also gewifs auf den nach aufsen oder nach innen gewendeten Tracheidenwandungen, ohne dafs zwischen ihnen und den auf den seitlichen Wänden liegenden Tüpfeln ein durchgreifender Unterschied aufzufinden wäre.

Auf den einzelnen Längswänden sind sie am häufigsten einreihig, einander berührend oder doch sehr genähert (Fig. 86, *t*; Fig. 93), öfter durch kleine Zwischenräume von $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{5}$ ihrer Höhe oder etwas darüber getrennt (Fig. 86, *t'*; Fig. 94, *t*; Fig. 98, *t*); selten so weit von einander entfernt, dafs der Zwischenraum das Mehrfache ihrer Höhe beträgt (Fig. 94, *t''*; Fig. 96). Wo sie zweireihig sind, stehen fast ausnahmslos je zwei auf gleicher Höhe neben einander (Fig. 86, *t''*; Fig. 95; Fig. 97, *t*; Fig. 98, *t'*). Dafs hier und da einer etwas höher oder niedriger liegt, wie Fig. 97, *t'*, ja einmal ein Tüpfel mit zwei benachbarten alternirt, das sind eben so vereinzelte Ausnahmsfälle, wie das Vorkommen neben einander stehender Tüpfel bei den Cordaiten- und Araucariten-Hölzern.

Fast eben so schwankend, wie ihr gegenseitiger Abstand ist auffallender Weise die Gröfse der Tüpfel. Die gröfsten finden sich unter den einreihigen. Wo sie nicht schräg getroffen sind, erscheinen sie hier als kreisrunde Scheiben von 0,025^{mm}, vereinzelt selbst bis 0,027^{mm} Durchmesser mit rundem Porus. Fast ebenso grofs sind oft die zweireihigen Tüpfel; daneben aber kommen bei diesen, wie bei den einreihigen sehr viel kleinere vor, deren Durchmesser bis auf 0,02^{mm}, ja bis auf 0,014^{mm} heruntergeht, wie aus den Figuren 93—96 und 98, *t*, *t'* ersichtlich ist. Von diesen, noch ringsum oder doch so weit von der braunen Tracheidenwand umgebenen Tüpfeln, dafs an ihrer vollständigen Erhaltung nicht zu zweifeln ist, wohl zu unterscheiden sind s e h r k l e i n e T ü p f e l auf den tangentialen, seltener, wie auch die grofsen Tüpfel, auf den radialen Wän-

den der Tracheiden, wo diese in farblose, durchsichtige Kieselmasse verwandelt sind. In ähnlichen Abständen, wie die gewöhnlichen Tüpfel, in einfachen Reihen (Fig. 98, *t''*) oder zwei neben einander (Fig. 97, *t*, *t'*), in allen Abstufungen bis zur Gröfse kleiner Tüpfelporen, aber noch mit scharf begrenztem, braunen Ringe umzogen, sind sie gewifs nur unvollständig erhaltene Tüpfel, wie wir sie ähnlich bei *Cordaites medullosus* (Taf. II, Fig. 23, 24) und bei *Araucarites cupreus* (Taf. IX, Fig. 68, *t'*) gefunden haben.

Noch mannigfaltiger als die Tüpfel sind die Markstrahlen ausgebildet. Zum bei weitem gröfsten Theile sind dieselben einfache (Fig. 85, *m*; Fig. 86, *m*), wenn man darunter alle die begreift, welche nur aus einer Hauptreihe von Zellen bestehen. Leider sind die Einzelnheiten ihres Baues wegen der meist zu undurchsichtiger Kohle gewordenen Wand nur selten recht zu erkennen; doch sieht man ihre wagerechten Zellwände in starren, geraden Linien von innen nach aufsen laufen (Fig. 86, *m*; Fig. 92), mit nur wenig schiefen Querwänden, und wo nicht die grofsen Tüpfel der Tracheiden durchscheinen, wie in Fig. 86, scheinen in jedem durch eine Markstrahlzelle und eine Tracheide gebildeten Felde 1 — 2 kleine Tüpfel zu stehen (Fig. 92), deren wahre Beschaffenheit aber nirgends mit der wünschenswerthen Deutlichkeit zu erkennen ist. Die einzelnen Zellen sind etwa $0{,}025^{mm}$ hoch; der ganze Markstrahl meist nur 3 — 8 Stockwerke hoch.

Den Übergang zu den grofsen, harzführenden Markstrahlen machen solche, welche noch wenig höher sind ($0{,}2 — 0{,}3^{mm}$), deren Zellen aber ungleich hoch und tonnenförmig sind und in den Einbuchtungen zwischen je zweien einen weiten Intercellulargang oder eine kleine dreikantige Zelle haben (Fig. 99, *z*) — welches von beiden, ist bei der Art der Erhaltung der Wandungen nicht leicht zu entscheiden; die gröfseren jedenfalls sind wahrscheinlich Zellen und der Markstrahl dann freilich kein einfacher mehr. In der Mitte endlich ist eine sehr grofse Zelle oder wahrscheinlicher ein durch Auflösung der Scheidewände mehrerer Zellen entstandener Hohlraum (*hz*), welcher dem Anschein nach einen Harzgang gebildet hat.

Ganz ähnlich sind endlich die grofsen Markstrahlen gebaut, welche man schon im Querschnitt (Fig. 85, *m'*; Fig. 88, *m*, *m*) als breite

Streifen zwischen den Tracheidenreihen verfolgen kann. Dieselben sind 0,6 — 0,75^{mm} und etwa 12 — 25 Stockwerke hoch, im tangentialen Schnitt (Fig. 87, *m'*; Fig. 100) lanzettlich, zugespitzt, nur oben und unten einschichtig, gegen die Mitte hin 3 — 5 Zellen breit und hier mit einem grofsen rundlichen Hohlraum (*hz*) mit dunkelbraunen Flecken und Streifen, wohl den Resten eines Harzganges, der durch Zerstörung der hier ursprünglich lagernden Zellen entstanden ist.

Endlich ziehen unsere Aufmerksamkeit auf sich zahlreiche tangentiale etwa $\frac{1}{2}^{mm}$ lange dunkle Striche (Fig. 88, *hz*), welche ziemlich gleichmäfsig im Sommerholz (*s*) von dessen innerer Grenze am Frühlingsholze desselben Jahrrings bis zu dessen äufserer Grenze vertheilt sind; sehr selten findet sich einer jenseits der letzteren in den angrenzenden Theilen des Frühlingsholzes des nächsten Jahrrings. Der mittlere und Haupttheil derselben ist, ähnlich dem grofsen Harzgange der zusammengesetzten Markstrahlen ohne organische Struktur mit braunen oder schwarzen Flecken und Streifen erfüllt, welche wohl als Überreste eines harzigen Inhalts gedeutet werden können. Die an diesen breitgezogenen Streifen grenzenden Tracheiden sind mehr oder weniger zerstört, zerbrochen, verbogen, zusammengedrückt; die von innen auf sie zulaufenden 8 — 12, zuweilen bis 20 Tracheidenreihen gehen gegen sie hin meist fächerförmig aus einander; die mittleren sind unterbrochen, die seitlichen umziehen sie im Bogen, um auf der Aufsenseite wieder zusammenzutreten. Dafs aber die Entwickelung des Holzes dabei gestört worden ist, kann man daraus schliefsen, dafs die äufsere Grenze des Jahrrings fast vor jedem solchen Harzbehälter eine deutliche Einbiegung zeigt (Fig. 88). Die einfachen Markstrahlen lassen keine bestimmte Beziehung zu ihnen erkennen; sie laufen bald seitlich nahe an ihnen vorüber, bald sind sie durch die Harzbehälter unterbrochen; dagegen durchsetzen die grofsen Markstrahlen (Fig. 88, *m*, *m*) besonders grofse Harzbehälter und es mag die Harzabsonderung der einen wohl mit der der anderen in Beziehung stehen.

Einfache Harzgänge oder harzführendes Holzparenchym scheint nicht vorhanden zu sein.

Erklärung der Abbildungen.

Bei allen Figuren bezeichnet:

H das Holz,
M das Mark,
m den Markstrahl,
mt die Markstrahltüpfel,
p den Porus der Tüpfel,
t die Tüpfel der Tracheidenwand,
tr die Tracheiden.

Die neu gezeichneten Figuren sind mit * bezeichnet; die Stärke der Vergröfserung ist in Klammern beigesetzt.

Tafel I.

Fig. 1—4. *Cordaites Brandlingii* Göpp. (S. 12).

Fig. 1*. Querschnitt des Holzes $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 2*. Radialer Längsschnitt $\left(\frac{200}{1}\right)$. *mt* undeutliche Höfe von Markstrahltüpfeln; *mt'* Markstrahltüpfel.

Fig. 3. 4*. Kleine Theile eines ähnlichen Schnitts $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 5—10. *Araucarites Thannensis* Göpp. (S. 18).

Fig. 5*. Querschnitt aus dem Holzkörper. *tr'* wenig-, *tr''* stark *S*förmig zusammengedrückte Tracheide; *t*, *t* quer durchschnittene Tüpfel $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 6*. Radial-Längswand einer Tracheide mit sehr breit gedrückten Tüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 7*. Reihe von Tüpfeln mit unvollständig erhaltenem Tüpfelhof $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 8*. Markstrahl im radialen Längsschnitt; dessen Tüpfel mit rundem (*mt*, *mt''*) und spaltenförmigem Porus (*mt'*); *mt'''* Hof eines Tüpfels $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 9*. Tangentialer Längsschnitt mit 2 einfachen Markstrahlen; *t* durchschnittene Tüpfel $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 10*. Markstrahl z. Th. zweischichtig im tang. Schnitt $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Cordaites medullosus Göpp. (S. 22).

Fig. 11. Querschliff eines Stämmchens von Chemnitz, mit schwacher Andeutung von Holzkreisen (nat. Gr.).

Tafel II.

Fig. 12 — 24. *Cordaites medullosus* Göpp. (S. 22).

Fig. 12. Querschliff eines stärkeren, breit gedrückten Stammes, von Chemnitz (nat. Gr.).

Fig. 13. 14. Zwei Stämmchen mit Astnarben, *a*, *a* (nat. Gr.).

Fig. 15. Stammstück, der Länge nach so gespalten, dafs der Markcylinder (*M*) blofsgelegt ist und die Querfächerung desselben deutlich wird (nat. Gr.)

Fig. 16. Horizontalschliff eines kleinen Stämmchens (nat. Gr.).

Fig. 17. Ein Theil des vorigen, stark vergröfsert. *M* Mark; *H* Grenze zwischen Mark und Holz; *tr* Tracheiden des Holzes; *m* Markstrahl.

Fig. 18*. Querschnitt eines kleinen Theils des Holzes; *t* undeutliche Spur eines quer durchschnittenen Tüpfels $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 19. Radialer Längsschnitt aus dem Holzkörper von Fig. 16 (Vergr. wie Fig. 17).

Fig. 20*. Doppelte Reihe alternirender Tüpfel, nach aufsen offen, von einem ähnlichen Schliff, wie Fig. 19 $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 21*. Reihe quer-ovaler Tüpfel mit grofsem Porus $\left(\frac{400}{1}\right)$.

Fig. 22*. Dunkle Tracheidenwand mit undeutlich begrenztem, elliptischen Tüpfelhof und gekreuzten Porenspalten $\left(\frac{400}{1}\right)$.

Fig. 23*, 24*. Stücke von Tracheidenwandungen mit kreisrunden z. Th. zerbrochenen Tüpfeln mit rundem Porus $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Tafel III.

Fig. 25 — 26. *Cordaites medullosus* Göpp. (S. 24).

Fig. 25*. Tangentialer Längsschnitt mit niedrigen Markstrahlen, mit breiten, aufgetriebenen Zellen $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 26. Desgl. mit höheren Markstrahlen aus dem Stück Tafel II, Fig. 16; Vergr. wie bei Fig. 17, 19.

Fig. 27 — 35. *Araucarites Ungeri* Göpp. (S. 25).

Fig. 27. Querschliff eines halben Stämmchens (nat. Gr.).

Fig. 28. Längsschliff desselben (nat. Gr.).

Fig. 29*. Querschnitt aus dem Holzkörper; *tr'*, *tr''* sich auskeilende Tracheidenreihen $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 30. Radialer Längsschnitt mit einstöckigem Markstrahl (*m*); Querwand der Zellen desselben sehr schief gestellt $\left(\frac{440}{1}\right)$.

Fig. 31. Radiale Längswand zweier Tracheiden mit zwei und dreireihigen Tüpfeln $(\frac{200}{1})$.

Fig. 32*. Radialer Längsschnitt mit einreihigen, stellenweise zweireihigen Tüpfeln $(\frac{200}{1})$.

Fig. 33*. Tangentialer Längsschnitt mit einstöckigen (*m, m'*), einem undeutlich zweistöckigen, einem ursprünglich wohl mehrstöckigen (*m''*) Markstrahl und mit durchschnittenen Tüpfeln (*t*) in den radialen Tracheidenwänden $(\frac{200}{1})$.

Fig. 34*. Umrifs eines einfachen Markstrahls im Tangentialschnitt $(\frac{200}{1})$.

Fig. 35*. Umrifs eines einschichtigen Markstrahls (*m*) und eines unregelmäfsig-zweischichtigen (*m'*) im Tangentialschnitt $(\frac{200}{1})$.

Tafel IV.

Fig. 36—39. *Araucarites Beinertianus* Göpp. (S. 30).

Fig. 36*. Querschnitt aus dem Holzkörper mit ziemlich gut erhaltenen (*tr*) und einigen ganz zusammengedrückten Tracheiden (*tr'*), und einem zweischichtigen Markstrahl (*m*) $(\frac{200}{1})$.

Fig. 37*. Radialer Längsschnitt. Markstrahl mit zweifelhaften Tüpfeln (*mt*) $(\frac{200}{1})$.

Fig. 38*. Dgl. Einige Tracheiden mit ein- und zweireihigen Tüpfeln (*t'*); die Tüpfel einer Reihe (*t''*) sich deutlich verjüngend $(\frac{200}{1})$.

Fig. 39*. Tangentialer Längsschnitt mit einem Theil eines der gewöhnlichen einfachen Markstrahlen (*m*) und 2 unregelmäfsig mehrschichtigen (*m', m''*); in den radia- Wandungen Reihen durchschnittener Tüpfel (*t, t*) $(\frac{200}{1})$.

Fig. 40—41. *Araucarites Tchihatcheffianus* Göpp. (S. 33).

Fig. 40. Streifen aus dem Querschnitt eines Stammes mit sehr breiten Jahrringen, aus Tchihatcheff, voyaye, Taf. 33, Fig. 18, z. Th.

Fig. 41. Streifen aus dem Querschnitt eines Stückes (Astes?) mit engeren Jahrringen, ebendaher, Taf. 32, Fig. 17, z. Th.

Tafel V.

Fig. 42—50. *Araucarites Tchihatcheffianus* Göpp. (S. 33).

Fig. 42*. Querschnitt aus dem Holzkörper mit einer Jahrringgrenze. *f'* älteres Frühlingsholz des äufseren Jahrrings; *f''* jüngeres sowohl des inneren wie des äusseren Jahrrings; *s* Sommerholz; *s', s'* strukturlose Stellen zwischen dessen Tracheiden; *h—h* Herbstholz, hier nur 1—2 Tracheidenschichten stark; *t, t* durchschnittene Tüpfel in den radialen Tracheidenwandungen $(\frac{200}{1})$.

Fig. 43*. Kleiner Theil aus gut erhaltenem Frühlingsholz; die Tracheiden zeigen dicke Wandungen $(\frac{200}{1})$.

Fig. 44*. Radialer Längsschnitt; *h* enge Tracheiden des Herbstholzes; *f'* weite des älteren, *f''* noch weitere des jüngeren Frühlingsholzes $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 45*. Tangentialer Längsschnitt mit mehreren einfachen Markstrahlen und einem in der Mitte zweischichtigen (*m*); *t* durchschnittene Tüpfel in den radialen Tracheidenwandungen $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 46*. Markstrahl, oben und unten eine Zelle hoch zweischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 47* und 48*. Markstrahlen, in der Mitte 2—3 Zellen hoch zweischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 49*. Zwei über einander stehende Markstrahlen fast zusammenfliefsend, der untere 3—4 Zellen hoch zweischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 50*. Radialer Längsschnitt einiger Markstrahlzellen mit Tüpfeln (*mt*) $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Tafel VI.

Araucarites Tchihatcheffianus Göpp. (S. 33).

Fig. 51. Radialer Längsschnitt aus dem Holz mit Tüpfeln der Tracheiden und einem Markstrahl mit gut erhaltenen kleinen Tüpfeln mit schiefem Porenspalt.

Araucaria Cunninghami Ait.

Fig. 52. Probe des verkohlten Holzes, noch deutlich die Tüpfelung zeigend, zum Vergleich mit den ähnlichen Theilen fossiler Hölzer, namentlich des *Araucarites carbonaceus*.

Fig. 53—59. *Araucarites carbonaceus* Göpp. (S. 38).

Fig. 53. Querschnitt eines kleinen Stammes mit Andeutung concentrischer Holzkreise und mit Mark (*M*) (nat. Gr.).

Fig. 54*. Querschnitt des Holzes; die Tracheidenwände verkohlt, das Innere hell, mit bräunlichen Streifen und Wolken. Bei *m* ein undeutlicher Markstrahl $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 55*. Radiale Längswand einer Tracheide mit einer Reihe Tüpfel mit steiler, bald links- (*p'*), bald rechtsläufiger (*p''*) Porenspalte $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 56*. Radialer Längsschnitt; eine Tracheide mit zweireihigen Tüpfeln und meist gekreuzten Porenspalten $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 57*. Dgl. mit dreireihigen Tüpfeln und sehr verschieden gebildeten Porenspalten $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 58*. Radialer Längsschnitt durch einen Markstrahl mit kleineren (*p'*) und gröfseren (*p''*) zweifelhaften Markstrahltüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 59*. Tangentialer Längsschnitt mit 2 einfachen Markstrahlen $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Tafel VII.

Araucarites carbonaceus Göpp. (S. 39).

Fig. 60. Querbruch eines grofsen Stammes mit deutlichen concentrischen Kreisen, von der Königin-Luise-Grube in Oberschlesien (nat. Gr.).

Tafel VIII.

Araucarites carbonaceus Göpp. (S. 38).

Fig. 61. Radiale Längsbruchfläche eines breitgedrückten Stammes; die Längsstreifen der Holzfasern durch die Querstreifen der Markstrahlen gekreuzt; dadurch unterscheiden sich diese Stücke von den ihnen sonst ähnlichen Blättern der Cordaiten und etwaiger Monocotyledonen, die dergleichen Querstreifen entbehren.

Tafel IX.

Fig. 62—65. *Araucarites Elberfeldensis* Göpp. (S. 41).

Fig. 62*. Querschnitt aus dem Holzkörper; *t*, *t* Andeutung von durchschnittenen Tüpfeln in der Tracheidenwand $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 63*. Radialer Längsschnitt mit vierreihigen Tüpfeln (*t*, *t*) auf den Tracheidenwänden und kleinen, nicht ganz sicheren Tüpfeln (*mt*) auf den Markstrahlzellen $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 64*. Dgl. mit ein- und zweireihigen Tüpfeln und einigen kurz durchschnittenen Markstrahlzellen (*m*) $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 65*. Tangentialer Längsschnitt mit einem einfachen Markstrahl $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 66—69. *Araucarites cupreus* Göpp. aus Böhmen (S. 45).

Fig. 66. Stammstück mit angeflogenem Kupfergrün, von der Grube Emilie Pauline am Berge Kossinitz (Kozinec) bei Starkenbach in Böhmen, von der Seite gesehen (nat. Gr.).

Fig. 67*. Querschnitt eines kleinen Theils des Holzkörpers; die Tracheiden dickwandig, z. Th. noch ziemlich gut erhalten (*tr*), z. Th. *S*förmig zusammengedrückt (*tr'*) $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 68*. Radialer Längsschnitt mit grofsen, gedrängten Tüpfeln (*t*) und kleinen, entfernten (unvollständig erhaltenen) *t'* $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 69. Tangentialer Längsschnitt mit einfachem Markstrahl (*m*), stellenweise zweischichtigen Markstrahlen (*m'*, *m'*), kleinen Tüpfeln auf den tangentialen (*t'*), und durchschnittenen Tüpfeln (*t*) in den radialen Tracheidenwänden $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Tafel X.

Fig. 70—72. *Araucarites cupreus* G. vom Ural (S. 47).

Fig. 70*. Querschnitt aus dem Holzkörper; *t'* durchschnittene Tüpfel in 2 fast tangential gerichteten radialen Wänden von Tracheiden $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 71*. Radialer Längsschnitt; Markstrahlen (*m, m*) ohne eigene Tüpfel $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 72*. Tangentialer Längsschnitt; *t, t* durchschnittene, z. Th. schräg, Tüpfel in den radialen Längswänden der Tracheiden $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 73—77. *Araucarites cupreus* G. von Mansfeld (S. 49).

Fig. 73*. Querschnitt durch einige Reihen grofser, Fig. 74* kleiner Tracheiden, von welchen letzteren eine Reihe (*tr*) mit schwarzem Inhalt erfüllt ist; *t, t'* durchschnittene Tüpfel $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 75*. Radialer Längsschnitt durch Tracheiden mit zwei- und dreireihigen Tüpfeln, von denen nach unten hin nur noch die Porenspalten (*p, p*) erhalten sind $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 76*. Radialer Längsschnitt durch einen Markstrahl mit kleinen Markstrahltüpfeln (*mt*) und grofsen Löchern (*m, m'*) in der Tracheidenwand $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 77*. Tangentialer Längsschnitt mit einem einfachen Markstrahl (*m*), einem an zwei Stellen zweischichtigen Markstrahl (*m', m''*) und durchschnittenen Tüpfeln (*t, t*) in den radialen Tracheidenwänden $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Tafel XI.

Fig. 78—84. *Araucarites cupreus* G. von Mansfeld (S. 51).

Fig. 78*. Radiale Längswand einer Tracheide mit zerstreuten, etwas kleineren Tüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 79*. Tangentialer Längsschnitt mit 2 einfachen Markstrahlen und zerstreuten, kleinen Tüpfeln auf der tangentialen Tracheidenwand $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 80*. Tangentialer Durchschnitt eines einfachen, nur in einem Stockwerk zweischichtigen Markstrahls $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 81*, 82*. Dgl., aber 2 Stockwerke zweischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 83*. Markstrahl, oben zwei-, unten bis dreischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 84*. Dgl. 3 Stockwerke zweischichtig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 85—87. *Pinites Conwentzianus* G. (S. 54).

Fig. 85. Querschnitt durch den äufseren Theil eines Jahrrings; *s, s* Sommerholz; *h, h* Herbstholz; *m* einfacher, *m'* zusammengesetzter Markstrahl mit grofsem Harzgang.

Fig. 86. Radialer Längsschnitt; *tr* Tracheiden mit einreihigen (*t'*) und zweireihigen (*t''*),

auf gleicher Höhe stehenden Tüpfeln; *m* Markstrahl mit durchscheinenden Tracheidentüpfeln.

Fig. 87. Tangentialer Längsschnitt; *m* einfacher, *m'* zusammengesetzter Markstrahl mit Harzgang *hz.*

Tafel XII.

Fig. 88—100. *Pinites Conwentzianus* Göpp. (S. 55).

Fig. 88*. Querschnitt eines Stammstücks; *f* Frühlingsholz, *s* Sommerholz eines Jahrrings; *m, m* grofse Markstrahlen; *hz* Harzbehälter $\left(\frac{5}{1}\right)$.

Fig. 89*. Äufsere Grenze eines Jahrrings; *f* Frühlingsholz des nächstjüngeren, *h* Herbstholz des älteren Jahrrings $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 90*. *s* Theil des Sommerholzes des letzteren Jahrrings $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 91*. *f* Frühlingsholz desselben Jahrrings; *s—s* Herbst- und Sommerholz des nächstälteren $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 92*. Radialer Längsschnitt durch einen Markstrahl mit undeutlichen Markstrahltüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 93*. Stück einer Tracheide mit grofsen, einreihigen, sich berührenden oder genäherten Tüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 94*. Dgl. mit kleineren, etwas entfernten Tüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 95*. Dgl. mit zweireihigen Tüpfeln $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 96*. Dgl. mit weit von einander abstehenden Tüpfeln von mittlerer Gröfse $\left(\frac{200}{1}\right)$.

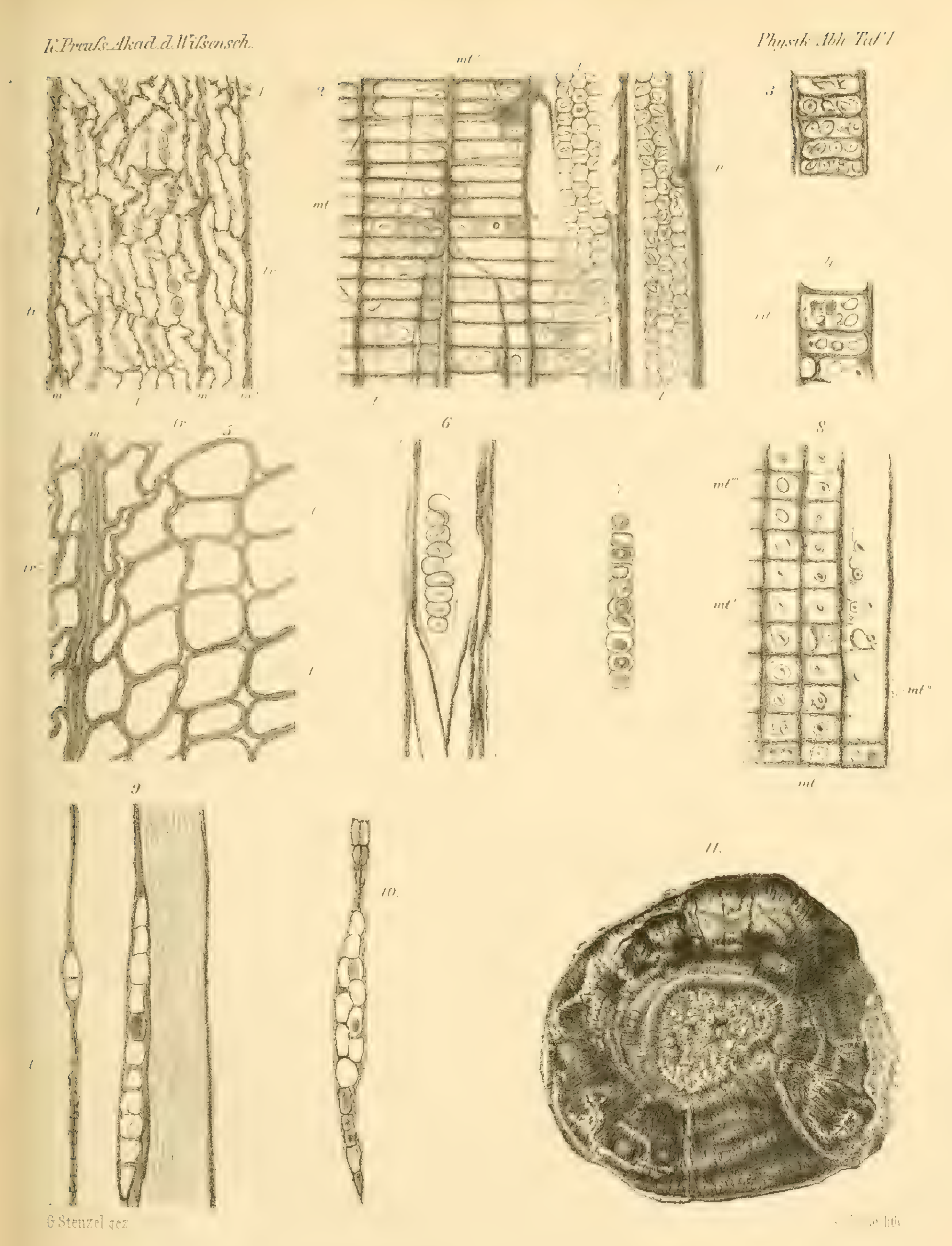
Fig. 97*. Stück einer Tracheidenwand mit kleinen Ringen, den Überresten eben so vieler Tüpfel, von denen je 2 bald neben einander (*t*), bald verschieden hoch stehen (*t'*). Porus winzig $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 98*. Stück einer Tracheide unten mit grofsen, ein- bis zweireihigen Tüpfeln (*t, t'*), oben mit kleinen Ringen, ähnlich, doch etwas gröfser, als Fig. 97 $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 99*. Tangentialer Durchschnitt eines mittleren Markstrahls mit Harzgang (*hz*) und kleinen, seitlich an den Fugen der gröfseren eingeschalteten Zellen (?) (*z*) $\left(\frac{200}{1}\right)$.

Fig. 100*. Tangentialer Durchschnitt eines grofsen Markstrahls mit Harzgang (*hz*) $\left(\frac{200}{1}\right)$.

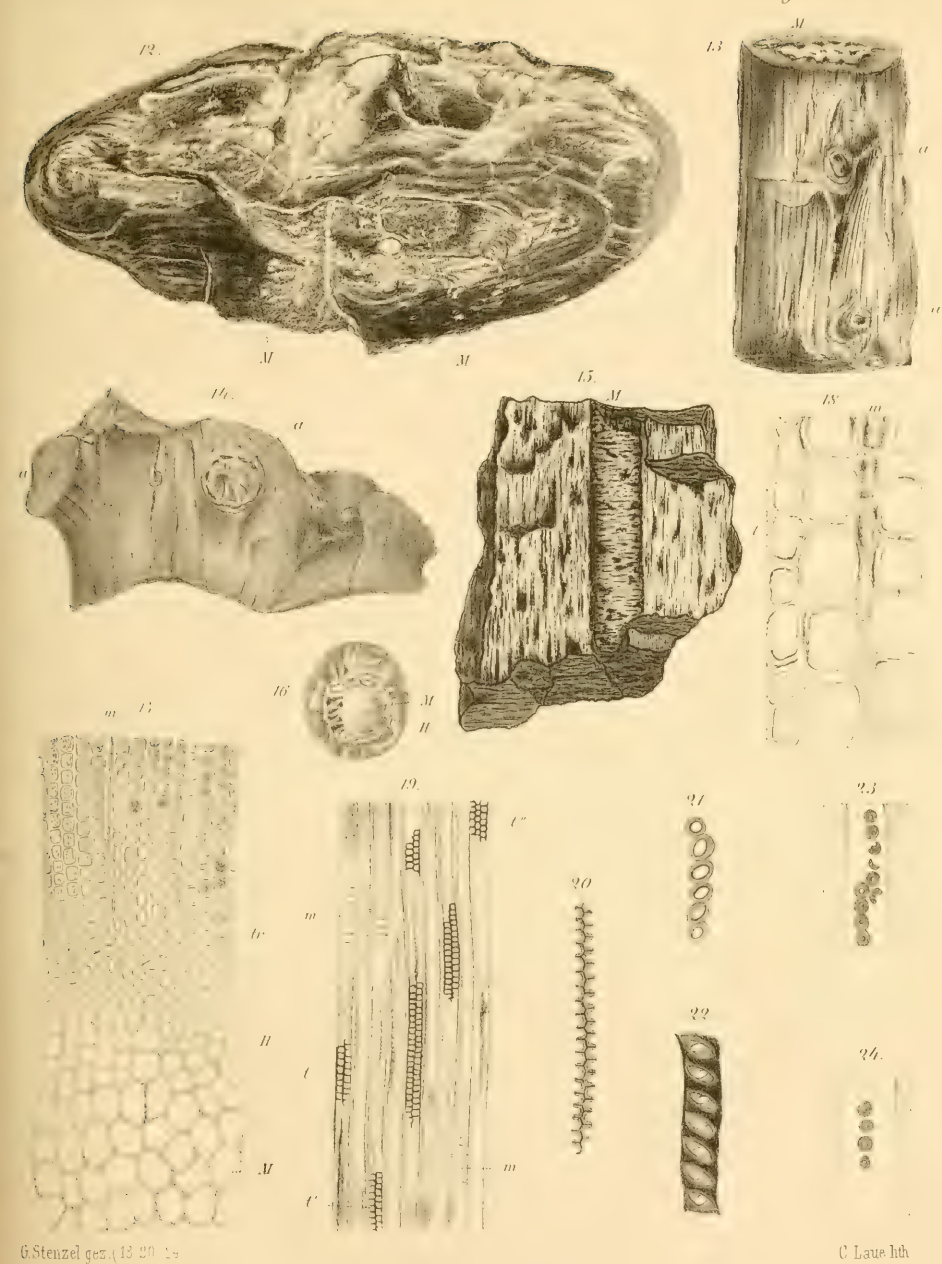
Inhalt.



G. Stenzel gez.

1–4: Cordaites Brandlingii. — 5–10: Ar. Thannensis.
11: C. medullosus.

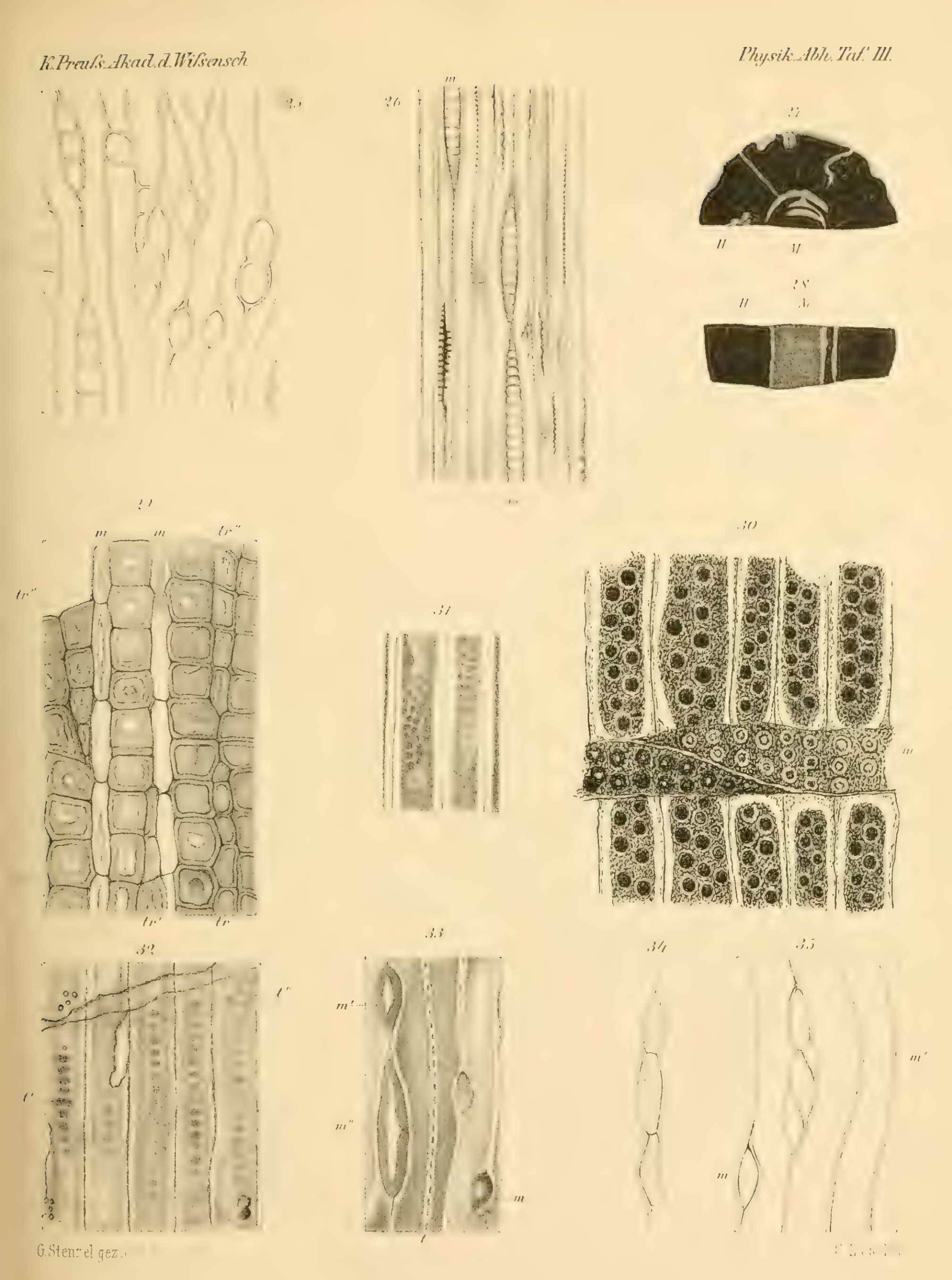
Göppert, Coniferenhölzer.



G. Stenzel gez. (13. 20. 24.) C. Laue lith.

12–24: Cord. medullosus.

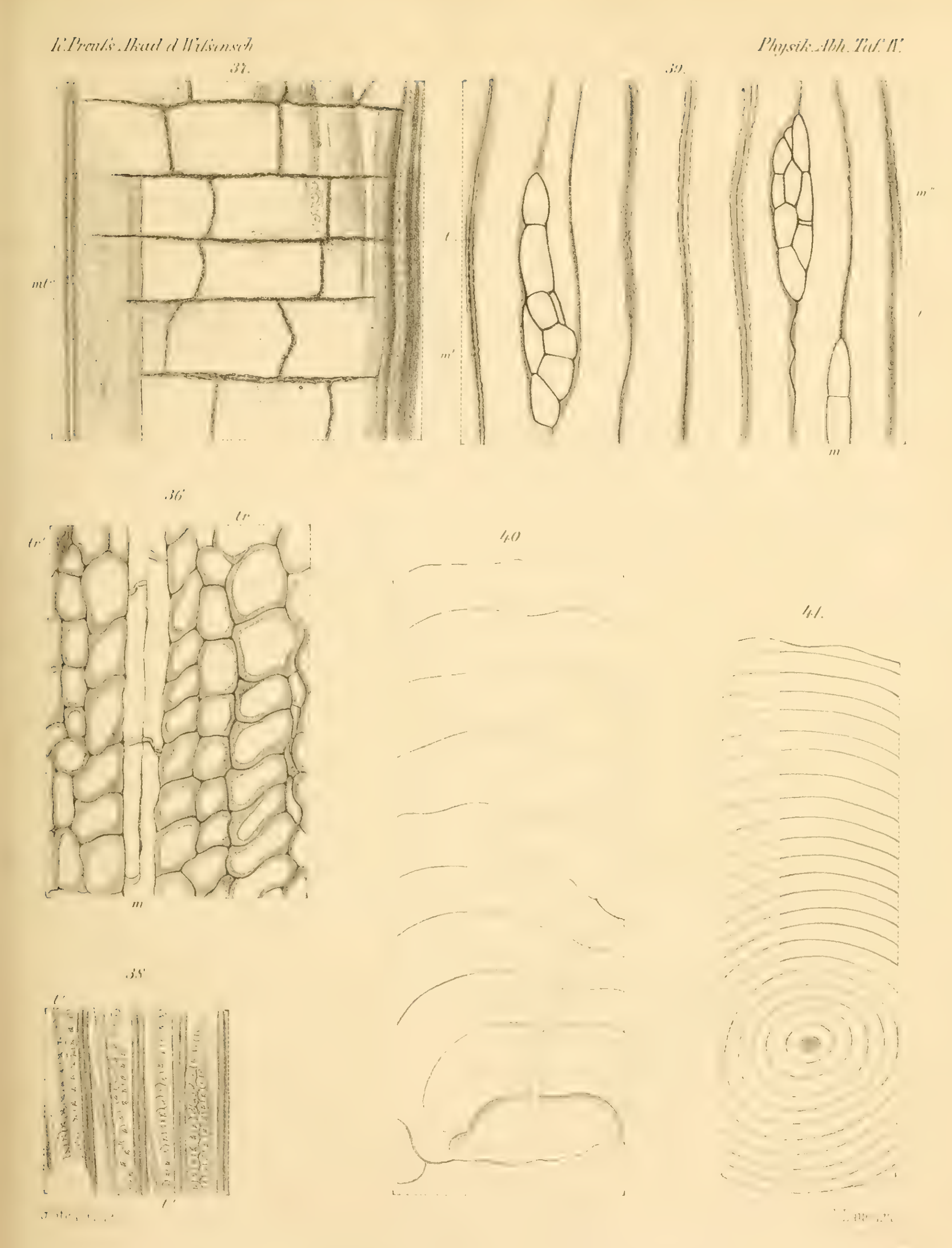
Göppert, Coniferenhölzer



G. Stenzel gez.

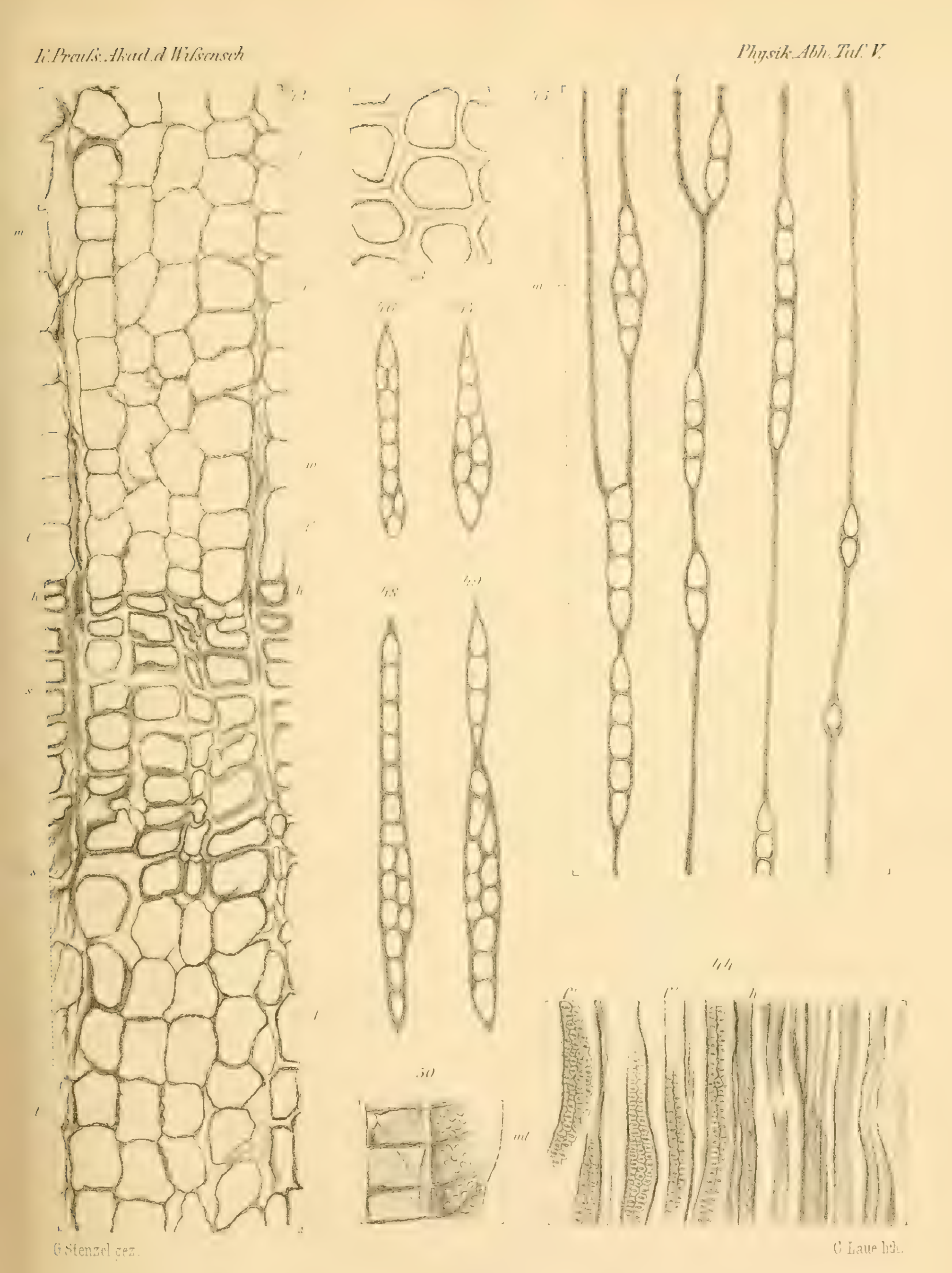
25–26: Cord. medullosus. – 27–35: Araucarites Ungeri.

Göppert, Coniferenhölzer.



36–39: Ar. Beinertianus. — 40. 41: Ar. Tchihatcheffianus.

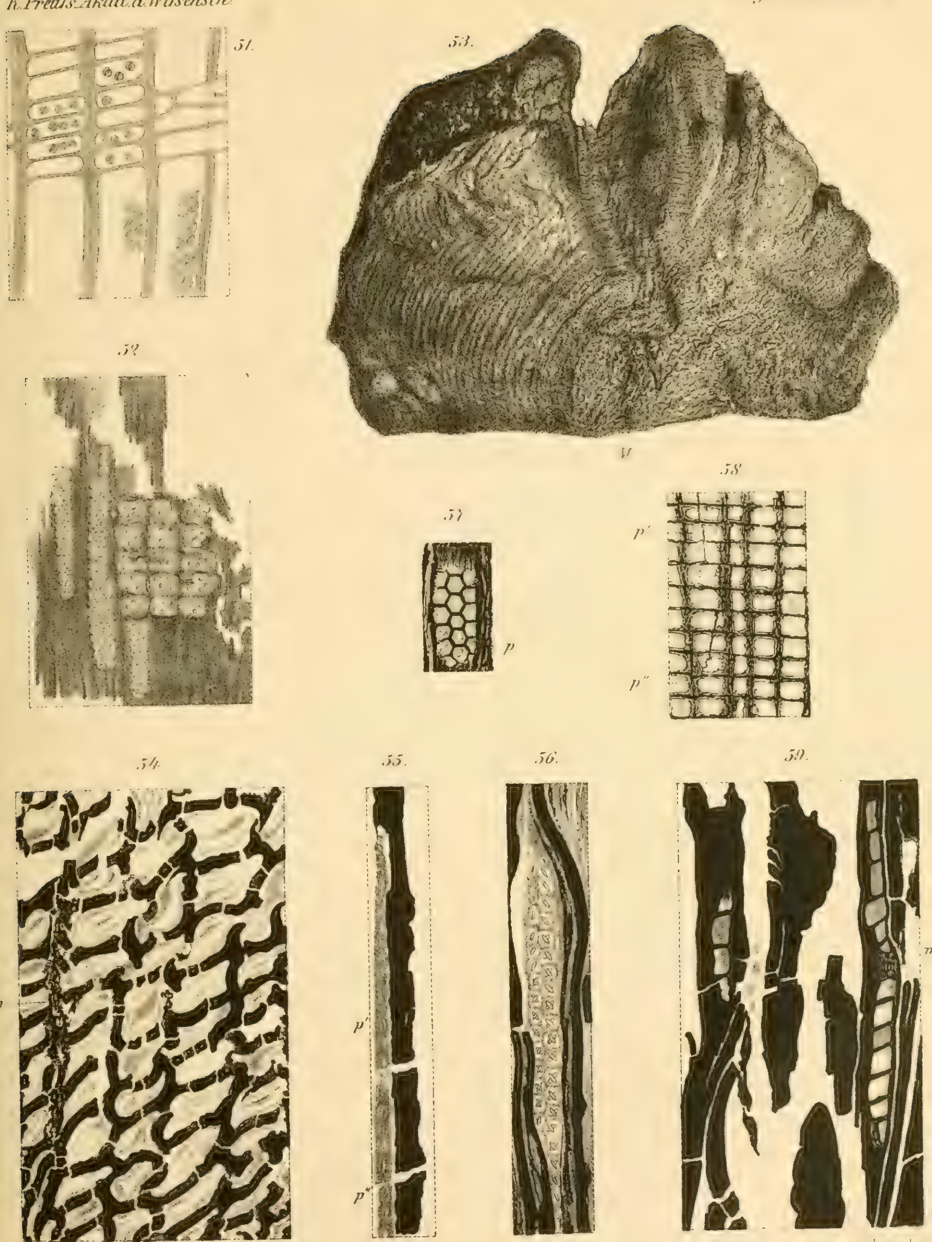
Göppert, Coniferenhölzer.



G. Stenzel gez. C. Laue lith.

42–50: Araucarites Tchihatcheffianus.

Göppert, Coniferenhölzer.



51: Ar. Tchihatcheffianus. — 52: Araucaria Cunninghami.
53 - 59: Araucarites carbonaceus.

Göppert, Coniferenhölzer



60: Ar. carbonaceus.

Göppert, Coniferenhölzer

61 ($\frac{10}{1}$).



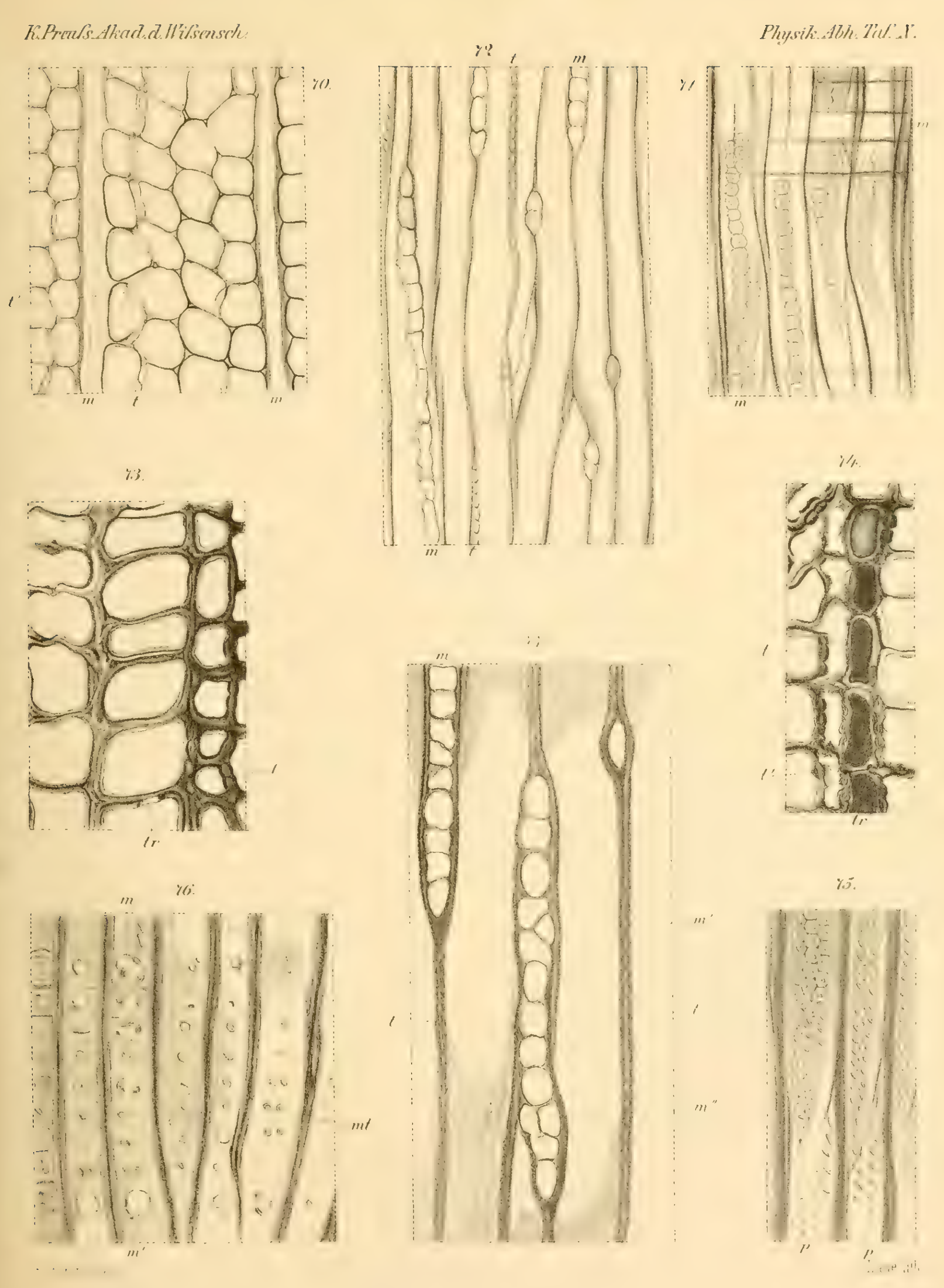
61: Ar. carbonaceus.

Göppert, Coniferenhölzer

G. Stenzel gez. 62.   C. Laue lith

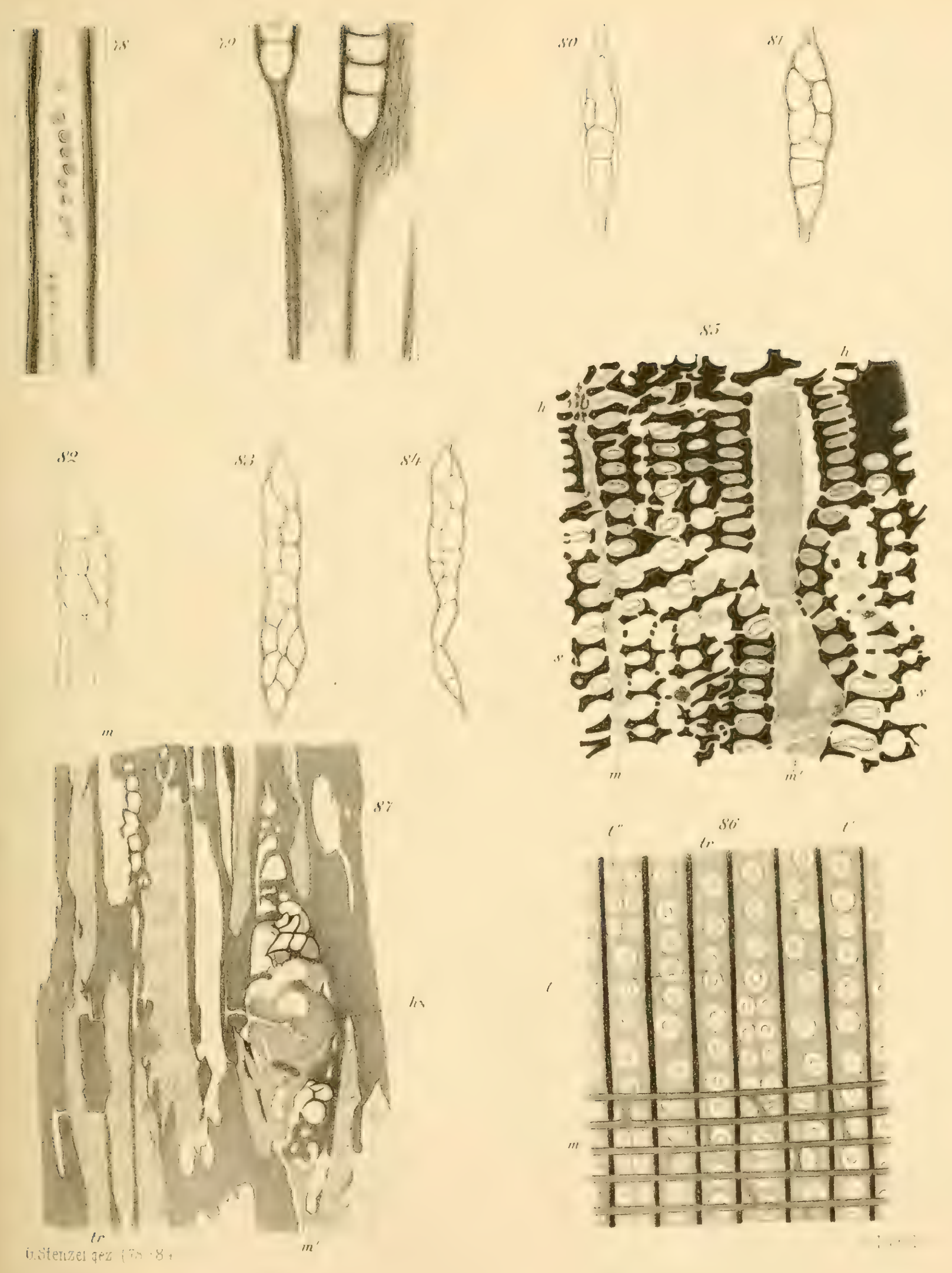
62–65: Ar. Elberfeldensis. — 66–69: Ar. cupreus (aus Böhmen.)

Göppert, Coniferenhölzer.



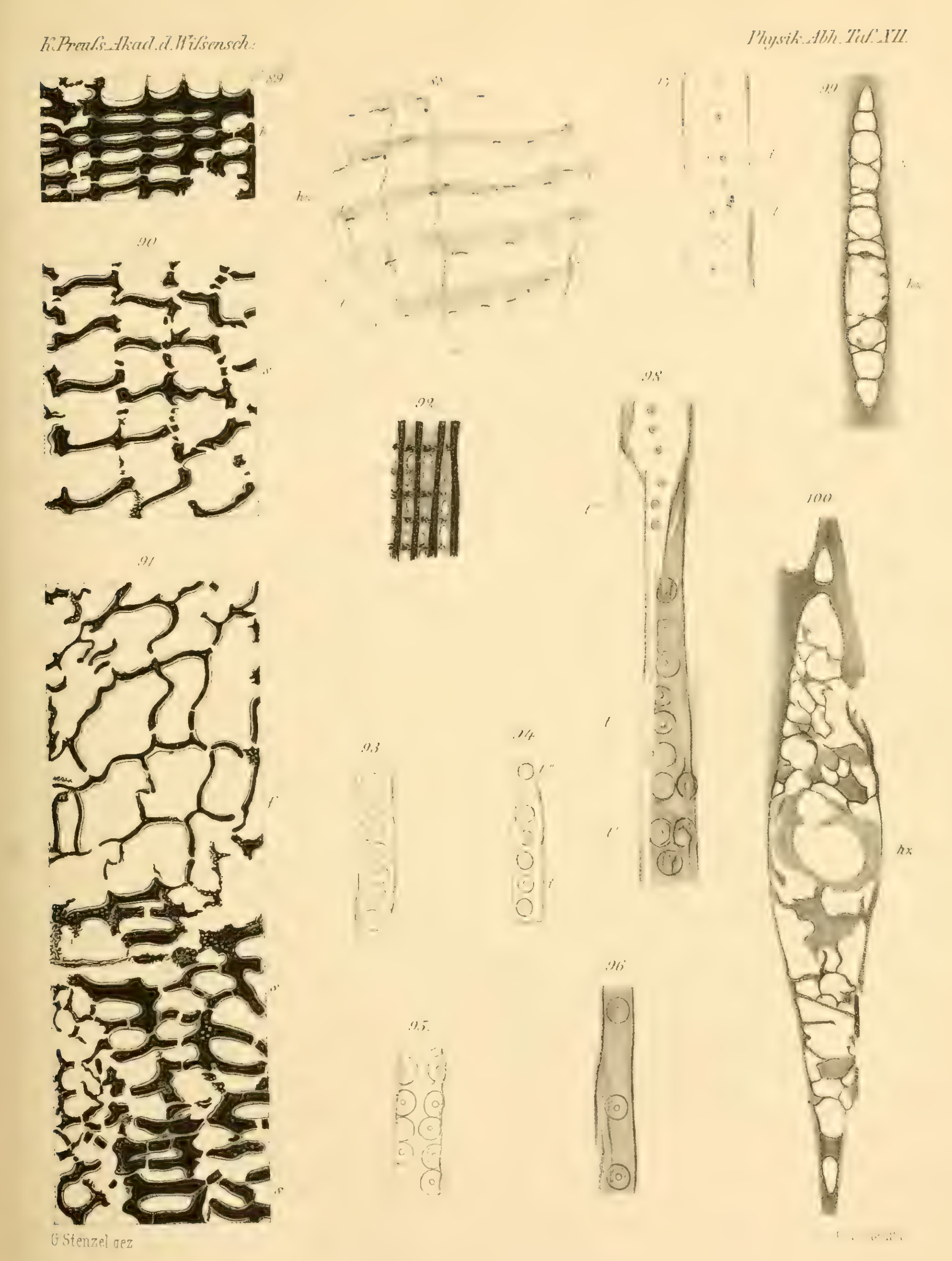
70–77: Ar. cupreus (70–72: v. Ural; 73–77: v. Mansfeld.)

Göppert, Coniferenhölzer.



78–84: Ar. cupreus (von Mansfeld.) _ 85 – 87: Pinites Conwentzianus.

Göppert, Coniferenhölzer.



G. Stenzel gez.

88–100: Pinites Conwentzianus.

Göppert, Coniferenhölzer.

PHILOSOPHISCHE UND HISTORISCHE

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

AUS DEM JAHRE

1887.

BERLIN.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1888.

BUCHDRUCKEREI DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN (G. VOGT).

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Inhalt.

Über den Pârasîprakâça des Kṛishṇadâsa.

Von

H[rn.] WEBER.

Vorgelegt in der Gesammtsitzung am 20. Januar 1887
[Sitzungsberichte St. IV. S. 39].
Zum Druck eingereicht am 20. Januar 1887, ausgegeben am 22. October 1887.

Bei meiner Beschäftigung mit dem angeblich dem Kshemendra des elften Jahrhunderts, factisch aber erst der Zeit des Shâh Jehân (1628—1658) angehörigen lokaprakâça[1]), Berlin ms. or. oct. 99[b], war es mir, wegen der in den darin enthaltenen Formularen mannichfach verwendeten persischen, resp. moslimischen Titel und termini technici, sehr willkommen, durch die Freundlichkeit des zur Zeit in Benares sich aufhaltenden Prof. Dr. R. Garbe zwei von einander gänzlich verschiedene Pârasîprakâça, persisch-sanskṛitische Glossare, zu erhalten, von denen das eine, in Benares 1923 (1867) gedruckt[2]), am Schlufs als „von Kaiser Akbar [1556—1605] veranlagt", çrîmad-Akavarasâhaviracita, resp. „von Kṛishṇadâsa verfafst", kṛita, bezeichnet ist, während das zweite, eine Handschrift (Berlin ms. or. fol. 1326), wesentlich astronomisch-astrologischen Inhalts, sich im Eingange als von Vedâñgarâya unter Shâh Jehân, speciell im Jahre çâke 1565 sana 1053 (1643) abgefafst bezeichnet.

Beide Texte waren mir schon früher bekannt, der des Kṛishṇadâsa allerdings nur aus dem im „Paṇḍit" enthaltenen Katalog der in der Universitäts-Bibliothek in Benares befindlichen Sanskṛit-Manuscripte, s. Ind.

[1]) s. mein Verz. der Berl. S. H. 1, 224 (1853) und Bühler im Report über seine Kashmir-Reise p. 75. 81 (1877).

[2]) ich bezeichne diesen Druck mit E.

Streifen 3, 239 (1873) und Monatsb. d. Akad. 1879 p. 475, während ich das Werk des Vedâṅgarâya 1874 in zwei Londoner Handschriften kennen lernte[1]), und später auch noch den Eingang desselben auf der Rückseite des Vorderblattes der von mir in meiner Gesammtausgabe von Hâla's saptaçatakam mit ξ bezeichneten Handschrift eines anonymen Commentars dazu vorfand, s. Hâla[2] p. xxxv[n. 2] (1881).

Indem ich mir vorbehalte, auf das spätere Werk des Vedâṅgarâya zurückzukommen, nehme ich mir hier zunächst den Pârasîprakâça des Kṛishṇadâsa zum Vorwurf, halte es aber für angemessen, zuvor erst noch eine kurze Übersicht über die früheren indisch-persischen Beziehungen, in soweit dieselben innerhalb des Sanskṛit, resp. der Sanskṛit-Literatur, Spuren hinterlassen haben, vorauszuschicken.

In eine für Indien vorhistorische Zeit gehen alle diejenigen dgl. Beziehungen zurück[2]), welche in das vedische Gebiet gehören. So die etwaigen Reminiscenzen an die „gemeinsame persa- und indo-ârische Vorzeit", welche in den Legenden der Brâhmaṇa-Texte über den Wettstreit zwischen den âditya und den aṅgiras, s. Ind. Studien 1, 292 (1850), Ind. Streifen 2, 470 (1864), 3, 80 (1871), oder zwischen den deva und den asura[3]), s. Ind. Studien 2, 90 (1851), sowie in der Bedeutung und Stellung der Namen kavi und kâvya darin[4]), s. ibid. und Ind. Streifen 2, 445 (1859), 470 (1864), Monatsb. 1879 p. 458, zu liegen scheinen.

---

[1]) I. O. L. 2897 (saṃvat 1871) und 2114 (Randmarke: yavanamate), s. Monatsb. a. a. O.

[2]) das Gleiche gilt ja auch von den entsprechenden Beziehungen zu den Semiten, dem Handelsverkehr mit welchen Indien, meiner Meinung nach, nicht nur die Grundlagen seiner Alphabete, sondern auch die seiner Zeitrechnung (Mondstationen; Dauer des längsten Tages; Sechzigtheilung) sowie seiner Maafse und Gewichte (sechs Gerstenkörner als Einheit dafür), eventualiter auch seiner civilrechtlichen Bestimmungen über Handel und Verkehr (es ergiebt sich immer mehr, dafs die dharmasûtra für den eigentlichen vyavahâra nicht als Quelle der smṛiti zu gelten haben) verdankt.

[3]) eine neuerdings von P. v. Bradke speciell aufgenommene Frage, s. dessen Schrift: „Dyâus Asura, Ahura Mazda und die Asura" Halle 1885. — Der Einwurf, dafs man im Falle polemischer Beziehungen auf den ahura-Dienst bei der Verwendung des Wortes asura für die bösen Götter vielmehr eben die Namensform ahura selbst für dieselben erwarten sollte, hat zwar scheinbar guten Grund. Indessen, auch der Avesta spricht nicht von: hapta siṅdu, sondern von: hapta heṅdu, folgt somit áuch seinen eigenen Lautgesetzen hierbei.

[4]) Uçanas Kâvya als Lehrer der asura!

Es gehört hierher ferner, ja, steht eigentlich sogar an der Spitze, die ganze Frage nach dem Verhältnifs des Veda zum Avesta[1]). — Speciell sodann, als anscheinend unmittelbarer Hinweis nach Irân, der Lobpreis des Parçu (-Königs) Tiriṃdira[2]), sowie die Angabe Yâska's (Nir. 2, 2) über die nur dialektische Differenz der Sprachen der Ârya und der Kamboja[3]). — Zu erwähnen ist endlich auch noch die Vermuthung H. Brunnhofer's über Çakapûta (= Çakaputra?), in Kuhn's Z. vgl. Spr. 25, 373 (1880), sowie seine meiner Annahme[4]) eines nordwestlichen Ursprunges der agnicayana-, resp. Çâṇḍilya-, Bücher des Çatap. Brâhm. (VI—X) sich anschliefsenden weiteren dergl. Vermuthungen in Bezzenberger's Beiträgen zur Kunde der idg. Spr. 10, 259 fg.

Historisch beglaubigt ist die Theilnahme indischer Hilfstruppen an den Griechenkriegen der Achaemeniden. Und auf diese Zeit geht daher wohl die Herübernahme des Wortes Yavana, zur Bezeichnung der Griechen, zurück. Auch der Name Bâveru, Bâb-el, für Babylon ist, wie das r zeigt, wohl auf persische Vermittelung zurückzuführen. Nicht minder scheint mir das Wort mudrâ, Siegel, -Ring, np. مُهر, welches ich aus der altpers. Form des alten Namens für Ägypten, Mudrâya in den altp. Keilinschriften, erkläre[5]), hierher zu gehören. Endlich ist vielleicht auch

---

[1]) beispielsweise mögen hier einige Parallelen aus dem zweiten maṇḍala ihre Stelle finden: 27, 17 (cf. 8, 45, 36) mâ' 'hám .. â' vidaṃ çû'nam âpéḥ, gegenüber von Yç. 28, 10: aṭ vè khshmaibyâ açûnâ vaêdâ qaraithyâ vanaiñtyâ çravâo; — 28, 5 khâ'm ṛitásya und Yç. 10, 4 (11) ashahê khâo ahi; — 12, 8 yáṃ krándasî saṃyatî' vihváyete, und Mithra-Yesht § 8; — 26, 3 sá íj jánena sá viçâ' sá jánmanâ sá putraíḥ neben: dańhu, zañtu, viç, nmâna ibid. — Eine interessante Parallele ist auch 7, 88, 3: â' yád ruhâ'va váruṇaç ca nâ'vaṃ und Vend. 5, 73: yathâ imãm zãm â ca pairi ca bavâva (wir Beide, ich Zar., und Du, o Ah. M.).

[2]) Ṛiks. 8, 6, 46–48, s. Ind. Stud. 4, 379 (1858) Vorl. über ind. L. G.[2] p. 3. 331 (1876). An das Geschlecht der Yâdva, dem er angehört, knüpfen auch noch die Maga-Mythen der Folgezeit an.

[3]) s. Vorl. über ind. L. G. [1]169 (1852). [2]194. Ind. Streifen 2, 197 (1860). 470 (1864). 493 (1869). 3, 80 (1871). — Über die noch im Vañçabrâhm. des Sâmaveda enthaltenen Beziehungen zu den Kamboja s. Ind. Stud. 4, 372. 378 (1858).

[4]) s. Vorl. über ind. L. G. [1]128. 129. [2]146. 147.

[5]) s. Hâla[2] p. 449, Vorw. p. XVII (1881). Ähnlich brauchen die Engländer China für Porcellan, wir Nanking für eine Art Zeug, Kordofan für eine Art Leder.

in dem nṛisiṅha, Mannlöwen, der Vishṇuiten eine Aneignung der menschenköpfigen Löwen zu Ninive, Persepolis etc. zu erkennen[1]).

Der Name Bâhlî, zuerst im vârtt. zu Pâṇini (4, 2, 99), s. Monatsb. 1879 p. 462, ist wohl durch das Medium des zendischen Bâkhdhî aus der altpers. Form Bâkhtri, Bactria, entwickelt zu denken, und event. auch bereits in den Schlufs dieser Zeit zu stellen.

Schliefslich gehört in dieselbe auch noch der bereits in den Keilinschriften der Achaemeniden sich findende Name der Parther, Parthava, resp. die Verwendung des entsprechenden, seinerseits allerdings zunächst direct an den Parçu der Ṛiks., resp. Pâṇini's, sich anschliefsenden Pâraçava (°çavya) in den älteren dharmasûtra, z. B. bei Gotama (s. Ind. Streifen 3, 489), als Name einer Mischkaste[2]), und zwar neben dem der Yavana.

Das nach Olshausen[3]) aus jenem Parthava im Verlauf entstandene pahlav, welches seinerseits dem indischen Pahlava zu Grunde liegt, kann dagegen nach Nöldeke schwerlich vor dem ersten Jahrh. u. Z. entstanden sein, s. Vorl. ind. L. G.² 338 (1876). Das indische Wort, resp. ein Werk, in dem es sich findet, gehört somit natürlich erst in noch spätere Zeit.

Nicht gar zu weit hiervon abliegend, aber immerhin denn doch in eine etwas frühere Zeit gehörig ist das durch die Indoskythen vermittelte MIIRO, mihira (mithra)[4]) nebst den anderweiten, deren Münzen zufolge, zu ihrer Zeit nach Indien übertragenen irânischen Wörtern, resp. Elementen, welche theils auf zarathustrischen Cult, theils auf den damit rivalisirenden, wie es scheint speciell den Magern zuzuweisenden Mithra-Dienst zurückgehen, s. Monatsb. 1879 p. 460, für jene Zeit resp. derartige Einflüsse sicher stellen, ohne jedoch, mit Ausnahme der Wörter mihira und Maga selbst, in der Sprache Indiens feste Spuren hinterlassen zu haben.

---

[1]) s. Ind. Stud. 9, 65 (1865); der nârasiṅha findet sich resp. schon im Taitt. Âraṇyaka (X, 1, 7).

[2]) später erscheint der Name in der Form: Pârasava.

[3]) Monatsb. 1874 p. 708; speciell in seiner eingehenden Abh. „Parthava und Pahlav“ Monatsb. 1876, p. 729 fg.; s. besonders p. 730 (8) und 738 (16).

[4]) die verschiedenen Formen, in denen dieses Wort gerade bei den Griechen und Römern erscheint, sind charakteristisch für die verschiedenen Entwicklungsphasen der iranischen Sprache; wir finden nämlich: Mitradates bei Herodot, Μιθρην bei Xenophon, Meherdates bei Tacitus.

Die Mager als Vertreter des Mithra-Cultes sind eventualiter, trotz der geographischen Bedenken, doch vielleicht mit den Βραχμανοι Μαγοι des Ptolemaios in Verbindung zu bringen. Jedenfalls ergiebt sich aus den Nachrichten bei Varâhamihira (504—87) über die Maga, ihren Sonnendienst, und ihren viyañga, dafs eine Mager-Colonie geraume Zeit vór Varâh. in Indien festen Fufs gefafst haben mufs, s. Monatsb. 1879 p. 460—63. Die Ansprüche der modernen Çâkadvîpîya-brâhmaṇa, die sich auf die Maga zurückführen, beruhen somit immerhin auf alterthümlicher Grundlage.

Aus der Zeit der parthischen Arsaciden, Pahlava, und der persischen Sâsâniden, Pârasîka, resp. der durch die Inschriften der Gupta etc. als mit Diesen in naher Beziehung stehend erwiesenen[1]) shâhânshâhi und ihrer (mahâ)kshatrapa, Satrapen, stammt eine ziemliche Anzahl von Wörtern politisch-militärischen Charakters, die theils in der damals in Blüthe stehenden Prâkṛit-Poesie, theils im Sanskṛit selbst Aufnahme gefunden haben. Was zunächst den Namen Pârasîka selbst anbelangt, so scheint er speciell nur den Sâsâniden zugehörig, die ihrerseits, wie die alte Lehre, so auch den alten, zeitweise durch den Namen der Parther, wie die Ormuzd-Lehre durch den Mithradienst der Mager, verdunkelten Namen der Perser wieder zu Ehren gebracht zu haben scheinen. Und so handelt es sich denn auch bei den in Rede stehenden Wörtern nicht mehr wie bisher um so zu sagen irânische Wörter, sondern um factisch im modernen Persisch nachweisbare dgl. Die betreffenden Wörter, die durch mich selbst, Nöldeke und S. Goldschmidt in diesem Zusammenhang gebracht wurden (s. Monatsb. 1879 p. 463fg. 812fg. 922 Sitzungsb. 1883 p. 1109) sind: bandi Gefangener بندہ, pîlu Elephant فیل, sâhî Landstrafse شاهِ, mâḍhi Ringelpanzer ماذی[2]), divira Schreiber دبیر, pâika Fufssoldat پییک, spharaka Schild سپر, taravara, talavara Schwert, Degen تربال[3]). — Ich schliefse hier gleich auch noch einige ähnliche Wörter an, deren Herübernahme eventualiter erst in spätere Zeit gehört, da sie eben erst später nachweisbar scheinen: gañja Schatz گنج, gañjavara Schatzmeister گنجور, jayana Rüstung eines Pferdes زین.

Wir kommen nunmehr zu der für Indien so verhängnifsvollen Zeit der moslimischen Einfälle und Herrschaft. Entsprechend dem Charakter derselben und entsprechend dem Einflusse, den auch das Persische

[1]) Lassen 2, 957. 983ff. [2]) nach Nöldeke eig.: medisch. [3]) ? ? s. Ind. Stud. 16, 38.

selbst nach dieser Richtung hin erfuhr, handelt es sich fortab bei der Herübernahme persischer Wörter in das Indische zugleich auch um arabische, im weiteren Verlauf resp. auch um türkische Wörter. Bekanntlich hat die Übersiedelung dieses fremden moslimischen Sprachgutes nach Indien in den modernen indischen Volksidiomen, speciell resp. in dem sogenannten Hindustânî, einen gewaltigen Umfang erreicht. Aber auch das Sanskṛit selbst blieb nicht frei davon.

Und zwar hat die moslimische Cultur sogar auch auf die Sanskṛit-Literatur selbst nach mehreren Richtungen hin befruchtend eingewirkt. Ein besonderer Zweig derselben trägt nicht nur einen gerade díes direct besagenden Namen, sondern ist auch auf Grund dessen mit entsprechenden Fremdwörtern, zum gröfsten Theil übrigens arabischen Ursprungs, vollaus durchsetzt. Es ist dies die sogenannte tâjika- oder tâjaka-Stufe (von per. تازی arabisch) der indischen Astronomie resp. Astrologie, die sich unter dem Einflufs der moslimischen Herrscher nach dem Muster der arabischen dgl. Wissenschaft gebildet hat, welche ihrerseits ursprünglich ihre eigene Ausbildung, aufser aus griechischer Quelle, speciell auch gerade aus Indien entlehnt hatte! Derselbe Alkindi, welcher sich selbst als Schüler der Inder bekennt, wird seinerseits, unter dem Namen Khindaka, unter den Autoritäten dieser tâjaka-Texte aufgeführt. Die Details hierzu s. in m. Abh. hierüber in vol. II der Indischen Studien p. 244fg. (1851), wo ich auch die betreffenden derartigen termini technici einzeln erörtert habe, s. p. 263—276 (Vorl. über ind. L. G.[1] 233. [2]282). Wir finden dieselben u. A. auch in dem Pârasîprakâça des Vedâñgarâya (neben den griechischen und persischen dgl.) aufgeführt.

Wenn sich die Annahmen von E. Haas[1]) über den Einfluss der arabischen Medicin auf die indische bewahrheitet hätten, so würden wir auch dárin, und zwar in noch älterer Zeit, als bei der tâjaka-Stufe, dgl. fremde, arabisch-persische Wörter zu erwarten haben. Die Haas'sche Theorie war jedoch von vorn herein in sich nichtig, da ihr das ausdrückliche Zeugnifs nicht nur der Araber, sondern speciell auch der Perser direct entgegenstand, wie letzteres in solenner Weise aus dem seiner Sprache wie seinem Inhalte nach hochbedeutsamen Werke des Abu Mansur Muwaffak her-

---

[1]) s. ZDMG 30, 617 (1876). 31, 647 (1877); dazu Aug. Müller 34, 465fg. (1880).

vorgeht, welches unter dem Titel: „Liber fundamentorum pharmacologiae“ schon 17 Jahr früher (1859) durch die Ausgabe Romeo Seligmann's, speciell durch seine trefflichen Prolegomena dazu (LIV pagg.), allgemein zugänglich gemacht worden war[1]). Ähnlich wie sein jüngerer Zeitgenosse Albêrûnî[2]), hat auch Abu Mansur seinem Werke zahlreiche Citate aus indischen Texten einverleibt[3]). — Dafs sich im Übrigen, der tâjaka-Stufe entsprechend, auch auf dem Boden der Medicin in moderner Zeit einzelne Sanskṛit-Texte medicinischen Inhalts an arabisch-persische Vorbilder angeschlossen haben, resp. speciell auch officinelle Namen der Art enthalten sollten, würde durchaus begreiflich sein; cf. z. B. mein Verz. der Berliner Sansk. und Prâk. Handschrift 2, 320. Hierher liefse sich etwa auch die Herübernahme von pers. شکربار in der Form: çañkhapâla „eine Art Confect“ (s. Petersb. Wörterb.) ziehen[4]).

Bei einem dritten, freilich ziemlich dürftigen Zweige der Sanskṛit-Literatur, findet sich factisch dieselbe Erscheinung wie bei der tâjaka-Stufe vor, bei den von dem Schachspiel handelnden Texten nämlich. So zweifellos es ist, dafs dies edle Spiel, caturañga, شترنک شطرنج, aus Indien stammt, von da nach dem Westen gedrungen ist[5]), so steht andererseits doch ebenso fest, dafs die moderne indische Form desselben, die sich bei Nîlakaṇṭha, about 1600 or 1700, vorfindet, unter moslimi-

---

[1]) die Übersetzung dieses Werkes ist, den auf dem jüngst (Sept. 1886) in Wien abgehaltenen intern. Orientalisten-Congrefs gemachten Mittheilungen zufolge, im Manuscript vollendet und druckfertig; die baldige Publication derselben erscheint resp. als in hohem Grade wünschenswerth.

[2]) der ja auch seinerseits die Übersetzung des Caraka in das Arabische bezeugt, s. Vorl. ind. L. G.[1] 235. [2]284.

[3]) cf. praef. p. XIII: seque dicit accessisse sententiae Indorum quorum in operis sui excursu nonnullos usque ad hunc diem ignotos nominat et locos ex eorum scriptis exhibet.

[4]) s. شکربار raining sweetness, mellifluous, und شکرپاره a lump of sugar (Johnson); genus dulciarii (Vullers).

[5]) von Interesse ist es im Übrigen, dafs das mit Würfelspiel verbundene Vierschach, und zwar ganz in der auch von Indien her bekannten Form, s. Monatsb. der Akad. 1872 p. 59 fg., bereits von Albêrûnî, Anfang des 11. Jahrh., speciell als die damals in Indien übliche Form des Schachspiels bezeichnet wird, s. Sachau in: van der Linde's Quellenstudien zur Gesch. des Schachspiels (1881) p. 256 fg., und van der Linde's Bemerk. dazu p. 259 fg.

schem Einflusse steht, denn es wird dies, ebenso wie bei den tâjaka-Texten, durch die dabei übliche Terminologie direct erhärtet, s. Monatsb. der Akad. 1873 p. 707. 722fg. und 1874 p. 224. Die betreffenden Ausdrücke sind: ça شاه, kâtîça قطع شاه, durokhaça دورخ شاه. — Es gehört resp., wie dies zuletzt aufgeführte Compositum zeigt, hierher wohl auch das, vormals von Forbes so speciell in entgegengesetzter Richtung verwerthete, übrigens bereits in der Medinî (kânta 22), sowie bei Hemacandra (anek.) sich findende: rokaṃ nâvi (s. Monatsb. 1872 p. 84); die Stelle des رخ, rukh, wird ja im indischen caturaṅga-Spiel durch ein Boot (naukâ) vertreten, s. Monatsb. 1872 p. 64. 68, und van der Linde Gesch. des Schachspiels 1, 71. 77 (1874).

Endlich giebt es auch noch einen anderen Literaturzweig, in welchem Indien Persien gegenüber früher speciell als der gebende, dagegen in neuerer Zeit mehr als der empfangende Theil dasteht, das Gebiet nämlich der Fabeln, Märchen und Erzählungen. Es hat jedoch eines Theils hierin, und zwar nicht blos Persien, sondern dem ganzen (indischen) Westen gegenüber, wohl nie ein wirklicher Abbruch, vielmehr stetig ein gegenseitiger Austausch, wenn auch nicht gerade von fertigen Literaturwerken (dábei hat Indien wohl den Vorrang), so doch von derartigen Stoffen stattgefunden[1]). Anderntheils sodann sind die arabisch-persisch-türkischen Wörter, die sich hierbei in modernen Sanskrit-Texten vorfinden, gerade wohl nicht als Beweis für eine derartige Herkunft der betreffenden Erzählung zu erkennen, sondern vielmehr einfach darauf zu-

---

[1]) s. Monatsb. 1869 p. 37fg. Ind. Stud. 15, 214. 216. 325. 348. 414fg. Ind. Streifen 2, 166. 368. 3, 374. — Die Geschichte der Vâsavadattâ, wie sie uns Subandhu erzählt, stimmt genau mit der ja auch in Firdûsî übergegangenen Erzählung des Chares von Odatis und Zariadres (gegenseitige Liebe durch Traum, Entführung), s. Droysen Gesch. Alexander's ²1, 386 (1877), Spiegel in der Hist. Z. neue Folge 8, 13 (1880), Rhode griech. Roman p. 45. 51. In der Wiederbelebung der in Stein verwandelten Vâsavadattâ (Ind. Streifen 1, 378) ist ein griechisches Motiv, resp. Vorbild, leicht erkennbar. Peterson's Vermuthung über den Einfluſs griechischer Romane auf Indien erhält hier allem Anschein nach eine Stütze, s. DLZ. 1884 p. 120. — Andrerseits möchte ich meinen, daſs bei Wîs o Râmîn, s. H. Graf in ZDMG 23, 375 (1869), dem persischen Gegenstück zu Tristan und Isolde, welches seinerseits ja erst dem 11. Jahrh. angehört, aber nach einer älteren in Pehlvi abgefassten Erzählung bearbeitet ist, ein indisches Vorbild zu Grunde liegt, das sich hoffentlich mit der Zeit noch einmal auffinden wird.

rückzuführen, dafs dieselben aus dem Volksmunde aufgezeichnet sind, mithin an den Eigenschaften der modernen indischen Volksidiome participiren, welche ihrerseits ja, wie bereits bemerkt, reichlich mit dgl. Wörtern durchsetzt sind. Es handelt sich nämlich hierbei zunächst im Wesentlichen nur um die in neuester Zeit so zahlreich aufgetauchten kathânaka der Jaina. S. hierüber m. Abh. über den Pañcadaṇḍachattraprabandha (1877) p. 6, speciell über die Wörter: sâhânusâhi شاهنشاه p. 8, sâni bâpa ثانی باب, katâna قتان, gadi گدی, câuracâkulâ چوراچکلا, sovâka سواک p. 28, cañgerî چنگیل p. 27, jarada زرد, jûsara جوسر, topa توپ p. 29, tîra تیر, javâraka جوار p. 30, bâjîgara بازیگر p. 44.

Zu den auf diesem Wege, durch die Volksidiome, resp. durch den directen Einflufs der politischen Verhältnisse[1]), in das Sanskrit eingedrungenen, kurz gesagt: moslimischen Wörtern, die dann mehrfach auch durch volksetymologische Aneignung umgemodelt sind, gehören noch z. B.: suratrâṇa Sultân[2]), Mauçula Mausula Moslim[3]), Mudgala Mogul[4]), Çesha (Çekha) Shaikh[5]), °miçra Mirza[6]), kalandara قلندر[7]), lañga لنگ[8]).

Besonders häufig sind dgl. Wörter in den in der Calcuttaer Ausgabe der Râjataraṃgiṇî derselben angeschlossenen Nachträgen, resp. modernen Kashmirschen Annalen, speciell in der die Zeit des Königs Jainollâbhadîna behandelnden und mit moslimischen Eigennamen wie Titeln voll gespickten Jainarâjataraṃgiṇî des Çrîvarapaṇḍita (s. Verz. d. Berl. Sansk. Handschr. 1, 165. 166), sowie in dem von mir hierfür bereits im Eingange erwähnten lokaprakâça. In den Glossar-artigen Abschnitten (I. III) dieses letzteren Werkes findet sich z. B. aufser mehreren der bereits angeführten Wörter auch noch das Wort: sellâhadara سلاح دار swordbearer vor, während in den Formularbüchern (II. IV) u. A. folgende Wörter, und zwar zum guten Theil wiederholentlich, vorkommen: kâje قاضی, kâsema قاسم, khabhara خبر, khavâça خواص, khasmâna خصمانه, khijmatikâ خدمتی,

---

[1]) eine unmittelbare Beziehung auf den Islâm, resp. Qorân, als: yâvanam matam, speciell als eine der anerkannten 32 vidyâ resp. kalâ, liegt in der Çukranîti 4, 276. 304 (4, 3, 29. 63 ed. G. Oppert) vor, s. DLZ 188 p. 63. Anders freilich Oppert selbst (in der pref. p. X).

[2]) s. Ind. Stud. 16, 154. 415. Verz. der Berliner Sansk. Handschr. 2, 452. 590. [3]) ibid. 1, 166. [4]) ibid. 2, 15. [5]) ibid. 2, 165. [6]) s. Monatsb. 1879, p. 464. [7]) ibid. [8]) s. DLZ 1884 p. 9.

khujyâ خواجه, khosrâm̧ خسرو(?), Jainollâbhadena, suratrâṇa çâhi Jyahâna, Jyahânâbâda, neçâna نشان, malaka ملك, mera مير, merjâ ميرزا, mokadama مقدم, lashkarî لشكرى, çârkârikâ سركارى, çikhadâre سركاردارى, çâhi Salema, salâmavam̧dage سلام بندگى, sarâpha اشراف u. A.

Es erübrigt noch, diejenigen irânischen Wörter anzuführen, welche zwar auch in islâmischer Zeit, aber nicht durch die Moslims, sondern durch die von ihnen aus Irân vertriebenen und nach Indien übergesiedelten zarathustrischen Pârsi dahin gelangt sind.

Die Purâṇa-Berichte, in denen sich diese Wörter vorfinden, handeln übrigens anscheinend gar nicht von der Übersiedelung der Pârsi nach Indien, sondern vielmehr von der indischen Ansiedelung der Maga, resp. der mit diesen identisch gesetzten Çâkadvîpîya Brâhmaṇa, welche, wie wir bereits oben (p. 7) sahen, in eine weit ältere Zeit zurückgeht, da sie bereits von Varâhamihira[1]) anerkannt wird. Es hat eben in diesen Berichten der Purâṇa offenbar eine Vermischung der beiden Ansiedelungen, der älteren Herüberkunft einer Colonie von Mithra-Dienern (Maga), und der weit späteren Übersiedelung der eigentlichen „Pârsi" stattgefunden, wobei es denn eine etwas heikele Aufgabe bildet, die beiderseitigen Traditions-Bestandtheile auseinander zu halten. Das, was vom Sonnendienst der Maga berichtet wird, geht natürlich auf die ältere Ansiedelung zurück, und eben so wohl auch die Anknüpfung dieser Einführung des Sonnendienstes an das Yâdava-Geschlecht[2]) des Kṛishṇa, speciell an dessen Sohn Çâmba. Bei Letzterem liegt es resp. nahe, eine Beziehung zu der alt-irânischen Sage über Çâma zu suchen. Eine besondere, und zwar zudem ziemlich alte, irânische Beziehung des Namens Çâmba geht zum Wenigsten aus der Verwendung desselben im Vaṅçabrâhmaṇa direct neben den Namen: Kamboja Aupamanyava, Madragâra Çauṅgâyani und Sâti Aushṭrâkshi, sowie im weiteren Verlauf: Çâkadâsa, wohl ziemlich sicher hervor, s. Ind. Stud. 4, 372. 378—80. Monatsber. 1880 p. 48. — Das aiwyâoṅhana gehörte beiden Ansiedelungen an, wie der viyaṅga bei Varâhamihira, und das avyaṅgam des Bhavishya Pur. bezeugt, s. Monatsb. 1879 p. 457. — Dagegen die

---

[1]) dessen Angabe hierüber dann später auch Albêrûnî speciell citirt.

[2]) cf. die Beziehung der Yâdva zu Tirim̧dira Parçu (oben p. 5).

Angabe der Purâṇa über die heiligen Texte der Maga, Namens: vada (Yaçna?), viçvavada (Viçpered), vidut (Vendidad) und âṅgirasa, sowie über amâhaka (amahrka?), acashu (acashṇa ازشنه?) und über varçma (bareçma) beziehen sich wohl nur auf die Flüchtlinge vor dem Islâm (s. Monatsb. 1879 p. 455. 466). Sollte nicht etwa auch die specielle Verwendung des Namens Bhojaka für die Maga (angeblich wegen ihrer ehelichen Verbindung mit Frauen aus dem Bhoja-Geschlecht) vielmehr auf volksetymologischer Aneignung eines irânischen Wortes beruhen, welches sie etwa als „Flüchtlinge“ bezeichnete? So findet sich denn auch in der That bei Johnson das Wort: فوز in der Bedeutung: escaping, getting clear of; escape, refuge, freedom, safety, salvation, vor. Es ist dies aber leider ein arabisches Wort, von فاز evasit salvus, effugit, und daher bleibt doch zweifelhaft, ob es hier in Frage kommen kann. An فوج a body of man, company, troop zu denken, empfiehlt sich, der Bedeutung nach, nicht besonders. Besser würde noch passen: فوضى equals without a chief, scattered (people), das jedoch auch wieder ein arabisches Wort ist.

Die alte Mithra-Colonie bildet denn schliefslich ja auch noch den speciellen Hintergrund jener modernen Schriften zu Gunsten der Çâkadvîpîya-Brâhmaṇa, resp. Maga, die ich in den Monatsberichten der Jahre 1879 (p. 446 fg.) und 1880 (p. 27 fg.) eingehend behandelt habe. Die erste derselben, die Magavyakti des Kṛishṇadâsamiçra, ist allem Anschein nach von demselben Autor abgefafst, dem unser Pârasîprakâça hier zugehört, und wird somit ihre Zeit, was damals noch ungewifs war (Monatsb. 1879 p. 475), als in die Regierung Kaiser Akbar's fallend bestimmt.

Es ist immerhin eigen genug, dafs sich überhaupt so specielle Erinnerungen an die fremde, ausländische Abkunft eines bestimmten Brâhmaṇa-Geschlechtes, wie sie uns in den Purâṇa etc. über die Çâkadvîpîya-Brâhmaṇa, Maga, vorliegen, bis in só späte Zeit hinab erhalten haben, und tritt dieser Umstand wohl unbedingt für die Richtigkeit dieser Traditionen selbst ein. Hatten sich dieselben nun aber einmal bis zu Akbar's Zeit erhalten, so ist leicht begreiflich, dafs sie nunmehr wieder einen frischen Zug bekamen, da ja dieser grofse Kaiser sich es so recht angelegen sein liefs, allen Unterthanen seines grofsen Reiches gleich gerecht zu werden und die gegenseitige Annäherung der verschiedenen, indischen,

islâmischen und anderen Bestandtheile desselben möglichst begünstigte. Daher er es denn gewifs sehr gern gesehen und mit Freude begrüfst haben wird, wenn sich herausstellte, dafs schon in alter Zeit irânische Fremdlinge aus dem Çâkadvîpa in die Reihen der Brâhmaṇa direct aufgenommen worden waren! So ist es denn sehr begreiflich, wenn derselbe Kṛishṇadâsa, der in seinem Auftrage ein persisch-sanskṛitisches Glossar verfafste, sich es auch angelegen sein liefs, alles das, was noch von Angaben über die Geschlechter jener alten Maga-Colonie vorhanden war, zusammenzutragen, — eventualiter etwa auch suo jure hinzuzufügen, was ihm ad rem dienlich erschien (denn die in der Magavyakti enthaltenen Daten machen doch in der That zum Theil einen recht absonderlichen, ja apokryphen Eindruck!).

Über das jüngste Werk zu Gunsten dieser in so eigener Weise neu aufgelebten Ansprüche der Maga, die khalavaktracapeṭikâ des Râjavallabha, will ich hier nur noch bemerken, dafs meine Vermuthung (Monatsb. 1880 p. 69) über den gánz modernen Ursprung desselben, resp. über seine Abfassung im Jahre 1844, sich vollaus bestätigt hat. Es ist nämlich 1885 in Benares ein kurzer Auszug daraus, unter dem Titel: durjanâsyacapeṭikâ erschienen, der jenes Datum ganz der von mir gemachten Correctur: khakhâṅkabhû (für: khakhârkabhû) entsprechend angiebt[1]).

---

[1]) khakhâṅkabhû [1900] mite varshe Vikramâdityabhûpateḥ | Çâkadvîpa-Magadveshidurjanâsyacapeṭikâ || Kâçyâṃ vidvatsusaṃmatyâ Râjavallabhanirmitâ | çiçukraṃdîyanâmnâ vai khyâtâ vidvadbhir âdṛitâ || Am Schlufs werden nicht nur dieselben Paṇḍit (Einen ausgenommen) wie in der khalavaktrac. als zustimmend aufgeführt, sondern es sind hier sogar noch acht Namen hinzugefügt. Nach Prof. Garbe, dem ich die Zusendung verdanke, sollen vier dieser Paṇḍit noch jetzt in Benares leben. Auf die sammati derselben zu den im Texte erhobenen Ansprüchen sei übrigens gar kein Gewicht zu legen, da es jetzt in Indien ganz allgemein üblich sei, sich den Inhalt einer neuen Schrift, der Reclame halber, gleich von vorn herein durch Freunde und Bekannte als zu Recht bestehend beglaubigen zu lassen. Man gehe hierbei vielfach mit der gröfsten Leichtfertigkeit zu Werke, und gebe seine Zustimmung und Unterschrift, auch ohne nur irgend welche Kenntnifs von dem Inhalt genommen zu haben. Factisch seien die Çâkadvîp. Br. im hohen Grade gering geachtet und in tiefer Decadenz. — Die grofse Schärfe, mit der in diesen beiden Schriften (wie schon der Titel derselben zeigt) die Ansprüche der Çâk. Br. nicht blos auf Gleichberechtigung mit, sondern sogar noch auf Vorrang vor, den übrigen Brâhmaṇa verfochten werden, ist denn wohl gerade ein Beweis dafür, und beruht resp. darauf, dafs sie factisch keine Anerkennung dafür finden.

So sind wir denn nunmehr durch den Namen des Verfassers der Magavyakti speciell wieder bei unserem Pârasîprakâça angelangt, dessen Abfassung demselben ja eben auch zuzugehören scheint.

Wenn es sich im Bisherigen um durch die historischen Beziehungen Indiens zu Persien in rein natürlichem Verlaufe von selbst vor sich gehende Herübernahme irânischer resp. moslimischer, Fremdwörter und um deren Verwerthung für Indien, resp. für das Sanskṛit, handelte, so steht es denn mit dem vorliegenden Text freilich ganz anders. Derselbe charakterisirt sich vielmehr als eine ganz absichtliche, vermuthlich in politischem Interesse bestellte Arbeit, welche dem praktischen Bedürfnisse dienen soll, die Sprache der Herrscher den fremdsprachigen Unterthanen, und umgekehrt deren Sprache wieder Jenen, den Mudgala, resp. Yavana, wie sie der Autor nennt, einigermafsen zugänglich zu machen. Dieser praktische Zweck giebt sich u. A. auch in der eingehenden Rücksicht kund, welche den Ausdrücken, die sich auf Fürst und Krieger, speciell auf das Rofs und seine Ausrüstung beziehen, gewidmet ist.

Die Ausführung nun dieses Auftrages ist denn freilich eine ziemlich dürftige. In c. 260 çloka[1]) werden 1065 persische Wörter erklärt, so zwar, dafs in der Regel jedem Worte ein Viertelvers[2]) zukommt; das persische Wort steht im Nominativ, die sanskṛitische Bedeutung im Locativ[3]).

Bei diesem Schema findet sich denn für den Autor keine Gelegenheit, seine bei der Magavyakti ja immerhin bekundete Sprachgewandtheit

---

[1]) eigentlich sind es 258½; die fortlaufende Zählung weist resp. nur 255½ auf; es liegen aber im Innern bei der Verszählung einige Fehler vor. So sind die Zahlen 90. 186. 215 je für vier Halbçloka gebraucht, die Zahl 32 resp. für deren drei. Dagegen ist die Zahl 212 ganz übersprungen. Bei 122. 123 liegt eine Confusion vor, denn es gehören zu 122 drei Halbçloka, zu 123 dagegen gehört nur einer.

[2]) hie und da wird ein Wort auch mit einem Halbçloka bedacht, s. 128. 186. 275. 312. 313. 409. 442. 501. 546. 550. 620. 623. 660. 678. 746. 861. 900. 901. 938. 1041. 1050–54. 1065, ja sogar mit einem ganzen çloka, s. 549. 550. In einigen Fällen liegt eine absonderliche Verbosität vor, s. (277?). 285. 409. 414. 415. 675. 900. 901. 938. — Der Schlufs von Vers 75 greift nach 76 hinüber, der von v. 187 nach 188.

[3]) und zwar hie und da im Loc. Plur., wohl zum Theil nur metri c.; hie und da tritt, wohl aus gleichem Grunde, arthe „im Sinne von . .“ am Schlufs hinzu, oder: °saṃjna, oder: °cihnita, oder: °mâtra, oder: °âdi (einige Male auch bei persischen Wörtern!), oder: °ka.

und Gelehrsamkeit zu zeigen, doch scheint er am Schlusse (s. das hier alsbald im Verlaufe zu viçeshyanighna, resp. unten bei v. 257 zu çi Bemerkte) nach dieser Richtung hin ein Pröbchen ablegen zu wollen.

In der Aufzählung der Wörter sind zwar mehrfach zusammengehörige Wort-Gruppen wirklich auch zusammen aufgeführt. Vielfach aber geht dieselbe ziemlich ungeordnet vor sich[1]). Es fehlt bei Allem dem nicht an einer der üblichen koça-Form zu entsprechen bestimmten Eintheilung in varga, die übrigens nicht numerirt sind, und deren Namen sich, zum Wenigsten die der varga 1—7, zum Theil nur kümmerlich mit ihrem Inhalte decken. Dieselben sind der Reihe nach:

1. svargavarga, Himmel bis v. 14ª, 2. digvarga, Himmelsgegend bis 22ª, 3. kâlav., Zeit bis 25ª, 4. nâṭyav., Tanz (sic!) bis 46, 5. narakav., Hölle bis 49, 6. vâriv., Wasser bis 56, 7. vrahmav., Priesterstand bis 124ª, 8. kshatriyav., Kriegerstand bis 162ª, 9. vaiçyavarga, dritte Kaste bis 200, 10. çûdrav., vierte Kaste bis 211. Von 212 ab ist kein weiterer varga markirt; die betreffenden Verse (§ 11) enthalten im Wesentlichen nur Adjectiva, und es frägt sich nun, ob das nach 249ª, bis wohin diese Aufzählung reicht, sich findende Wort: viçeshyanighnaḥ als eine Unterschrift für das Vorhergehende zu gelten hat, oder als eine Überschrift für den nun noch folgenden Rest (§ 12 v. 249ᵇ—256ª), in welchem eine Anzahl von Wörtern (im Ganzen 22, von denen 14 bereits bisher genannt sind) aufgeführt wird[2]), die mehr als eine Bedeutung[3]) haben. Als Unterschrift für das Vorhergehende nun würde sich nur viçeshaṇa, nicht viçeshya eignen; auch weifs ich nach dér Richtung mit nighna nichts zu machen. Als Überschrift für das Folgende dagegen läfst sich viçeshyanighnaḥ allenfalls als: Multiplication der Substantiva, d. i. wohl eben ihrer Bedeutungen, auffassen, immerhin freilich eine sehr gesuchte und sonderbarliche Ausdrucksweise.

---

[1]) es finden sich auch einige ganz unmotivirte Wiederholungen, s. z. B. 447 und 451, 453 fg. und 713 fg.

[2]) diese Aufzählung ist so unvollständig, daher eigentlich so zwecklos, und bricht so abrupt ab, dafs man denken möchte, der Autor sei mit seiner Arbeit nicht fertig geworden; es sei resp. speciell dieser letzte Theil nur ein Fragment.

[3]) einige solche Fälle von Aufführung mehrerer Bedeutungen eines persischen Wortes finden sich auch schon früher vor, s. z. B. 252 (eines der Wörter, die sich auch in § 12 finden, s. 1051) 401. 442. 521. 587.

Bei der Auswahl der Wörter, die er erklärt, geht nun im Übrigen der Autor, als Inder, vielfach vom Sanskṛit aus, nicht vom Persischen. In § 12 freilich liegt entschieden das Persische zu Grunde, und ebenso in anderen Fällen. Principiell sollte dies ja resp. durchweg der Fall sein. Die Schwierigkeit der Sache hat indessen bewirkt, dafs der Autor ein festes Princip hierbei nicht innegehalten hat.

Dárin jedoch bleibt er sich durchweg treu, dafs er sorgfältig Alles vermeidet, was den Islâm betrifft; ebenso freilich aber auch Alles, was dem Moslim anstöfsig sein könnte. So beginnt er denn, und zwar, wie ich meine, als Çâkadvîpîyabrâhmaṇa, mit den Namen der Sonne, und bei der daran sich anschliefsenden Aufzählung der Namen Gottes und der bösen Geister beschränkt er sich auf devatâ, parameçvara und asura, resp. ilâhî, nûrâî, khudâya, ivlîsa und çaitâna[1]), nennt weder Allah noch Brahman Vishṇu oder Çiva etc. Von sonstigen göttlichen, resp. halbgöttlichen Persönlichkeiten werden überhaupt nur noch genannt: Yama, die apsaras und râkshasa, resp. ihnen entsprechend yavrâîla (Engel Gabriel!), parî und âdamîkhâra. Dazu treten noch Nektar pîyûsha (amṛita) und Wunschbaum kalpataru, resp. âvahayâta und tûvâ, Paradies (svarga, vihiçta) und Hölle (naraka, dojakha), sowie — Adam und Eva (744. 745, als Manu und dessen gṛiheçvarî!); endlich die Auferstehung kayâmat (pralaya 89). Und hiermit ist denn so ziemlich Alles erschöpft, was an religiöse Vorstellungen anstreift. Nur die Wörter mulhida, khârajî, râphajî (pâshaṇḍa, kshatavrata und avrata 524. 528. 529), sowie nimâja (saṃdhyâ 493), ursâ (çrâddhe 499[a]), ravâha (nivâpe 500), phâtihâ (kâryâdau mantrapâṭhe 501) und îmâma 1053 streifen noch in dies Gebiet hinein. Mit einer solchen Auswahl konnte Kaiser Akbar wohl zufrieden sein! — Um so weniger freilich dürfte er sich an dem überschwänglichen Lobpreis erfreut haben, der ihm, resp. seiner Für-

---

[1]) höchst auffällig ist, dafs hierbei in der einen der beiden mir vorliegenden Recensionen des Werkchens (s. pag. 18), und zwar gerade in der, welche sonst eigentlich einen speciell brâhmanischen Charakter trägt, auch noch das Wort deva, ديو nämlich, als Pârasî-Name für asura erscheint. E hat dasselbe nicht und ist dabei wohl entschieden im Recht. Denn dafs etwa das Çâkadvîpîya-thum des Autors ihn sollte, und zwar im stricten Gegensatz zu seiner sonstigen Reserve (s. oben), zu einer só starken Rücksichtslosigkeit gegenüber der indischen Anschauungen über das Wort deva verleitet haben, ist doch, zumal bei dem so speciell indischen Charakter der Einleitungsverse gerade der betreffenden Recension wohl kaum anzunehmen?

sorge für die „Rinder“ und die „Brâhmaṇa“, in v. 1–5 der in E fehlenden sieben Einleitungsverse einer zweiten, dádurch, wie durch das Fehlen der auf die Ausrüstung des Rosses bezüglichen Verse 143–149, als so zu sagen brahmanisch markirten Recension des Werkes zu Theil wird, von der mir drei Handschriften zur Disposition standen[1]).

In v. 6 dieser Einleitung nennt der Vf. sich selbst: Kṛishṇadâsa[2]), und in v. 7 erklärt er anscheinend[3]), dafs er ohne schriftliche Vorlage nur auf das hin, was er durch Hören erlernt, sein Werk verfafst habe, und bittet deshalb um Nachsicht für die Mängel desselben. Wie ist es denn nun wohl mit seiner Kenntnifs des Persischen bestellt?

Da ist denn vor Allem zu betonen, dafs es sich bei dem hiesigen „Pârasî“[4]) als der Sprache der vornehmen „Yavana“ und „Mudgala“, die der Autor (s. v. 127. 128) bei der Abfassung seines Werkchens im Auge hat und für die er dasselbe im Auftrage ihres und seines grofsen Kaisers verfafste, gar nicht um reines Persisch, sondern vielmehr eben um indisches Persisch handelt, welches theils wohl noch mehr als Jenes, resp. nach Art des Hindustânî, mit zahlreichen arabischen und türkischen Wörtern[5]), theils aber ferner auch noch mit Wörtern indischen Ursprunges

---

[1]) die beste derselben (= H), nro. 1321 in Râjendra Lâla Mitra's Notices of S. Mss. 3, 329. 330 (Calc. 1876, mit einem Facsimile des letzten Blattes), erhielt ich durch Hörnle, die beiden andern (T und G), dem Sanscrit College von Benares angehörig, durch Thibaut. Alle drei Mss. stimmen E gegenüber meist zusammen, doch hat G (leider sehr incorrect) theils manches Eigene, theils stimmt es hie und da mit E. Die Verszählung differirt in allen vier Texten, weil bald da, bald dort ein Vers fehlt, resp. hinzutritt. H hat 251 Verse, T 247, G bricht in v. 190 (= E 193, H 185, T 183) ab.

[2]) ye 'vagâhitum ichaṃti Pârasîvâṅmahârṇavaṃ | teshâm arthe Kṛishṇadâso nivadhnâti vacaḥplavaṃ || 6 ||

[3]) apaṭhitvâ tu tacchâstraṃ çrutvai 've 'maṃ (nämlich plavaṃ) karomy ahaṃ | nyûnâtiriktatâm atra kshaṃtum arhaṃti tadvidaḥ || 7 ||; — in v. 5 (s. pag. 24) weist er übrigens anscheinend auf Mitarbeiter hin.

[4]) Pârasîmate, s. v. 14. 19. 30. 46. 79. 90. 158. 179. 183 (Pârasîkamate) 203. 248. 252. 255.

[5]) mit denen der aus den verschiedensten moslimischen Landstrichen stammende Adel der indischen Grofsmoguls das höfische Persisch derselben ebenso ausstaffirte, wie auf den normannischen Adel Englands die vielen romanischen Wörter des Englischen zurückgehen. Kann sich ja doch sogar noch jetzt ein Ausländer in den gebildeten Kreisen Englands, wenn ihm das sächsische Wort fehlt, gelegentlich durch englische Aussprache eines entsprechenden lateinischen Wortes (besonders wenn es sich um abstracte Begriffe, die durch Wörter auf °tion, °ation ausgedrückt werden können, handelt) helfen, resp. verständlich machen!

durchsetzt ist. Es kommt weiter noch hinzu, dafs auch die ächt persischen Wörter in diesem indischen Persisch mehrfach Bedeutungen angenommen, resp. entwickelt haben, die ihnen in ihrer Heimath entweder überhaupt nie zugekommen oder doch nur zeitweise und local dafür üblich gewesen sind[1]).

So lassen sich z. B. als indischen Ursprunges folgende Wörter bezeichnen[2]), resp. mit Hülfe des Hindustânî, Mahrâṭhî etc. erklären: varsâtaṃ 39 h. برسات, jharokhâ 299 h. جهروخها, tamvû 427 h. تنبو, lâkha 439 h. لاکه, sopha 465 h. سونف, ekâṃgî 472 (gujr. mahr.), tamâla 486 h. تمال, pojeçaṃ 505 h. پوجا, hamajolî 553 h. همجولی, julmâna 582 (mahr.), cîlama 611 h. چلم, kacikâpujî(?) 615 h. کچپچ, kâṃdhî 619 h کاندها, haçthî 622 h. هتهی, çâlî 695 h. مثالی, vuçaṃ 696 h. بهس, iṅkalaṃ 705 (mahr.), mudhi 775 h. موته, avrakaṃ 841 h. ابرک, mançila 850 h. منسل, sayasakakunanda(?) 898 h. سی und شکّ‌کننده, lâlûja 937 h. لالچ, rucâyaṃdâ 909 h. رچها(?), kapha (phlegm) 1047 h. کف, pheraṃga (kushṭhe) 1048 h. فرنگ.

Persischen, resp. arabischen Ursprungs, aber auch durch das Hindustânî etc. in der hier angegebenen Bedeutung mir nicht nachweisbar sind z. B.: nûrânî Gottheit 6, tâka dîpâlaya(?) 18, vurjam = lagna 55, havâ schlechtes Wetter 57, husnaṃ Lichtstrahlen 65, hapht der grofse Bär 81, judâî Individualität 99, asphala Unterwelt 193, cakara Pfuhl 217, sarâya Vorstadt 287, vâjû Obertheil eines Flügels 338, âvistana Embryo 361, cula Jucken 380, covakâ pîtadâru 454, guraṃvâ vacâ 467, ravâha Abendandacht 500, âmila Asket 519, khâmoça desgl. 520, khurûj Aufgang 532, mevarâ Angriff 557, sâyara dressirt 597, pâyala rasch 598, shurî Tänzeln 601, hanâ Polstergras(?) 607, darma Geldbeutel(?) 609, meshâ Schiene(?) 622, parâgaṃdâ ausschweifend(?) 641, phalakâ Hinterbacken 782, valaî(?) Umschlingung 799, mora Würfel 889, dastaha Mörserkeule 890, mukutaha(?) More 923, kinârâ Schulter 1055, gacadûna âkâça[3])

---

[1]) ähnlich wie wir im Deutschen eine grofse Zahl derartiger französischer Wörter verwenden, z. B. Jalousie für Fenstergitter, Baiser als Name eines süfsen Gebäckes u. dgl.

[2]) von indischen Wörtern, die auch das Persische selbst adoptirt zu haben scheint, nenne ich z. B.: jallu 225 زلو, nîlophara 232 نیلوفر, lâycî 450 الایچی, âdaraka 457 آدرک, âmalaha 463 آمله, زیره jîraka 711, tolâ 824 توله, kulâla 851 کلال.

[3]) scorpius als Bez. des Himmels, resp. Zodiacus, entspricht einer Taurus-, nicht einer Aries-, Reihe!

(G) p. 78. — Für einige Wörter, z. B. toga (türk.) Fahne 664, elaka (türk.) Sieb 891, vâphika (arab.) geeignet 1021 ist die hiesige Bedeutung zwar anderweit gesichert, bisher aber anscheinend weder für das Persische, noch für das Hindustânî etc. in Anspruch genommen; andere dagegen, wie z. B. ursa (arab.) çrâddha 499[a], uçla (arab.) Speiseüberbleibsel 736, imtilâ (arab.) Verdauungsbeschwerde 739 liegen im Hindust. mit einer der hier angegebenen entsprechenden Bedeutung vor.

Ein Theil dieser und ähnlicher Fälle (z. B. 528. 529. 660) ist wohl einfach so zu erklären, dafs es sich hierbei nur um inadaequate Übersetzungsversuche handelt, deren nur partielles Zutreffen dem Autor insofern nicht gerade besonders zur Last fällt, weil ihm eine genaue Wiedergabe hie und da der Natur der Dinge nach kaum gelingen konnte. Doch fehlt es dabei gewifs auch nicht an manchen Mifsverständnissen, die er bei besserer Kenntnifs des Persischen hätte vermeiden können.

Von speciellem Interesse sind hierbei noch allerhand Composita, von denen zwar die einzelnen Bestandtheile theilweise notorisch, hie und da freilich auch ihrerseits unklar sind, für die aber jedenfalls die Composition selbst bis jetzt nicht belegt ist. Und zwar ist dabei dann die Bedeutung des Compositums entweder einfach und klar, oder es findet das Gegentheil hiervon statt. Dgl. Composita sind z. B.: alâmannûra 2 (Sonne), naiyara âjama 3 (desgl.), âdamîkhâra 24 (râkshasa), jeradara 307 (Thürschwelle), cahâracova 308 (die vier Theile einer Thür), *vaivaphâ 378 (Aussatz), covnâya 452 (devadâru), setalakha 460 (trikaṭu), juvânakuṃjishka 464 (N. eines Baumes), tamâlavarga 468 (pattrake), dârasâra 469 (tvaci, Zimmetstengel?), mîreadla 540 (Oberrichter), vadarâhi 584 (Aufwiegeln), umacîlama 611 (Sattelknopf?), magasadâna 620 (Augendecke, beim Pferde), girdaphilphila 712 (Pfeffer), çaykalgar 856 (Schwertfeger), nekîkâra 894 (tugendhaft), purtaradduda 898 (unternehmend), sayagadakunaṃda oder sayasakakunaṃda 899 (Zweifel hegend), viniyâja 939 (bescheiden), veadava 942 (unverschämt), vadaakla und nekaakla 963. 964 (von schlechter und guter Gesinnung), vadakaula 971 (knauserig, purahausala 946 (gläubig, vertrauensvoll), vadsakhun 949 (schlechtredend), pursakhun 950 (redselig), vayaddaha 994 (ungetrennt), haṃrava 1018 (überallhin gehend), girdakarda 1027 (bekleidet).

Es bleibt denn aber überhaupt noch eine ganze Zahl von un-

sicheren, resp. mir wenigstens annoch dunklen Wörtern übrig. So lâbha(!)2 (HTG), vaivaphâ 378, vuyavoya 471, mîyân 548, vâjî 587 (samarthane), kacikâpujî 615, tuhṛisa 618, yaṃgalâgu 892, sayagadakunaṃda 899, ard 1059; — vgl. noch G 95. 181 (p. 78. 79).

Der gröfste Theil hiervon ist wohl auf Rechnung der incorrecten Überlieferung zu setzen, besonders bei den Wörtern (resp. Versen), wo ich nur auf E beschränkt war. Speciell zu betonen ist hierbei die grofse Vieldeutigkeit der einzelnen Buchstaben, welche dem richtigen Erkennen der persischen Wörter in der Seitens des Autors gewählten, und Seitens der Schreiber noch vielfach umgemodelten, Devanâgarî-Transscription oft grofse Schwierigkeiten bereitet. So steht vor Allem:

j nicht nur für ج, sondern auch für د (z. B. 506. 1002–3. 1036), ذ (z. B. 115), ز (oft), ژ (z. B. 264. 718. 759), ض (oft), ظ (oft), ع (offenbar durch das Medium von y, z. B. 445 HT. 853 H), und يـ.

Im Übrigen steht:

k für خ (660), ک, گ (z. B. 647. 1034), ق
kh für ح (z. B. 608), خ, خو (24. 192 E), ش (z. B. 439 EG)
g für غ (oft, z. B. 173), گ, ک (z. B. 265 E. 467. 334 G 705)
t für ت, د (z. B. 97. 446. 534), ط
d für ت (z. B. 975 E. 1023), د
p für پـ, ف (z. B. 72 u. 73 G. 329 E. 598) [und oft irrig für يـ]
bh für ب (z. B. 603 E)
m für n (vor Labialen, z. B. 603), m
y für ج (z. B. 22 E), ز (z. B. 455. 565 E. 857 E), ع (z. B. 33. 445 G. 516 G. 682. 875 H), يـ [und mehrfach irrig für پـ]
v für ب, به (so 696) ه (z. B. 517), و
ç für خ (1038 E), س (z. B. 70. 710. 727. 850), ش, ص (z. B. 856)
sh für خ (z. B. 439 EG. 608 E), س (z. B. 32 E), ش
s für ث (z. B. 137), س, ش (z. B. 64. 966. 1043 E), ص
h für ح, ع (z. B. 183. 928), ه.

Aber auch sonst nimmt sich der Autor (und über ihn hinaus noch die Schreiber!) bei der Transscription der persischen Wörter grofse Freiheiten. Dafs er am Ende der Wörter metri caussa *i* und *a* anfügt, sagt er selbst am Schlufs (v. 257), aber wir finden auch im Innern ein *u* (çavujî 710 E, ḍâçuda 1023), eingefügt. Über die wechselnde Behandlung des finalen ه, ة

s. das zu v. 257 Bemerkte. Finales n wird theils zu ṃ, theils gar nicht beachtet[1]), s. arjâ 803 E, girâ 804 E, jâpharâ 438, junû 389, pistâ 771, mijagâ 759, hamajavâ 571. Finale Consonanten fehlen resp. auch sonst noch, so ز in peçavâ 1051 E, ح in tasvî 411. Abfall des Anlauts dagegen liegt vor in lâbha(?) 2 HTG, lâycî 450. Inlautender Nasal fehlt in sophâ (vermuthlich für soṃphâ?) سونف 465, ist dagegen zugefügt in pâyaṃdâra 669. Vocallängen erscheinen vielfach kurz, so bei: ămila 519 E, gĭriṃdaha 945, cădarî 424 E, cirkĭna 220 E. 981, jaṃvŭra 334 E, jahrâlŭda 651 E, phĭroja 830 E, mukŭtaha 923 E, mŭlânâ 905, çipŭsa (resp. sampŭsa) 728, saṃgĭnaṃ 170 E, hăvanaṃ 891 E. Umgekehrt finden sich auch Verlängerungen, so alấman nûra 2 E, îmâma 1053 (ĭm° 494). Die Variation der Mss. zeigt hierbei, dafs die Schuld wohl ebeen weniger den Autor, als die Schreiber trifft. Dasselbe gilt von der Seitens des Autors, der indischen Aussprache gemäfs, noch theilweise festgehaltenen Scheidung zwischen *î* und *e*, resp. *û* (*u*) und *o* (Beide neben einander in 132. 133!), die dem modernen Persischen fehlt, und in Bezug auf welche die Mss. stetig variiren.

Ohne die beim ersten Anlauf von Freund Pertsch in Gotha (= **P**) und von Dr. Christian Seybold (= **S**), z. Z. in Rio Janeiro, sowie im weitern Verlaufe speciell von Th. Nöldeke und R. Hörnle geleistete Hülfe, für die ich hiermit meinen wärmsten Dank abstatte, würde mir gar manches persische Wort in seiner vorliegenden indischen Verhüllung unklar geblieben sein!

Aber auch bei den Sanskritwörtern liegt noch manche Unklarheit vor. Und zwar handelt es sich dabei sowohl um bisher unbelegte Bedeutungen bereits bekannter Wörter, als auch um bisher unbekannte Wörter selbst, letztere zum Theil wohl aus den indischen Volksidiomen stammend. Hierher gehören: dîpâlaya 18, lagna 55, (= burj), kaṃcula 198 (Regenwurm, cf. kiṃculika), çaivala 218 (jungle), *guphâ 295 (courtyard), lohaveṇî 309 (chain), lohakuṃcî 311 (Schlüssel), *koṃṭâ 312 (veil), pârohaṇa(?) 313 (Sattel), kaṇḍû 385 (Plur., juckende Wunden?), rasaka ibid. (feuchte Wunden?), sadhâtu 417 (mit Gold durchwirkt), *Cînajâta 442, pattraka 468, palâçaka 472, ûrṇâdhya 476 (Filz), rallaka 477 (scarlet

[1]) umgekehrt werden in E innere Vocale vielfach (besonders in den ersten 80 vv.) nasalirt, resp. mit ardhacandra ঁ versehen, aufgeführt; doch geschieht dies eben nur in E.

cloth), tûlikâ 478 (outer garment), antaracârin 555 (intimate), *gaḍha 566 (castle), skandhakeça(?) 604 Mähne, jayanâdhâra 606 (stuffing of a saddle), tat-kâsaka 607 (Gras dazu?), pâdâdhâra 610 (stirrup), meṭhikâ 611 (Sattelknopf?), *pedâraka 614 (Strick), sûtrapada(°paṭa?) 616 (Peitsche), jayanâṃvara 617 (ornamental covering of a saddle), açvâṃvara 618 (Pferdedecke), skaṃdhâṃvara 619 (Schulterdecke), netrâvaraṇasûtra 620 (Maschennetz für die Augen), *çilya(?) 622 (Bürste), kîla 624 (lederne Schiene), maithuna 641 (ausschweifend?), âpannâça 644 (befriedigt), vâlapattra 689 (grean corn), *pûvâ 728 (Kuchen?), câra 740 (shepherd), paçucâraka 741 (desgl.), *kîlaka 743 (Schafbock), kaṇṭhapranâlaka 581 (Halsröhre), haritamaṇi 830 (Türkis), çrotoṃjana 841 (Ohrensalbe), sahṛidaya (suh°) 896 (beherzt), dakshiṇîyaka 901 (ehrenwerth, brav). — Über die besondere Verwendung der Wörter: Mudgala 543. 545 und: Yavana 546. 548, s. das bereits oben p. 15. 18 Bemerkte; jayana زین, namada نمد, mîra میر, nimâja نماز werden bei 544. 606. 617 als Sanskṛitwörter verwendet!

Von persischen Wörterbüchern habe ich speciell das von Francis Johnson (Lond. 1852) benutzt, weil es zugleich das Arabische umfafst, mir daher weit mehr Aushülfe bot, als das von Joh. Vullers (Bonn 1855—64), bei welchem die persischen Wörter arabischer Herkunft möglichst wenig berücksichtigt sind; für das Hindustânî habe ich mich an John Shakespear (London 1849), für das Mahrâṭhî an Molesworth (London 1857) gehalten.

Bei der Übersetzung habe ich in allen den Fällen, wo die Bedeutung des Sanskṛit-Wortes sich mit der des persischen Wortes deckt, dieselbe deutsch gegeben. Da wo das persische Wort eine leichte Schattirung der Bedeutung dem Sanskṛit-Worte gegenüber zeigt, habe ich die Bedeutung des ersteren und zwar meist auf englisch, nach Johnson eben und Shakespear, nur selten lateinisch, nach Vullers, gegeben. Endlich, wo erhebliche Differenz stattfindet, habe ich entweder die Bedeutung beider Wörter, resp. deutsch und englisch, angeführt, oder, wenn nöthig, die Einzelheiten besonders erörtert. — Bei der Text-Aufführung habe ich mich an E, als dem vollständigsten Text, gehalten; in Bezug auf den Wortlaut jedoch bin ich, wegen der vielfachen Corruptheit von E, häufig genöthigt gewesen, die darin vorliegenden Lesarten durch die von HTG zu ersetzen.

—

Ehe ich nunmehr zur Aufführung des Textes schreite, halte ich es für geboten, die in HTG (s. ob. p. 17. 18) vorliegenden Einleitungsverse, zum Lobe Akbar's des Grofsen, der darin geradezu als eine Incarnation Vishṇu's verherrlicht wird, vorauszuschicken. Ihr Fehlen in E kann darauf beruhen, dafs der Herausgeber von E sie in seiner Handschrift, die ja doch auch anderweit eine selbständige Stellung einnimmt, nicht vorfand, oder aber darauf, dafs er sie, da Kaiser Akbar's heilige Macht längst verschollen, für überflüssig hielt und daher wegliefs. Letzteres wäre denn freilich eine arge Willkür. Die Verse lauten:

çrîsûryâya[1]) namo vidhâya vidhivat samdhâya cittaṃ ravau
divyânâm iva Pârasîkavacasâṃ kurve prakâçaṃ navaṃ ।
samrâṭ-çâha-Jalâladîndra[2])sadasi prâjnapramodapradaṃ
vâhyadhvântam ivâ 'pahantu jagatâṃ[3]) pûshâ[4]) 'ṃtarasthaṃ tamaḥ[5]) ॥ (1)

yad brahma vedena vikârahînaṃ pratîyate[6]) sma prakṛiteḥ parastât ।
tad esha go-brâhmaṇapâlanârtham mahîmahendro 'kavaraḥ prajâtaḥ ॥ (2)

yad adya nâmâ 'khilaçâstrasâgare smṛitîtihâsâdishu sâdhu viçrutaṃ ।
gataṃ trilokîshu cirasthitiṃ tatas tadâkhyayâ[7]) tantram idaṃ vitanyate ॥ (3)

yad gopâlasutena Kṛishṇavibhunâ gâvas tathâ pâlitâ
Râmair bhûsuradaivatair dvijavarâs trâtâ, na citraṃ ca tat ।
goviprâbhibhavapriye Yavanaje vaṅçe 'vatîrṇo vibhur
goviprân pratipâlayaty Akavaro vishṇur vicitraṃ mahat ॥ (4)

kiyatâṃ Pârasîkânâṃ vacasâṃ saṃgraho mayâ ।
vidhîyate svabodhârthaṃ saṃskṛitârthâvavodhanaiḥ[8]) ॥ (5)

---

[1]) auch hier beginnt der Autor, als Çâkadvîpîya br. (s. p. 17), mit der Sonne! [2]) volksetymologisch, für °dîna (Beiname Aubar's). [3]) so T, paṭhatâṃ G, fehlt(!) H. [4]) so TG, pûrushâ H; pûshan bedeutet hier die Sonne; wie diese das äufsere Dunkel [vertreibt], so soll [der neue prakâça] das innere Dunkel vertreiben; pûshâ müfste ja freilich von Rechts wegen vor apahantu stehen! die Umstellung ist metri caussa erfolgt. [5]) so TG, namaḥ H. [6]) so HG, pragîyate T. [7]) so HG, tadâkhyâya T. [8]) so HT, °târthâvivodhanaiḥ G; ein Plural, also Mehrere hierbei mitbetheiligt!? mit deren Hülfe (freilich für eine einfachen Instrumental etwas viel!) der Vf. sein Werk verfafste?

§ 1 (bis v. 14[a]) svargavarga.

çrîsûrya[1]) ukta âphtâvo 1, 'lâmannûro[2]) 2 'pi kathyate ।
naiyara[3]) âjamaç 3 câ 'pi, tabako 4 bhuvaneshu ca ॥ 1 ॥

1 Sonne, آفتاب; — 2 desgl., عَلَم النور Lichtflagge; — 3 desgl., نيّر اعظم das gröſsere Licht; cf. (S) نير اصغر das kleinere Licht, der Mond, نيّرين Sonne und Mond; — 4 Welt, طبق story of a house, vault of heaven; von den sieben Schichten des Himmels.

ilâhî[4]) 5 syâc ca nûrânî[5]) 6 devatâyâm, athâ 'sure ।
ivlîsaḥ 7, syâc ca çaitânaḥ[6]) 8, khudâyaḥ[7]) 9 parameçvare ॥ 2 ॥

5 Gottheit, الٰهى divine; — 6 desgl., نورانى serenity, brightness; zur Bedeutung: Gottheit vgl. نور light als: an epithet of god; — 7 Dämon, ابليس; — 8 desgl., شيطان; — 9 Gott, خداى.

pâtçâhî 10 ca[8]) vibhûtau syât, sâhivî 11 sâ nigadyate ।
âḫhayâtas[9]) 12 tu pîyûshe, tûvâ 13 kalpatarau bhavet ॥ 3 ॥

10 Herrschaft, پادشاهى; — 11 desgl., صاحبى; — 12 Unsterblichkeitstrank; اب حيات water of life, immortality; — 13 Wunschbaum, طوبى name of a tree in paradise.

apsaraḥsu parî 14 jneyâ, vimâne arça[10]) 15 îritaḥ ।
daçâyaṃ tu phatîlaḥ[11]) 16 syâc, cirâgo[12]) 17 dîpa ucyate ॥ 4 ॥

14 Fee, پرى; — 15 Götterwagen, عرش throne, chair of state; — 16 Docht, فتيل; — 17 Lampe, چراغ.

dîpâlaye[13]) tu tâkaḥ 18 syâc, chûle darda[14]) 19 itî "ritaḥ ।
âtaças 20 tu bhaved vahnau, çvâlâ[15]) 21 tasya çikhâ bhavet[16]) ॥ 5 ॥

---

[1]) sûrye E. [2]) so E; âphtâvas sasmil lâbho G, âphtâvas tasmiṉ lâbho HT; unklar! ob lâmo, resp. dies irrige Abkürzung aus: 'lâmannûro? [3]) naipara E, naiyare HTG. [4]) so E, yelîi G, âlâî T, açvî H. [5]) so HT, nûrâṇî G, nûrâî E. [6]) so (aber çaitân*e*) E, bhavetâṃ deva-saitân*o* G, ivlîço(°so T) deva-çaitânau(°no T) HT; also deva ديو als ferneres Wort für asura anzusetzen! was aber freilich doch als etwas gar zu unindisch erscheint, und bei dem sonst doch vielmehr brahmanischen Charakter der in HTG vorliegenden Recension entschieden befremdet (s. p. 17 n. 1). [7]) khu◡dâyaḥ E. [8]) so E, pâdaçâhî H, vâdaç° T, pâtiç° G. [9]) so H, âva EG, ahvapâtas T. [10]) der Deutlichkeit halber ohne saṃdhi; so noch oft; G hat yarça. [11]) pha◡tîla E, pha*l*îlaha G; in HT fehlt dies Hemistich und das folgende. [12]) so E, cirako G. [13]) so E, dîp*o*laye G. [14]) dṛirda E; syâd dhûme dada (lies: dûda, دود) G. [15]) so E, çvâla H[m.], çvâlaha G, çolaḥ H, golaḥ T. [16]) so E, çikhâsu ca HTG.

18 dîpâlaya liegt nicht vor, cf. dîpâlî eine Reihe von Lampen, und dîpavṛiksha Lampenständer. Ganz unsicher ist mir das persische Wort; zunächst liegt: طاق تاخ تاغ تاق a kind of tree, a certain tree fit only for fuel, a tree a fire of which will burn for a long time, for seven days, was aber doch gar nicht recht pafst! an تاج „Krone, Diadem“, hier etwa im Sinne von „Kronleuchter“, ist wohl auch kaum zu denken?; — 19 Schmerz درد pain, ache; resp. bei der wohl besseren Lesart von G: Rauch دود; — 20 Feuer, آتش; — 21 hind. جوالا flame, aus dem Sanskṛit; die Lesart von HT ist wohl شعله shulah, light, splendour, lustre.

yavraîlo[1]) 22 Yame prokto, vâte vâda 23 itî ''ritaḥ ı
râkshase tv âdamîkhâraḥ[2]) 24 çîghre jûda[3]) 25 iti smṛitaḥ ıı 6 ıı

22 Todesgott, جبرائيل; der Engel Gabriel, anstatt اسرافيل; — 23 Wind, باد; — 24 Dämon, آدمی خوار, Menschenfresser; — 25 schnell, زود.

samaye tu jamânaḥ[4]) 26 syât, satate[5]) tu hameçahaḥ[6]) 27 ı
râtrau çava 28 iti khyâto, divase roja 29 ishyate ıı 7 ıı

26 Zeit, زمان; — 27 هميشه always, continually; — 28 Nacht, شب; — 29 Tag, روز.

suvahas[7]) 30 tu prabhâte syât, sâyaṃ çâma 31 iti smṛitaḥ ı
pâsas[8]) 32 tu prahare prokto muhûrte sâyataṃ 33 bhavet ıı 8 ıı

30 Morgen, صبح; — 31 Abend, شام; — 32 پاس a watch of the day or night; — 33 Stunde, ساعت.

mâhas 34 tu mâsamâtre syâd, ṛitumâtre phasal[9]) 35 bhavet ı
çîtakâle jamiçtâno[10]) 36, vahâraḥ 37 surabhau bhavet ıı 9 ıı

34 Monat, ماه; — 35 Jahreszeit, فصل; — 36 Winter, زمستان; — 37 Frühling, بهار.

tâvistânas 38 tû 'shṇakâle[11]) varsâtaṃ[12]) 39 jaladâgame ı
gujaçta[13]) 40 syâd atîte 'rthe câ, ''yaṃdaḥ 41 syâd bhavishyati ıı 10 ıı

38 Sommer, تابستان; — 39 Regenzeit, برسات the rainy season (in India), resp. aus dem Sanskṛit (Shakespear); — 40 Vergangenheit, گذشته; — 41 Zukunft, آينده.

---

[1]) so E, ijarâislo G, ajrâîlo H, ajâjîlo T. [2]) khâ◡raḥ E. [3]) jû◡da E, yyuda G. [4]) ja◡mânaḥ E, °naḥ H, naha GT. [5]) so GT, saṃtate EH. [6]) so HT, °sahaḥ G, çaha E. [7]) suvuhas G. [8]) so HG, pâças T, pâshas E. [9]) so HT, phasilaṃ G, phasalaṃ E. [10]) ja◡mi° E, yamist° T, yî° G. [11]) so E, tûshma° HGT. [12]) varsâtir H. [13]) guja◡çta E, gudasta G.

hâlaḥ[1]) 42 syâd vartamâne 'rthe, maujûdaḥ 43 siddhavastuni ।
sumaste tu tamâmaḥ 44 syâd, ârambhe tu çurû[2]) 45 smṛitaḥ ॥ 11 ॥

42 Gegenwärtiges, حال; — 43 موجود present, existing, standing before; ready at hand; — 44 vollständig, تمام; — 45 Beginn, شروع.

sukûnat[3]) 46 syât sthire, cale harakatam 47 prakîrtitam[4]) ।
çîte saramâ[5]) 48 bhaved, garamâ[5]) 49 tû 'shṇamâtre[6]) prakîrtitâ ॥ 12 ॥

46 fest; سكونة dwelling, residence; — 47 beweglich, حركة; — 48 kalt, سرما; — 49 warm گرما.

vârîdanam 50 varshaṇe syât, tuṃdaḥ 51 syâd vegavaty api ।
iti svargavargaḥ ॥

50 Regen, باريدن; — 51 eilig, تند.

§ 2 (bis v. 21ᵃ) digvargaḥ.

âsmânam[7]) 52 vyomani proktam, diçâsu tarapho 53 bhavet[8]) ॥ 13 ॥
maṃḍale dâyaraḥ[9]) 54 prokto, vurjam 55 lagneshu[10]) kathyate ।
vâram[11]) 56 vṛishṭau, durdinâdau havâ 57 syât Pârasîmate ॥ 14 ॥

52 Luftraum, اسمان; — 53 Himmelsgegend, طرف; — 54 Kreis, دائرة; — 55 lagnam Aufgangspunct der Sonne resp. Planeten; برج[12]) a sign of the zodiac (s. T); — 56 Regen, بار; — 57 schlechtes Wetter, هوا air, wind, gentle gale.

saudâminyâm varak[13]) 58 proktam, gum 59 syâd aṃtardhivâcakaḥ ।
mâhaç[14]) 60 caṃdre, kalâyâm tu hilâlaḥ 61 parikîrtitaḥ ॥ 15 ॥

58 Blitz, برق; — 59 گم lost, absent, invisible; — 60 Mond, ماه; — 61 هلال the moon on the wane.

pârcaḥ[15]) 62 khaṃḍe, caṃdrikâyâm mahatâva 63 itî "ritaḥ[16]) ।
kalaṃke tâsa 64 ity ukto, bhâsu husnam 65 prakîrtitam ॥ 16 ॥

---

[1]) so H, hâlaha GT, hâla EH. [2]) so E, °bhe çarûa T, çurûa H, suruha G. [3]) sukûnaḥ HGT, sakû◌nat E. [4]) so T, pari° EH, pâni° G. [5]) zweisilbig, m. c. [6]) tûshma° HGT. [7]) so E; âçm° HT, asm° G. [8]) so EHT, sipehara, samâ tathâ G; s. سپهر σφαῖρα the heavens, und سماء heaven, sky; G läſst nämlich hier noch fünf Hemistiche, mit den Namen von O. S. N. W etc., folgen, die dann mit diçâsu tarapho bhavet schlieſsen. [9]) so TH, °râ E, dâraha G. [10]) so EHG, râçishu T. [11]) vâram EH, vârâ H sec. m., dhârâm G, vâgam T. [12]) πυργος. [13]) varaka◌ E. [14]) mâç E. [15]) so HT, parca E, yâccai G. [16]) so HE, mâha° T; roçanî mâhe 'ritaḥ G, روشنی und ماهی.

62 پارچه a piece; — 63 مهتاب moonlight; — 64 Fleck (im Monde), تاش a freckle; — 65 Lichtstrahl; حسن beauty, elegance.

varphaṃ 66 bhavet tushâre tu, yakhaṃ[1]) 67 syâd dhimasaṃhatau[2]) ।
kutuvas[3]) 68 tu dhruve proktaḥ, sohelaḥ[4]) 69 kuṃbhasaṃbhave ॥ 17 ॥

66 Schnee, برف; — 67 يخ, ice; — 68 Polarstern, قطب; — 69 Canopus سهيل.

râhau râçaḥ 70, ketushu syâj janavaḥ 71, sùryaparvaṇi ।
kusùphaḥ[5]) 72 syât, khusûphas[6]) 73 tu caṃdraparvaṇi kathyate ॥ 18 ॥

70 Kopf des Drachen, راس; — 71 Schwanz desselben, ذنب; — 72 كُسوف an eclipse; — 73 خُسوف desgl.

hâlaḫ[7]) 74 syât paridhau caṃdrasùryayoḥ Pârasîmate ।
târâsu syâc ca sitârâ[8]) 75, muçtarî 76 ca vṛihaspatau ॥ 19 ॥

74 هاله[9]) a halo round the moon; — 75 Stern, ستاره; — 76 Jupiter, مشترى.

çukre tu joharâ[10]) 77 prokto johalâ[11]) 78 ca çanaiçcare ।
mirîkho 79 maṃgale prokto, vudhe 'pi ca atâridaḥ[12]) 80 ॥ 20 ॥

77 Venus, زُهَره; — 78 Saturn, زُحَل; — 79 Mars, مرّيخ; — 80 Mercur عطارد.

saptarshishu syâd dhapht[13]) 81 nâma, vihiçtaḥ 82 svarga ucyate ।
ushṇe garaṃ 83, sarda[14]) 84 çîte, koshṇe çîragaraṃ 85 smṛitaṃ ॥ 21 ॥

81 هفت (nämlich هفت اورنگ) the gread bear; — 82 بهشت, paradise; — 83 (49) warm, گرم; — 84 kalt, سرد; — 85 lauwarm, شيرگرم.

surâvo[15]) 86 mṛigatṛishṇâyâṃ, tîkshṇe tejaḥ[16]) 87 prakîrtitaḥ ।
iti digvargaḥ ॥

86 Luftspiegelung سراب; — 87 scharf, تيز.

§ 3 (bis v. 25[a]) kâlavargaḥ.

saṃvatsare tu sâlaḥ 88 syât, pralaye syât kayâmataḥ[17]) 89 ॥ 22 ॥

88 Jahr, سال; — 89 Weltuntergang, قيامة the resurrection, last day.

---

[1]) jasaṃ H. [2]) so HG, saṃtatau ET. [3]) ku◡tuvas E. [4]) so E, sohayaḷ HT, sohayalaha syât G. [5]) so H, °paḥ T, kûsûphaḥ G, kashûphaḥ E. [6]) susûphas T, khasûphas H, shasupas G, khashûphas E. [7]) so H, hâlaha GT, hâlai H sec. m., hâlâḫ E. [8]) so E, sîtâ râ G, °ro T, °raḥ H. [9]) ἅλως. [10]) yo° G, °raḥ GHT, jo◡harâ E. [11]) yo° G, °laç GHT, jo◡halâ E. [12]) yatâ° G. [13]) syâdupta° E, syât͜ hapta° G, syâd dhaphta T, syât͜ haphta H; einsilbig m. c. [14]) so E, sarad H, çarada G, çaraï T. [15]) su° EG, sû° H, ça° T. [16]) teja◡ḥ E. [17]) °tiḥ H, °mitaḥ G, ka◡yâ° E.

pâpe gunâha 90 ity uktaḥ, savâvaḥ 91 puṇya ucyate ı
ânaṃde khuçahâlî 92 syâd, asḻaṃ[1]) 93 kâraṇa îritaṃ ‖ 23 ‖

90 گناه sin crime vice; — 91 صواب rectitude; — 92 Wonne, خوش حالی a pleasant condition; — 93 اصل cause.

jîvâtmani tu jânaḥ 94 syâj, janmani syât tavalludaḥ 95 ı
jâṃdâraḥ[2]) 96 prâṇini prokto, jâtau jâta[3]) 97 itî ’’ritaḥ ‖ 24 ‖

94 جان soul, vital spirit; — 95 Geburt تولّد; — 96 lebendes Wesen, جاندار; — 97 زاده offspring.

dilaṃ 98 tu mânase proktaṃ, judâî[4]) 99 pṛithagâtmatâ ı
kâlavarga(ḥ) ‖

98 دل heart, mind, soul; — 99 Individualität; جدائی separation.

§ 4 (bis v. 46[b]) nâṭya(!)vargaḥ.

khiradas[5]) 100 tu bhaved vuddhau, saṃkalpe tu najaṟ[6]) bhavet ‖ 25 ‖

100 خرد understanding, intellect; — 101 نظر looking at, attending to.

tarke kayâsaḥ[7]) 102, saṃdehe jana[8]) 103 ity abhidhîyate ı
yakînaṃ[9]) 104 niçcaye proktaṃ, hallaṃ 105 siddhâṃta ucyate ‖ 26 ‖

102 قیاس reasoning, logic; — 103 Zweifel, ظنّ; — 104 یقین certainty, assurance; — 105 حل solution.

aṃgîkâre kavûlaṃ 106 syâd, vijnâne hunaraṃ 107 bhavet ı
jnâne ca aklakullaḥ[10]) 108 syât, phalâho[11]) 109 muktivâcakaḥ ‖ 27 ‖

106 قبول approbation; — 107 هنر skill, science, knowledge; — 108 عقل کلّ natural genius, instinct; — 109 فلاح escape, deliverance.

ajnâne syât tu nâdânî 110, dânâyî 111 tadviparyaye ı
rûpe syât sûrataḥ 112, çavdeshv âvâjaḥ 113 parikîrtitaḥ ‖ 28 ‖

110 Unwissenheit, نادانی; — 111 Weisheit, دانائی; — 112 صورة form, figure; — 113 آواز sound.

gaṃdhe vûyo[12]) 114, lajjatiḥ[13]) 115 syâd rase, sparçe tu lâmasaḫ[14]) 116 ı
jumukhtas[15]) 117 tu kashâye syât, shîrî ◡[16]) 118 tu madhure mataḥ ‖ 29 ‖

---

[1]) so EH, açlaṃ T, açma G. [2]) so GHT, jodâraḥ E. [3]) jâ◡ta E. [4]) yudâyî G. [5]) khi◡ra° E, kharo° T. [6]) najaṉ T, °jara H, °ja◡ra E; °lpe naja ishyate G. [7]) ka◡yâsaḥ E, kayâso H, kyâso ’tha T, keyâso ’tha G. [8]) ja◡na E, yagda GT, tarka (!) H. [9]) yekî° G, yakî◡naṃ E. [10]) s. HT, akala E, yalka G. [11]) °ho HT, °hî E, °so G. [12]) so HT, voyo EG. [13]) lajja◡tiḥ E. [14]) so H, °saha ET, °çaḥ G. [15]) so H, yu° G, ju◡mu° E. [16]) so E, çirî G, çîrî HT.

114 Geruch, بوى; — 115 Geschmack, لذة; — 116 Gefühl, لامسه; — 117 زمخت astringent; — 118 süfs, شيرين.

namak̲[1]) 119 syâl lavaṇe, tejaḥ 120 kaṭau, tikte tathâ talakh 121 ।
amle turçaṃ 122, miçrite syâd âmekhtaḥ[2]) 123 Pârasîmate ॥ 30 ॥

119 Salz, نمك; — 120 scharf, تيز; — 121 bitter, تلخ; — 122 sauer, ترش; — 123 gemischt, آميخته.

durgaṃdhe vadavûî[3]) 124 syât, sapedaḥ[4]) 125 çvetavarṇake ।
syâhas[5]) 126 tu çyâmavarṇe syât, pîte jarda[6]) 127 itî "ritaḥ ॥ 31[7]) ॥

124 übelriechend, بدبوى; — 125 weifs, سپيد; — 126 dunkelfarbig, سياه; — 127 gelb, زرد.

savjaṃ[8]) 128 bhaved dharidvarṇe, rakte surkhaḥ 129 prakîrtitaṃ ।
khavaraḥ[9]) 130 kiṃvadaṃtyâṃ syâd, vacane sakhunaṃ 131 bhavet ॥
sokhataç 132 ca bhaved bhasma sukhataç 133 ca nigadyate ॥ 32[10]) ॥

128 grün, سبز; — 129 roth, سرخ; — 130 Gerücht, خبر; — 131 Rede, سخن; — 132. 133 Asche, سوخته, sowohl sôχta, als sûχta.

talavaṃ 134 tu tathâ "hvâne, nâmni syâd isma 135 nâma 136 ca ।
vivâde bahasaḥ 137 proktaḥ, çapathe kasamo[11]) 138 bhavet ॥ 33 ॥

134 Anruf, طلب begging, requesting; — 135 Name, اسم; — 136 desgl., نام; — 137 Streit, بحث; — 138 Schwur, قسم.

purasîdanaṃ[12]) 139 bhavet prishṭe, pâsukhas[13]) 140 tû 'ttare bhavet ।
siphatas[14]) tu stave prokto, nek̲nâmî[15]) 142 yaçasi smṛitaḥ ॥ 34 ॥

139 Frage, پرسيدن; — 140 Antwort, پاسخ; — 141 Lob, صفة description, epithet; — 142 Ruhm, نيكنامى.

pratâpe tu çikohaḥ[16]) 143 syân, niṃdâyâṃ gîvatir 144 bhavet ।
yâvahaḥ[17]) 145 syât pralâpe 'rthe, satye râstam 146 itî "ritaḥ[18]) ॥ 35 ॥

143 شكوه majesty, dignity; — 144 Tadel, غيبة, غيبتى; — 145 Geschwätz,

---

[1]) so HT, °ka EG. [2]) °khta◡ḥ E. [3]) so T, vûyî H pr. m.; °voyî H sec. m., voi E, voyaḥ G. [4]) so EG, saphe° TH. [5]) çyâ° G. [6]) so H, yarda G, jaṃda T, ja◡rdda E, [7]) Zahl fehlt E. [8]) so H, sajvaṃ E, savujaṃ G, savraṃ T. [9]) kha◡varaḥ E. [10]) hier sind drei Hemistiche als ein çloka gezählt; das dritte fehlt resp. in HT, steht nur in EG. [11]) so T, ka◡s° E, kaçavo G, kaçamo H. [12]) viersilbig, m. c. [13]) so HGT, pâsakhas E. [14]) so E; setâyisaḥ G, sitâyiça H, çitâpiça T; ستايش praise (bessere Lesart!). [15]) so T, neka° EGH. [16]) so E, çukohaḥ H, sukûdaḥ T, jalâlaḥ G, جلال majesty, dignity. [17]) so T, yovahaḥ H, javaha E, iyâvaḥ G. [18]) so E, râçtaḥ samîritaḥ T, râstaṃ samî° H, râsti sa° G.

Gerede; یاب (یاوہ) vain, futile, frivolous, یاوہ a foolish speech; — 146 Wahrheit, راست.

mithyârthe tu durogaḥ[1]) 147 syâd, gaugâ 148 kolâhale bhavet ।
nakkâraḥ[2]) 149 paṭahe, bheryâṃ naphîraḥ 150 parikîrtitaḥ ॥ 36 ॥

147 دروغ a lie, falsehood; — 148 غوغاء quarrel, uproar; — 149 نقارہ a kettledrum; — 150 نفیر a fife, flute.

raksaṃ[3]) 151 nṛityeshu, rakkâso 152 nartake parikîrtitaḥ ।
mehara 153 syât karuṇâyâṃ, khaṃda 154 hâse prakîrtitaḥ ॥ 37 ॥

151 Tanz, رقص; — 152 Tänzer, رقاص; — 153 Zärtlichkeit, مہر; — 154 Lachen, خند.

tavassumaṃ 155 smite proktaṃ, vîbhatse jiçta[4]) 156 ucyate ।
âçcarye tu ajay 157, vîmaṃ 158 bhayânaka iti smṛitaṃ ॥ 38 ॥

155 Lächeln, تبسم; — 156 زشت hideous, ugly; — 157 wundersam, عجب; — 158 furchtbar, بیم.

ahaṃkâre khudî 159, mâne nâjas 160, trâse taras[5]) mataṃ ।
âdare syâc ca tâjîmo 162, vetâjîmî 163 tv anâdare ॥ 39 ॥

159 خودی selfishness; — 160 Stolz, ناز; — 161 Schrecken, ترس; — 162 تعظیم reverence, respect; — 163 Nichtachtung, بی تعظیم.

kshamâyâṃ varadâstaṃ[6]) 164 syâl, lajjâyâṃ ca hayâ[7]) 165 çaraṃ 166 ।
hasadaṃ[8]) 167 syâd asûyâyâṃ, vaire syâd duçmanî 168 'ti ca ॥ 40 ॥

164 Geduld, Ertragen, بر داشت; — 165 Scham, حیاء; — 166 desgl., شرم; — 167 Mifsgunst, حسد; — 168 Feindschaft, دشمنی.

suvukaṃ[9]) 169 tu laghau jneyaṃ, saṃgiṇaṃ[10]) 170 tu gurau bhavet ।
vârîkaṃ 171 tu bhavet sûkshme, tale taha[11]) 172 itî "ritaṃ ॥ 41 ॥

169 leicht, سبک; — 170 schwer, سنگین; — 171 fein, باریک; — 172 تہ, the bottom, deep.

gamaḥ 173 çoke, phasosas 174 tu paççâttâpe[12]), gajay 175 rushi ।
çîle tv asâlatiḥ[13]) 176 proktâ, vedilî 177 cittavibhrame ॥ 42 ॥

173 Kummer, غم; — 174 Reue, افسوس; — 175 Zorn, غضب angry; — 176 اصالة firmness, constancy; — 177 Verstörtheit, بیدلی heartlessness; cowardice; بیدل auch: dejected, sad.

---

[1]) so HT, daro° EG. [2]) so H, nakkâraha T, °re G, nakkâ·raḥ E. [3]) so HT, °ksa E; der ganze Vers fehlt in G, das zweite Hemistich in H. [4]) so TE, jiçtam H, yista G. [5]) so HT, °sa G, °saṃ E. [6]) °sta E. [7]) so E H sec. m., hiyâ G, hayaha T H pr. m. [8]) so T, °da GH, °d E. [9]) savukaṃ T. [10]) so E, samgînaṃ HG, sajnînaṃ T. [11]) so EHG, talaha îritaṃ T. [12]) phavâlâ (!) G. [13]) açâlatî G.

akhlâsas[1]) 178 tu bhavet snehe, garaja[2]) 179 syân manorathe ।
aṃdeçâ[3]) 180 syât tu ciṃtâyâṃ, kârye[4]) kâmaç ca khâhiçiḥ[5]) 181 ॥ 43 ॥

178 اخلاص affection; — 179 Wunsch, غرض; — 180 اندیشه consideration, thought; — 181 خواهش, will, wish, inclination.

utsâhe tu bhavet çâdî[6]) 182, utkaṃṭhâyâṃ tavajjuhaṃ[7]) 183 ।
kapaṭe makaraḥ 184 proktaḥ, pramâde gâphilî 185 bhavet ॥ 44 ॥

182 شادی in pursuit of some aim or object; — 183 توجّع grieving for; — 184 مکر plotting, deceiving; — 185 abstracte î-Bildung aus غافل imprudent, careless.

kârmaṇeshu ca jâdû 186 syân mithunena kriteshu ca[8]) ।
arakas 187 tu bhaved gharme, vâjî 188 syât kautukeshu ca ॥ 45 ॥

186 Zauberei; جادو (skr. u. zd. yâtu) juggling, conjuration, magic; the eye of a mistress, und hierzu pafst mithunena kriteshu sowohl wie die Lesart von G, also wohl: Liebeszauber; — 187 عرق heat; — 188 بازی play, sport.

jriṃbhâyâṃ khamayâjaḥ[9]) 189 syâd, rudite giriyaḥ[10]) 190 bhavet ।
larjaḥ[11]) 191 kaṃpe ca, nidrâyâṃ khvâvaḥ[12]) 192 syât Pârasîmate ॥ 46 ॥
nâṭya(!)vargaḥ.

189 خمیازه yawning; — 190 Weinen, گریه; — 191 لرزه tremor; — 192 Schlaf خواب.

§ 5 (bis v. 49) narakavargaḥ.

asphalaḥ 193 syâc ca pâtâle, sûrâkho[13]) 194 vila ucyate ।
aṃdhakâre tu[14]) târîkî 195, sarpe mâra 196 iti smritaḥ ॥ 47 ॥

193 Unterwelt, اسفل lower, lowest; — 194 Loch, سوراخ; — 195 Dunkelheit, تاریکی; — 196 Schlange, مار.

jaharas 197 tu vishe proktaḥ, kharâtîn 198 kaṃcule[15]) smritaḥ ।
vyâlagrâhiṇi mârgîro 199, narake dojakhaṃ 200 bhavet ॥ 48 ॥

197 Gift, زهر; — 198 خراطین earthworms; für kaṃcula ist die Be-

---

[1]) °ças T, ekhalâsas E. [2]) so E, ârajû HT, ârayû G; آرزو desire, wish. [3]) so E, °çaha T, °çaḥ H, °sas tu G. [4]) so E, kâme TG, kâmaṃ H. [5]) so EH, khvâ° T, kâhisau G. [6]) so EH, sâdî GT. [7]) so H, tavajja° ETG. [8]) so E, (aber kărma°); karmiṇeshu ca yâdî syât syât (!) striyâ yuṅsâ krite(shu) ca G; in HT fehlt das Hemistich. [9]) so H, °jaha ET, °yâyaḥ G. [10]) so H, °yahaṃ T, °yaha EG. [11]) so H pr. m. T, larjaha E, larjaḥ G. [12]) so G(shvâ°) HT, khâvaḥ E. [13]) çû° T, sûlâsho G. [14]) so GHT, °reshu E. [15]) so E, kiṃcule H, kaṃcuke GT.

deutung: Regenwurm bisher unbekannt; — 199 مارگیر snakeketcher; — 200 Hölle, دوزخ.

syâsatir[1]) 201 yâtanâyâṃ syân, nârakeshu ca dojakhî 202 ।
alamas 203 tu bhaved duḥkhe, râhataḥ 204 sukha ucyate ॥ 49 ॥
narakavargaḥ[2]) ॥

201 سیاسة punishment; — 202 Höllenwesen, دوزخی; — 203 الم grief, affliction; — 204 Wohlbefinden, راحة quiet, repose.

§ 6 (bis v. 56) vârivargaḥ.

dariyâ 205 syât samudreshu, shoraḥ[3]) 206 çavdâdicihnitaḥ[4]) ।
âvaḥ[5]) 207 syâd apsu, maujas 208 tu taraṃge parikîrtitaḥ ॥ 50 ॥

205 See, دریا; — 206 شور cry, noise; — 207 Wasser, آب; — 208 Woge, موج.

viṃdau syât kataraḥ[6]) 209, kûle kinâraḥ 210 parikîrtitaḥ ।
aṃtarîpe jajîraḥ[7]) 211 syât, kardame gila 212 ucyate ॥ 51 ॥

209 Tropfen, قطرة; — 210 Ufer, کنار; — 211 Insel, جزيرة; — 212 Schlamm, گل clay, mud.

jâle dâma 213 iti khyâto, rajjau rasaṇ[8]) 214 prakîrtitaḥ ।
sadaphas 215 tu bhavet çuktau, çaṃkhâdau mohara[9]) 216 smṛitaḥ ॥ 52 ॥

213 Netz, دام; — 214 Strick, رسن; — 215 Muschel, صدف; — 216 مهره a small shell or pearl used as a philtre by women.

palvale cakaraḥ[10]) 217 proko, jaṃgalaḥ[11]) 218 çaivale smṛitaḥ ।
naukâyâṃ tu bhavet kiçtî[12]) 219, kalushe cirkînaṃ[13]) 220 bhavet ॥ 53 ॥

217 Lache, Pfuhl; چکره a bubble, froth; — 318 (244) جنگل, jungle; çaivala ist nur Name einer im Jungle wachsenden Wasserpflanze (Blyxa octoandra); — 219 Boot, کشتی; — 220 چرکین sordid.

gaṃbhîre 'ṃvuni garkâvo 221, matsye mâhî 222 prakîrtitaḥ ।
kachape kaçaphaḥ[14]) 223 proktaḥ, saṃgapuçto[15]) 224 'pi kathyate ॥ 54 ॥

---

[1]) spâ° E, çâ° H, sâ° GT. [2]) so E, fehlt GHT. [3]) so E, çoraḥ GHT. [4]) so E, cihnayo H, °hnitâ GT. [5]) so G, âv HG, av T. [6]) so H, °raha E, °raḥ GT. [7]) jayîraḥ H, °raḥ G, ja◡jîraba E, jaîlaba T. [8]) so E, ressâ T, resmâ H, resmân G; ریسمان a rope. [9]) so E, °raḥ GT, °re H. [10]) so E, cohkvaraḥ T, cokk° H, cok kâraḥ G. [11]) so E, jaṃgâlaḥ GHT. [12]) so TH, ki◡çtî E, kestî G. [13]) so T, °rkin H pr. m., °rkîn H sec. m., cirkinaṃ E. [14]) kaçphaḥ E, kasaphaḥ G, kaçapaḥ H, kaçyapaḥ T. [15]) °kto Alle; saṃgapuçto H, saṃgaḥ puplo E, saṃgaḥ pusro T, lâgpustaç câ G.

221 غرقاب deep water; — 222 Fisch, ماهی; — 223 Schildkröte, کشف; — 224 desgl., سنگ پشت (Stein-Rücken; als bahuvrîhi).

jallus tu 225 syâj[1]) jalaukâyâṃ gvaukas[2]) 226 tu bheka ucyate ।
haujas 227 tu pushkariṇyâṃ syât kûpe câhaḥ 228 prakîrtitaḥ ॥ 55 ॥

225 Blutegel, زلو, زلوک (aus dem Sanskṛit? cf. Bötticher Arica p. 67. Hübschmann ZDMG 38, 424); — 226 Frosch, غوک; — 227 حوض a pond; — 228 چاه a well, pit.

vâpyâṃ tu vâulî 229 proktâ, parikhâyâṃ tu khaṃdakaḥ 230 ।
dariyâ[3]) 231 jalâçayeshu syâṭ, padme nîlopharaṃ 232 bhavet ॥ 56 ॥
vârivargaḥ ॥

229 باولی a large well, ist bei Skakesp. als hind. bezeichnet; — 230 خندق fossa circum munimentum; — 231 (205) دریا a sea, ocean; — 232 نیلوفر the water lily (Nebenform: نیلوفل und نیلوپل; aus: nîlotpala, Vullers; s. de Lagarde Ges. Abh. p. 11).

§ 7 (bis v. 124ª) brahmavargaḥ.

uparyarthe bhaved vâlâ 233 'dho-'rthe pâyîṇ[4]) 234, tadaṃtare ।
miyânaḥ 235 syât, sthale jâyo 236, jamîṇ[5]) 237 bhûmau prakîrtitaḥ ॥ 57 ॥

233 oben, بالا; — 234 unten, پائین; — 235 mitten, میان; — 236 جای a place; — 237 Erde, زمین.

nimne pastî 238, vilaṃd 239 ucce, haṃvâras 240 tu same bhavet ।
kullaḥ[6]) 241 çṛiṃge girer, garte gâraḥ 242, koho 243 girau bhavet ॥ 58 ॥

238 tief, پستی, Tiefe; — 239 hoch, بلند; — 240 هموار plain; — 241 کله top, summit; — 242 Höhle, غار; — 243 Berg, کوه.

vane tu jaṃgalo 244, vṛikshe darakhtaḥ 245, pattrake varag 246 ।
pushpe gulaṃ 247, phale mevâ 248-vârau 249, tukhmaṃ 250 tu vîjake ॥ 59 ॥

244 (218) Wald, جنگل; — 245 Baum, درخت; — 246 Laub, برگ; — 247 Blume, گل; — 248 Frucht, میوه; — 249 desgl., بار; — 250 Samen, تخم.

mûle vekhas 251 tu, çâkhâyâṃ çâkhaḥ 252 çṛiṃge paçor api ।
sâyâ 253 châyâ suvṛikshâder, vyâghre çeraḥ 254 prakîrtitaḥ ॥ 60 ॥

---

[1]) so P; jallulu syâj E, jalaḍu tu (ohne syaj) GHT. [2]) gvau◡kas E, bajako HT, vujako G; وزغ und وزک, a frog. [3]) zweisilbig! [4]) pâpîn E, pâpâṇ T, pâyâna GH. [5]) jamînaṃ E, yamina G, jamî HT. [6]) kullaha E, kulâha T, kulâḥ H, kullaḥ G.

251 Wurzel, بیخ; — 252 شاخ, a branch, a horn; — 253 Schatten, سایه; — 254 Tiger, شیر (in der Regel: Löwe, daneben jedoch auch: a tiger).

âhû 255 mṛige, gaje phîlo 256, duṃ 257 puche, paçma 258 romasu ǀ
çaçake kharagoçaḥ 259 syâd gardabheshu kharo 260 bhavet ǁ 61 ǁ

255 Gazelle, آهو; — 256 Elephant, فیل; — 257 Schwanz, دم; — 258 پشم wool; camels or asses hair; — 259 Hase, خرگوش; — 260 Esel, خر.

sagaḥ 261 çuni, çṛigâle tu çigâlo 262, 'çve 'spa 263 ucyate ǀ
tilitse 'jdaṛ 264, vṛiçike tu kajduṃ[1]) 265, haivân 266 paçau bhavet ǁ 62 ǁ

261 Hund, سگ; — 262 Schakal, شگال; — 263 Roſs, اسپ; — 264 tilicha, tilitsa Boa constrictor, اژدر, اژدرها und اژدها a dragon (das dritte Wort, aus ajhi dahâka, ist wohl die Quelle für die beiden vorhergehenden Wortformen); — 265 Scorpion, کژدم und گژدم; — 266 Vieh, حیوان.

khage murgas 267 tu pariṃdâ 268, raviṃdâ 269 bhûcaro bhavet ǀ
gavi gâvaṃ 270, vuja[2]) 271 châge, meshe meshaḥ[3]) 272 prakîrtitaḥ ǁ 63 ǁ

267 Vogel, مرغ; — 268 پرنده a bird; — 269 رونده a goer, traveller, passenger; — 270 Kuh, گاو; — 271 Bock, بج; — 272 Schafbock, میش.

tasya patnî bhaved gaddî 273 Pârasîkamate dhruvaṃ ǀ
puchopalakshito yas tu gospaṃdaḥ 274 sa iho 'cyate ǁ 64 ǁ

273 weibliches Schaf; wohl غذی feeding nourishing? cf. غذوّی or غذّی pl. غذاء new born (lamb or kid); cattle sold with young; — 274 lang- oder fett-schwänziges (Schaf) گوسفند a sheep, a ram, a goat.

çiçus tu tatsuto varaḥ[4]) 275 tadvarṇâ vahavo 276 matâḥ ǀ
naro 277 nari, strîshu mâdâ 278, gâvmeço[5]) 279 mahishe smṛitaḥ[6]) ǁ 65 ǁ

275 Lamm, بره; — 276 ? tadvarṇa „damit gleichfarbig, derartig"; cf. بهو a large stable for tame cattle; man könnte freilich vahavo auch als Nom. Plur. von vahu auffassen; dann wäre jedoch der ganze pâda: „als derartige gelten Viele" ziemlich überflüssig (cf. den Schluſs von v. 66); — 277 Mann, نر; — 278 Weib, ماده; — 299 Büffel, گاومیش.

---

[1]) so nach HTG; jdara H, sdara G, sjṛiṇ T; vṛiçcike tu kajduṃ HG, vṛiçcike gajduṃ T; E ganz verderbt: tilitse gajaduma vṛiçcike jyuma. [2]) so E, gâvaṃ tu buj HT, gâvaç ca vujaḥ G. [3]) so E, kocaḥ GHT; قوچ a horned fighting ram. [4]) varaha E, vararaha T, varaḥ G, babaṛraḥ H. cf. Sk. varkara, zd. (maêshî) vehrkavaiti (nicht zu vṛika gehörig!) Vd. 19, 109. [5]) so H, gâva° EGT. [6]) so GT, °sha bhavet T, °shî smṛitâ E.

çuke tûtî 280, vânare tu maimûn 281, gurvâ 282 viḍâlake ।
mûçaḥ 283 syân mûshake, kâke kulâgo[1]) 284 dvividho hi saḥ ॥ 66[2]) ॥

280 Papagei, طوطی; — 281 Affe, میمون[3]); — 282 Katze, گربه; — 283 Maus, موش; — 284 کلاغ a crow, rook, raven; die Schlufsangabe ist wohl nur pâdapûraṇârthaṃ hinzugefügt (cf. 276?); auch ist mir unklar, worauf sie sich bezieht (cf. etwa Ind. Streifen 1, 275 fg.); besonders eigen ist das hi!

kavûtaraḥ 285 kapote syât, kuṃjiçkaç[4]) 286 caṭake bhavet ।
çâkhâpure sarâyaḥ 287 syân, nagare çaharo 288 bhavet ॥ 67 ॥

285 Taube, کبوتر; — 286 (464) گنجشک, sparrow (Bötticher, Arica p. 67); — 287 Vorstadt, سرای a palace, king's court; — 288 Stadt, شهر.

madhyame tu pure kasvâ[5]) 289, pattane gaṃja 290 ucyate ।
dukânas[6]) 291 tv âpaṇe khyâto, haṭṭe vâjâra 292 ucyate ॥ 68 ॥

289 قصبه a town or the middle of it; — 290 گنج a mart; — 291 دکان a shop; — 292 بازار a market.

vapre ca câradîvârî[7]) 293, bhittau dîvâra[8]) 294 ucyate ।
hujaraḥ[9]) 295 tu guphâyâṃ[10]) syât grihe khânaḥ[11]) 296 prakîrtitaḥ ॥ 69 ॥

293 چار دیواری a courtyard, area; — 294 دیوار a wall; — 295 حجره a courtyard; guphâ ist im Sk. bis jetzt unbekannt, cf. mahr. guṃphâ an arbour, a bower, a cavern or cave; — 296 Haus, خان.

pâyagâho[12]) 297 'çvaçâlâyâṃ, kârakhânaḥ[13]) 298 çilpaveçmani ।
gavâkshe tu jharokhâ 299 syât[14]), harmyâdau mahalo 300 bhavet ॥ 70 ॥

297 پایگاه stable; — 298 کارخانه a workshop, manufactury; — 299 Fenster, hind. جھروکھا; — 300 محل a building, house, mansion.

aṃtaḥpure sarâyaḥ 301 syât, sahanas 302 tu grihâṃgaṇe ।
dvâre tu daravâjaḥ[15]) 303 syât, kapâṭe takhtâ[16]) 304 ucyate ॥ 71 ॥

301 Serail, سرای; — 302 صحن a court; — 303 Thür, درواز large gates

---

[1]) so E, kalâgo GHT. [2]) Zahl fehlt E. [3]) μιμω. [4]) so E, gujiṅkaç H, gujiçka TG. [5]) ka◡savâ E. [6]) so E, dokk° HTG. [7]) so E, syâc câra° G, cahâra H; °devârî HTG. [8]) devâra HT, devâla G. [9]) so H (°re sec. m.) °raha T, °râ E, °ras G. [10]) guṃph° G. [11]) so HT, °ṇaha G, °nâ E. [12]) so HT, pâpayag° G, pây‿gâ° E. [13]) so HT, °shâṇâ G, °khânaha E; dreisilbig, m. c. [14]) so E, paṃjaraḥ (paj° HG) prokto HTG, پنجر (aus Sk. pañjara?). [15]) so E, °vâraḥ HTG, cf. دربار (a house!). [16]) so E, taka HTG, طاق an arch, the space between any two planks; open.

or doors of a city or palace; — 304 Thürflügel, تخته a board, plank, tablet, تخته در the panel of a door.

tiryakkâshṭhadvayam vâjûr 305, ûrdhvam saradaraḥ[1]) 306 smṛitaḥ ׀
jeradaraḥ[2]) 307 syâd adhaḥkâshṭhe, cahâracovaç[3]) 308 catushṭaye[4]) ॥ 72 ॥

305 Zwei Querbretter, Querbalken, بازو the post of a door, the side of a bedstead; Mahr. vâjû the two side poles of a sâṭhâ i. e. the frame or box of a carriage or palanquin; — 306 (zwei) obere dgl., سردر the lintel of a door; „sardar a long team of bamboo, on which the thatch rests" Grierson Bihâr peasant life 1257; wird nach Hörnle's freundlicher Mittheilung in Calcutta gewöhnlich sardal gesprochen; — 307 unteres Holz (Brett), زیر zîr (in India zer) below, und در Thür; — 308 viererlei (Gebälk), چهار und چوب Holz; also: 305 die beiden Seitenplanken einer Thür, 306 die Decke, 307 die Schwelle derselben, 308 alle vier Theile; 306 und 307 sind nach Hörnle noch jetzt allgemein üblich, 308. 309 dagegen ungebräuchlich.

lohaveṇyâm tu jamjîraḥ 309, kuphalam 310 syât tadargale ׀
udghâṭane lohakumcyâm[5]) kilîdaḥ 311 parikîrtitaḥ ॥ 73 ॥

309 زنجیر a chain; lohaveṇî, eiserne Kette, bisher unbelegt; — 310 قفل a lock, bolt, bar; — 311 کلید a key[6]); kuñcî unbelegt.

veṇînivamdhakomṭâyâm[7]) halakaḥ[8]) 312 syât Pârasîmate ׀
jînaḥ[9]) 313 pârohaṇe[10]), jâroḅ[11]) 314 mârjanyâm, sîmni hadda 315 ca ॥ 74 ॥

312 حلکاء und حلکه a sort of covering or veil; veṇîbandha, Band für die Haarflechten, ist zwar unbelegt, paſst aber herzu; mit komṭâ etc. (s. unten) aber weiſs ich nichts zu machen; — 313 Sattel, زین; pârohaṇa steht somit etwa für prârohaṇa?, das freilich auch bis jetzt nicht belegt ist; — 314 Besen, جاروب; — 315 حدّ boundary, limit.

jagadarthe âlamaḥ[12]) 316 syân, mṛidi khâkaḥ[13]) 317 prakîrtitaḥ ׀
deçe vilâyataç[14]) 319 ca syât, pulaḥ 319 setâv, athâ 'dhvani ॥ 75 ॥

---

[1]) so HT, çara° G, saradalaḥ E. [2]) dreisilbig; so HT, yena° G, jeradak E. [3]) viersilbig; so HT, câraco° G, cahârajo-kaç E. [4]) so E, tacca° HTG. [5]) so E, °kumjyâm HTG. [6]) κλειδ. [7]) ? so E, komdhâ° H, koṭhâ° T, koshṭhâ° G. [8]) zweisilbig; so H (°kai sec. m.), °kaha T, °kaḥ G, °kâ E. [9]) so H, jînaha E, jîṇaḥ G, jîna T. [10]) so TG, °hane (dentales n) E, °paṇe H. [11]) so H, jâroy T, rova GE. [12]) so E, âlimaḥ T, jâlimaḥ H (das Hemistich fehlt in G). [13]) khâ-kaḥ E. [14]) valây° HT.

316 Welt, عالم; — 317 Thon, خاک; — 318 Ort, ولایة; — 319 Brücke پل.

râhaḥ 320, kroçe kiroha[1]) 321 syât, saṃgaḥ 322 pâshâṇavâcakaḥ ı
kânaḥ[2]) 323 khanau, tathâ "râme vâgaḥ 324, çreṇyâṃ katâr[3]) 325 bhavet ‖ 76 ‖

320 راه a road, way; athâ 'dhvani gilt somit von v. 75 herüber; — 321 کروه a roadmeasure of two miles; — 322 Stein, سنگ; — 323 کان a mine; — 324 Garten, باغ; — 325 Reihe (von Bäumen, Allee?), قطار a string, series, row.

iṃdhane ca hema[4]) 326 proktaḥ[5]), kâshṭhe cova 327 iti smṛitaḥ ı
guṃcâ[6]) 328 tu korake phulle, çaguptâ[7]) 329 kusume bhavet ‖ 77 ‖

326 Brennholz, هیمه; — 327 Holz, چوب; — 328 Knospe, غنچه a rosebud; — 329 Blume, شگفته.

khûkas[8]) 330 tu sûkare, ṛikshe khirsaḥ 331, surkhâv 332 rathâṃgake ı
magaso 333 makshikâyâṃ syâd, bhramare jaṃvura[9]) 334 smṛitaḥ ‖ 78 ‖

330 Schwein, خوک; — 331 Bär, خرس; — 332 سرخابی a red duck; — 333 Fliege, مگس; — 334 Biene, زنبور.

tâûsaḥ[10]) 335 syân mayûreshu kavakas[11]) 336 tu cakorake ı
vâlaḥ 337 pakshe, tad-âdhâre vâjû 338, vaccâ[12]) 339 çiçau bhavet ‖ 79 ‖

335 Pfau, طاؤس[13]); — 336 Rebhuhn کبک; — 337 بال a wing; — 338 بازو the arm or the upper part of it; — 339 Junges, بچه.

jamâyataḥ[14]) 340 samûhe syâd, aṃvohâ[15]) 341 'tikadaṃvake ı
tûdâ[16]) 342 puṃje, yuge juphto[17]) 343, mardaḥ 344 puṅsi, janaḥ[18]) 345 striyâṃ ‖ 80 ‖

340 Versammlung, جماعة; — 341 grofse Menge; cf. انبوه multitude; — 342 Haufen, تود; — 343 Paar, جفت; — 344 Mann, مرد; — 345 Frau, زن.

haramo 346 bhoginîstrîshu, dharmapatnyâṃ tu[19]) auratiḥ[20]) 347 ı
vâligo[21]) 348 dṛishṭarajasi[22]) javâno[23]) 349 yuvatî bhavet ‖ 81 ‖

[1]) so E, kuro° HTG. [2]) so E, kâna H sec. m., kâni H pr. m. kâniḥ T, pâṇiḥ G. [3]) so H, katâra TG, ka◡tâ E. [4]) so E, hejumaḥ HT, hejimaḥ G; هیزم wood timber. [5]) so TH, kto E, °ktâ G. [6]) so E, °cai G, gumjaḥ H, gujaha T. [7]) so E, sukuphtaḥ H, °taha T, çukuphta G. [8]) so EH, khakas T, shûsas G. [9]) so E, saṃgaraḥ HT, çagaraḥ G; شکر a black bee (auch Stachelschwein und Igel, cf. سنگر, شغر). [10]) so EH, taû G, tâvu° T. [11]) kâvu° G. [12]) so E, vaccaḥ HT, vacca G. [13]) ταως. [14]) yamâ° G. [15]) so E, aṃvûho HG, aṃvuho T. [16]) so E, todaḥ TG, todaṃ H. [17]) so ET, gu° H, yukto G. [18]) so G, ja◡naḥ E, jana HT. [19]) ohne saṃdhi. [20]) so ETG, jaura° H. [21]) so HG, vâlino T, °ligaha E. [22]) so HTG, °si syât E. [23]) so E, yuvâno HTG.

346 Kebsweib, حرم a wife; — 347 Gattinn, عورت; — 348 بالغ arrived at puberty; — 349 Jungfrau, جوان.

dâsyâṃ dâyaḥ 350, phâhiçaḥ[1]) 351 syâd veçyâyâṃ, kuṭṭinî dallaḥ[2]) 352 ।
dupuçtaṃ[3]) 353 garbhiṇîshu syât, putre tu pisaro 354 bhavet ॥ 82 ॥

350 Dienerinn, دایه a nurse, fostermother; — 351 Hure, فاحشه; — 352 Kupplerin, دله a sly, deceitful woman, a coquette, دلاله an amorous blandishment; — 353 schwanger, دوپسته; — 354 Sohn, پسر.

dukhtaras 355 tu sutâyâṃ syân, mâdaro 356 mâtari smṛitaḥ ।
khvâharas 357 tu bhaginyâṃ syâd, dâmâdas 358 tu sutâdhave ॥ 83 ॥

355 Tochter, دختر; — 356 Mutter, مادر; — 357 Schwester, خواهر; — 358 Tochtermann, داماد.

janake padaraḥ 359 proktaḥ, shauharas[4]) 360 tu dhave bhavet ।
garbhe tv âvistanaḥ 361 prokto, nâmardas 362 tu napuṅsake ॥ 84 ॥

359 Vater, پدر; — 360 شوهر a husband; — 361 Embryo, aber آبستن bedeutet vielmehr: pregnant; — 362 Eunuch نامرد.

jarâyâṃ tu bhavet pîrî 363, vâlye tiphlî[5]) 364 ca, vâlake ।
tiphlo[6]) 365, vṛiddhe bhavet pîro 366, bhrâtari syâd virâdaraḥ 367 ॥ 85 ॥

363 Alter, پیری; — 364 Kindheit, طفلی; — 365 Kind, طفل; — 366 alt, پیر; — 367 Bruder, برادر.

agraje tu kalânaḥ[7]) 368 syâd, anuje khurda 369 ity api ।
durvale lâgaraḥ 370 prokto, valini syâj jorâvaraḥ 371 ॥ 86 ॥

368 کلان elder; — 369 خرد minute, little, small, young; — 370 schwach, لاغر; — 371 stark, زوراور.

tuṃdile tu pharavehaḥ 372 syât, karas 373 tu vadhire bhavet ।
cikitsâyâṃ ilâjaḥ[8]) 374 syâd, dârû 375 syâd aushadheshu ca ॥ 87 ॥

372 فربه fat; — 373 taub, کر; — 374 علاج remedy, treatment; — 375 دارو a medicine, drug.

vyâdhau marajas[9]) 376 tu, chikkâyâm atsaḥ[10]) 377, sidhmani vaivaphâ[11]) 378 ।
çurphâ[12]) 379 kâse[13]), culaḥ 380 kaṃḍvâṃ, çothe tv âmâsa[14]) 381 ucyate ॥ 88 ॥

[1]) so HG, °saḥ T, °çaha E. [2]) dallaha HT, lalâlaḥ G, daha E. [3]) so E, dop° HTG. [4]) so E, ço° H, çû° TG. [5]) so H, tiphî G, tiplî T, tiphalî E. [6]) so HTG, tiphalo E. [7]) so HT, kalâ G, kalâca E. [8]) so E, yalâjaḥ H, yâl° G, ajâlaḥ T. [9]) so EG, parajas T, mâjas H; zweisilbig. [10]) so H, atsaha ET, yatsaḥ G. [11]) so EG, vaiba° H, vepaphâ T. [12]) so E, suphâḥ G, surphaḥ HT. [13]) so G, kâçe EHT. [14]) omâsa H, âmâça G.

376 Krankheit, مرض; — 377 Niesen عطسة[1]); — 378 ? Aussatz, aber بيوفا nur adj.: faithless, fickle, ungrateful; Hörnle conjicirt dafür: caicakâ cf. چيچک smallpox; — 379 Husten سرفه; — 380 ? Jucken, cf. چل چول penis; — 381 آماس ا a tumour, a swelling.

jakhamas[2]) 382 tu vraṇe, kushṭhe vâḏ[3]) phiraṃgaḥ 383 prakîrtitaḥ ı
varsaṃ[4]) 384 çvitreshu[5]), khârishaṃ[6]) 385 kaṃḍûshu rasakeshu[7]) ca ‖ 89[8]) ‖

382 Wunde, زخم; — 383 (1050) Aussatz, باد فرنگ (s. Vullers, wo resp. erysipelas, Anthony's fire); — 384 برص leprous; — 385 ?خارش a sore, a scratch, itching; kaṇḍû, Plur., hier wohl im Sinne von kaṇḍura, resp. als concret. Subst.: juckende Stelle?; und rasaka wohl auch als Subst. zu fassen: feuchte, juckende Wunde?; zur Lesart von TG cf. rakasâ (fem.) eine Gattung des leichten Aussatzes.

durnâmni syâd vavâsîro[9]) 386, jvare tapa 387 itî "ritaḥ ı
unmatte syât[10]) tu majnûnas[11]) 388, tasya bhâvo junûn[12]) 389 bhavet ‖
aṃdhe koras 390 tu, vîmâro 391 vyâdhite tu, marag̑[13]) 392 mṛitau ı
vehoso[14]) 393 mûrchite, mûrchâ vehosî[15]) 394 Pârasîmate ‖ 90[16]) ‖

386 بواسير emerods, piles; — 387 Fieber, تپ; — 388 besessen, مجنون; — 389 Besessenheit, جنون; — 390 blind, كور; — 391 krank, بيمار; — 392 Tod, مرگ; — 393 bewufstlos, بيهوش; — 394 Bewufstlosigkeit, بيهوشی.

nutphâ[17]) 395 çukre ca, gostaṃ 396 syân mâṅse, khûnaṃ 397 tu çoṇite ı
çâçâ[18]) 398 mûtre ca peçâva[19]) 399, valagami[20]) 400 - guhau[21]) 401 male ‖ 91 ‖

395 نطف spermata genitalia; — 396 Fleisch, گوشت; — 397 Blut, خون; — 398 Urin, شاشه; — 399 desgl., پيشاب; — 400 Schmutz, بلغم[22]) phlegma; die Lesart von HTG (s. unten) ist entschieden besser; — 401 desgl., گوه human dung.

---

[1]) ein onomatopoion; cf. unser: atsî! und: âsh iti kshuvata upâçṛiṇot Pañcav. 8, 2, 1 (danach das: âshkâranidhanam). [2]) so E, jashamas T, janmaḥ syât G, jakhagas H. [3]) so E, vâda TG, vâi H. [4]) so HT, °rçaṃ G, °rsa E. [5]) so TG, çci° HE. [6]) so conj.; °ristaṃ EHTG. [7]) so EH, rakaseshu TG. [8]) Zahl fehlt E. [9]) so EHT, vasrîsî tu (!) G. [10]) so HT, syâc ca G, blos tu E. [11]) P's Conjectur; majjûvas ET, mayyûcas H, mayyûvas G. [12]) P's Conjectur; janû ET, yûnû H, yujû G; über Abfall von finalem n s. oben p. 22. [13]) so H, maraga T, marga E, marajaṃ G. [14]) so E, °hûso T, °hûsa G, °hûço H. [15]) so EG, °hûsî HT. [16]) zwei çloka in E als einer gezählt. [17]) so E, nutphaḥ G, nuphtaḥ HT. [18]) so HT, çaçâ G, çâçaha E. [19]) so EH, °vaḥ GT. [20]) so E; saragîna HT, çiragîta G, سرگين dung. [21]) so HTG, guhire E. [22]) φλεγμα.

vitastau tu vilistaḥ[1]) 402 syât, tamâcâ[2]) 403 tu capeṭake ।
râstas 404 tu dakshiṇe, vâme capo 405, 'gre peça 406 ucyate ॥ 92 ॥

402 بلست a span; — 403 Ohrfeige; hind. تماچا und تماچه, pers. طمانچه und تبانچه, Shakesp. „or تپاچه, from تپ, a slap, a blow", der Schlag also vom brennenden Schmerz benannt; — 404 rechts, راست; — 405 links, چپ; — 406 vorn, پیش.

paççât pasaḥ 407, kuṃḍale tu goçavâra 408 itî "ritaḥ ।
keshâṃcit tu[3]) mate strîṇâṃ, nṛiṇâṃ halkaḥ[4]) 409 prakîrtitaḥ ॥ 93 ॥

407 hinten, پس; — 408 گوشواره an earring; — 409 حلقة a ring.

ârâyiças[5]) 410 tu nepathye, mâlâyâṃ tasavî[6]) 411 matâ ।
aṃguçtarî 412 tû "rmikâyâṃ, mudrâyâṃ mohaṛ[7]) 413 ucyate ॥ 94 ॥

410 آرایش ornament; — 411 Kranz, تسبیح a rosary, a chaplet of beads; — 412 انگشتری a ring worn on the finger; — 413 Siegel, مهر.

vastre pârcaḥ[8]) 414, viçeshe tu paṭṭaje âvareçamî[9]) 415 ।
sâmânye karapâsaḥ[10]) 416 syât, sadhâtau jarkaçî[11]) 417 bhavet ॥ 95 ॥

414 Kleid, پارچه; — 415 feines, seidenes Kleid, ابریشمی; — 416 gewöhnliches (Kleid), کرپاس ist aber fine linen; — 417 „mit Metall", im Sinne von: „mit Gold, golddurchwirkt"; زرکش a gold wire drawer; embroidered or covered with gold thread; davon eine Weiterbildung auf î.

çâlaḥ[12]) 418 syâd râṃkave câ, 'nye[13]) sûpha 419-mashmalakâdayaḥ 420 ।
dairghye tûlaṃ 421, parîṇâhe[14]) arja 422, çustas 423 tu dhâvite ॥ 96 ॥

418 râñkava, aus dem Haar der rañku-Antilope gefertigt, wollen; *n.* eine wollne Decke; شال a shawl or mantle made of very fine wool of a species of goat, common in Tibet; — 419 Wolle, صوف; — 420 مشمّل, مشملة a garment of coarse velvet, which quite covers the body; — 421 طول length, longitude; — 422 عرض breath, amplitude; — 423 gewaschen, شست.

câdarî[15]) 424 tu nicole[16]) syâc, cole tu tilakâdayaḥ 425 ।
vitâne çâmiyânaḥ[17]) 426 syât, taṃvû 427 syâd vastraveçmani ॥ 97 ॥

---

[1]) sta E, valistaḥ HT, cilîstaḥ G. [2]) so E, fehlt T, tamâcas G, syân navâṃcas H. [3]) so HGT, tu fehlt E. [4]) so H, °lkaha T, °lkaḥ G, °lkâ E. [5]) so H, °sas G, ârâiças E, ârâkhas T. [6]) so T, taçavî H, tisavî G, tasvî E. [7]) so H, °hara TGE. [8]) so T, pâsvah H, yârcce G, pâracâ E. [9]) so T, paṭṭaje tv âva° H, paṭukujeṃ viva resamî G, paṭṭaje tuca reç° E. [10]) so E, °vâsaḥ G, °vâsaṃ T, °vâlaḥ H. [11]) so E, °sî HT, garakasî G. [12]) so H, çâlyaḥ G, sâlaḥ T, çâlaḥ E. [13]) Nom. Plur. Masc.; wohl: çabdâḥ? [14]) so HT, pari° E, paranâhe G. [15]) so HTG, ċadarî E. [16]) so HT, nîc° G, nivâse E. [17]) so H, °naḥ G, çâmiânaha T, çamiyâna E.

424 Überwurf, Mantel, چادر; — 425 Jacke تلکی a sleeveless garment, a gown; — 426 Traghimmel, Baldachin, شامیانه a parasol, umbrella, canopy, hind. شمیانه a canopy, an awning, von شمیا heaven; — 427 Zelt, hindust. تنبو.

lumgî 428 bhaved adhovastre, jâmâ[1]) 429 syât kamcuke tathâ ।
bhaved dastâram 430 ushṇîshe[2]), kamarvaṃdaḥ[3]) 431 kaṭau tu yat ॥ 98 ॥

428 لنگی a cloth worn round the loins and passed between the legs; — 429 جامه gown, coat; — 430 Turban, دستار the sash of fine muslin cloth wrapped round the turban; — 431 was an der Hüfte sich befindet, کمربند a waistband, sash.

poçîdanî 432 parîdhâne câ, "sane[4]) syân nicîmanaṃ[5]) 433 ।
kanâtaḥ 434 pratisîrâyâm[6]), ijâraḥ[7]) 435 syâd adho-'ṅçuke ॥ 99 ॥

432 پوشیدنی clothing, dress; — 433 Sitz; نشیمن place of sitting, seat; — 434 Vorhang, قنات a screen; — 435 ازار izâr trowsers, drawers, reaching to the feet; eine passende Bedeutung für adho-'ṅçuka, Untergewand.

dhâvane çustanaṃ 436 proktaṃ, guslaṃ[8]) 437 snâne prakîrtitaṃ ।
kuṃkume jâpharâ[9]) 438, lâkho[10]) 439 lâkshâyâṃ parikîrtitaṃ ॥ 100 ॥

436 Waschen, شستن; — 437 Baden, غسل; — 438 زعفران saffron; — 439 Lack, hind. لاکہ.

karanphalo[11]) 440 lavaṃge syâd, dâra[12]) cînî 441 guḍatvaci ।
dânacînî[13]) 442 Cînajâte kaṃcuke ca nigadyate ॥ 101 ॥

440 قرنفل a clove; — 441 guḍatvac, aromatische Rinde der Laurus cassia; دارچینی cinnamom; — 442 ?دانه grain, berry, seed, corn, und چینی Chinese sowie: white sugar candy. Cînajâta liegt nicht vor[14]); kaṃcuka ist: Mieder, Jacke, Kleid; gehören etwa beide Wörter zusammen als Bezeichnung nur eines Gegenstandes? und zwar erwartet man dann nach dem Zusammenhang nicht: Mieder, sondern etwas der Botanik Angehöriges; ob etwa: Seidencocons? (heifsen freilich sonst پیله, und gehören resp. vielmehr zur Zoologie; indessen dás könnte hier leicht verwechselt sein).

---

[1]) so EH, yâmâ GT. [2]) so EHT, °ra çiroveṭe G. [3]) so HT, kamara° E, kamarvastaḥ G; cf. کمربسته ready, prepared, a servant. [4]) so HG, 'çane T, vâsame E. [5]) so H sec. m. (pr. m. unklar), niçîpanaṃ T, naçebhanaṃ E, syâdhivesânama G. [6]) so H, stî° G, çî° ET. [7]) so E, °yâṃm edhâraḥ H, °yâṃm ejâraḥ T, °yâm eyâra T. [8]) gusla H, goslaṃ G, gusalaṃ E, gustva T. [9]) so ET, yapharâ G, âpharâ H. [10]) so HT, lâsho EG. [11]) so E, karanaṃphale H, karaṃnaphastvo T, karaṃpararo G. [12]) so E, âra HG, dâru T. [13]) das zweite Hemistich fehlt HTG. [14]) cf. Cînaja (Stahl!).

kâphûro[1]) 443 ghanasâre syât, mushkâ[2]) 444 mṛigamade mataḥ ı
ûdo[3]) 445 'gurâv api proktaç, caṃdane saṃtalaṃ 446 bhavet ıı 102 ıı

443 Kampfer, كافور; — 444 Moschus, مشک (aus Sk. mushka); — 445 عود wood of aloes; — 446 Sandel, صندل[4]).

jâtîphale tu jauja[5]) 447 syâd, avîraṃ 448 paṭavâsake ı
vajvâjaṃ[6]) 449 jâtipatrî syât, lâycî[7]) 450 tv elâ prakîrtitâ ıı 103 ıı

447 Muskatnuſs, جوز nut; — 448 wohlriechendes Pulver, das in Kleider gestreut wird, عبیر ambergris or any other grateful perfume; — 449 Muskatblüthe, بزباز; — 450 الایچی und الاچی cardamoms, nach Shakesp. aus Sk. elâ.

jaujo[8]) 451 jâtîphale, covanâya[9]) 452 syâd devadâruṇi ı
jardacovas[10]) 453 tu haridrâyâṃ, covakâ 454 pîtadâruṇi ıı 104 ıı

451 (447) Muskatnuſs جوز nut; — 452 ? Pinus Deodaru چوب wood und نای a reed, pipe; — 453 زردچوب yellow wood, turmeric; — 454 pinus deodâru und curcuma aromatica; چوبک red wood.

yaraṃvâdas[11]) 455 tu karcûre, jaṃjavîlaṃ 456 tu nâgare ı
âdarakaṃ[10]) 457 çṛiṃgavere syat, philaphilaṃ[10]) 458 marice[12]) mataṃ ıı 105 ıı

455 Gelbwurz, زرنباد zedoary, a Chinese root (Shakesp. curcuma zerumbat); — 456 getrockneter Ingwer, زنجبیل[13]); — 457 Ingwer, ادرک moist ginger, wohl aus Sk. ârdraka, frischer Ingwer; — 458 فلفل pepper, long pepper.

philphiladarajas[14]) 459 tu pippalyâṃ, setalakha[10]) 460 trikaṭau bhavet ı
halelâ 461 tu harîtakyâṃ, valelâ 462 tu vibhîtake ıı 106 ıı

459 فلفل دراز long pepper; — 460 سه drei und تلخ bitter; trikaṭu die drei scharfen Stoffe: Ingwer, schwarzer und langer Pfeffer; —

---

[1]) kâpûro T. [2]) so E, muçko H, °sko T, °çukau G. [3]) so E, yûro G, jûdo HT. [4]) *σανταλον.* [5]) so E, °le javojaṃ HTG (°ja). [6]) so H, vajavâ° T, yavajavoyaṃ G, ganz verderbt: capavâyaṃ E (c für v, p für y, resp. j). [7]) so E; lâcî HT, (lâvî G), es ist dies nach Hörnle zwar die verdorbene, aber die im gewöhnlichen Gebrauch befindliche Form. [8]) jaujo (jaijo E) jâtîphale war so eben erst da (s. v. 103); in HTG fehlen v. 104—109[ab]; s. unten v. 171 fg. [9]) nâpa E. [10]) dreisilbig, m. c. [11]) par° E. [12]) pari° E. [13]) zingiber. [14]) viersilbig, m. c.

461 Terminalia chebula هليله the myrobalan or citron tree; — 462 Terminalia bellerica بليله belleric myrobalan.

dhâtryâṃ ca[1]) âmalaha[2]) 463 proktaṃ, juvâna[3]) kuṃjiçka liṃgake ।
vâdiyâsopha[2]) 465 çatapushpâyâṃ, kiçnîja[3]) 466 kustuṃvurau tathâ ॥ 107 ॥

463 آمله the myrobalan tree, aus Sk. âmalaka; — 464 ?جوان young und كنجشك sparrow; wohl Name eines Baumes, der bei den Sperlingen als Nistort beliebt ist? liṅgaka feronia elephantum; — 465 باديان fennel, anise und hindust. سونف (Skakesp.) anise seed; gehören beide Wörter zusammen? oder ist jedes für sich zu fassen? çatapushpâ anethum Sowâ; — 466 كشنيج coriander.

vacâsu ca guraṃvâdiḥ 467, tamâla[3]) vargas 468 tu pattrake ।
tvaci dârasâra[3]) 469, gulaṃ 470 nâgakesare parikîrtitaṃ ॥ 108 ॥

467 ? vacâ eine vielgebrauchte aromatische Wurzel; cf. كرنب[4]) cabbage, cauliflower, كرنبا a dish prepared from cabbage; zu âdi s. 419. 425; — 468? hind. تمال (Shakesp. aus Sk. tamâla) tree noted for the dark hue of its blossoms, Xanthocymus pictorius, und برگ Laub; pattraka *m.* Achyranthes triandra, *n.* (ebenso tamâla selbst) das Blatt der Laurus cassia; — 469 ? cf. دار a tree, wood und سار a hollow reed; tvac Cassia-Rinde; Zimmet und Zimmetbaum; — 470 گل, Rose; nâgakesara Mesua Roxburghii.

vuyvoyas[5]) 471 tv ajamodâyâm, ekâṃgî 472 ca palâçake ।
vâliçtam 473 upadhâne syât çayyâyâṃ vistaraṃ 474 mataṃ ॥ 109 ॥

471 ? ajamodâ Kümmel, Eppich, Ligusticum und Ajowa; ein Wort بوی‌بویه, wie ich es statt der Lesart von E vermuthe, finde ich nicht; nur بويا allein „odoriferous, fragrant"; — 472 ekâṃgî ist kein persisches, sondern ein indisches Wort, und zwar entweder Sk. ekâṅgî ein bes. wohlriechender Stoff (aus Guzerat kommend, cf. ekâṅga *n.* Sandelholz), wo dann unter palâçaka etwa Curcuma zedoaria zu verstehen wäre; oder es ist mahr. ekâṃgî heranzuziehn, cf. mahr. ekâṃgîjhâḍa a tree living or sprouting onhy on one side, und mahr. ekâṃgîpâna, a leaf (betel leaf

---

[1]) ohne saṃdhi. [2]) dreisilbig. [3]) zweisilbig. [4]) κράμβη. [5]) vupavopas E.

or plantain leaf) good only on one side, the other being crimpled etc., wo dann palâçaka wohl etwa einfach als: Blatt zu fassen wäre; — 473 بالشت a cushion, a pillow; — 474 بستر a bed, mattress.

maṃce cahârapâî[1]) 475 syâd, ûrṇâdhyaṃ[2]) namadaṃ 476 smṛitaṃ ।
rallake[3]) sakalîtaḥ 477 syâd, vâlâpoças 478 tu tûlikâ ॥ 110 ॥

475 چهارپا, چارپایه a bedsted; — 476 ûrṇâdhya reich an Wolle, liegt als Subst. nicht vor; نمد, felt a garment of coarse cloth, ist in den Formen namata Filz (resp. auch nâmati in Filz gekleidet) und navata wollene Decke auch in das Sk. aufgenommen s. Pet. W. und zwar, wie das t statt des d bezeugt, in verhältnifsmäfsig früher Zeit (cf. arab. نمط), resp. wohl durch die nördlichen Buddhisten; — 477 rallaka, wollenes Tuch, wollene Decke, سقلات sakallât: scarlet cloth, und siklât: a fine painted or figured cloth, the covering awning or canopy over the camel litter in which the Eastern ladies travel; سقلاطون saklâtûn, °tîn oder °tâ: scarlet cloth; — 478 بالاپوش an outer garment; tûlikâ eine mit Baumwolle gefüllte Matratze.

hukkâ[4]) 479 syât sampuṭe, çânâ[5]) 480 prasâdhanyâṃ prakîrtitaṃ ।
âînâ[6]) 481 darpaṇe tu syâd, vyajane vâdavîjanaṃ[7]) 482 ॥ 111 ॥

479 حقه a round box for holding jewels or drugs, a casket; — 480 شانه a comb; — 481 Spiegel, آینه; — 482 Fächer, بادبیزن.

asîlas 483 tu kulîne syâd, dâniçmaṃdas 484 tu paṃḍite ।
maulânâ 485 "cârya[8]), âkhoṃda[9]) 486 upâdhyâye samîritaḥ ॥ 112 ॥

483 اصیل noble; — 484 gelehrt, دانشمند; — 485 Lehrer, مولانا my (eigentlich: our) lord; — 486 آخوند a tutor.

çâgirdaḥ 487 çishyasaṃjñe syâṭ, khâdimaḥ 488 paricârake ।
lekhake[10]) kâtivaḥ 489 prokto, lekhe paravânaha[11]) 490 ca smṛitaṃ ॥ 113 ॥

487 Schüler, شاگرد; — 488 خادم a domestic servant; — 489 Schreiber, کاتب; — 490 Brief, پروانه a royal patent or diplom, written order.

---

[1]) so ET, pâyî H; paryaṃke vâraŷâyî G. [2]) so H, °dyaṃ T, °dyâṃ G, ûrarṇâgha E. [3]) dieses Hemistich nur in E; fehlt HTG. [4]) so E, hukkaḥ H. hukvaha T, hukkaḥ G. [5]) so E, çânaḥ T, sâṇaha T, sâna G. [6]) so E, âyanaḥ H, °naha T, âthatale (!) G. [7]) so T, vâj° H, vej° G; °rejanaṃ E. [8]) so H, mo° G, maulanâ T, mausânâ E. [9]) so HT, aproda G, âkheva E. [10]) das zweite Hemistich nur in E, fehlt HTG. [11]) dreisilbig.

maṃtradâtari[1]) pîraḥ 491 syân maṃtraçishye murîda 492 ca |
saṃdhyâyâṃ ca nimâjaḥ[2]) 493 syâd imâmaç[3]) 494 co 'padeshṭari || 114 ||

491 Rathgeber, پیر an old man; — 492 مرید a disciple, studious man; — 493 Morgen- oder Abend-Andacht, نماز, prayer; — 494 امام a leader in religious matters; zu 493. 494 s. v. 253.

kalamâ 495 mûlamaṃtre syâṭ, khvâjaḥ[4]) 496 vyutpannamânave |
sabhâyâṃ majlisaḥ[5]) 497, sabhye majlisî 498 syât, sakhâvataṃ 499 || 115 ||

495 Hauptspruch, کلام a word, sentence; — 496 ein unterrichteter, gebildeter Mann, خواجه a doctor, professor; — 497 مجلس an assembly, congregation; — 498 مجلسی an assessor; — 499 Geben, سخاوة liberality, munificence; die dazu gehörige Erklärung giebt das erste Wort des nächsten Verses: dâne.

dâne, çrâddhe ursa[6]) 499a ca syân, nivâpe ravâha[7]) 500 ity api |
kâryâdau[8]) maṃtrapâṭhe syât phâtihâ[9]) 501 parikîrtitaḥ || 116 ||

499a Todtenspende[10]), cf. hind. عرس oblation, offerings to a saint; — 500 Darbringung an die Manen (des Abends)[10]), رواج, doing any thing at sunset; accomplishing (a thing); afternoon, evening; — 501 Eingangsgebet, فاتحة, a beginning, exordium, the first chapter of the Qorân.

yâcnâsu ca[11]) gadâyî[12]) 502 syân, mihamâno[13]) 503 'tithau bhavet |
abhyutthâne tu tâjîmaḥ 504, pûjâyâṃ parasti[14]) 505 saṃmataṃ || 117 ||

502 Bitte, گدائی; — 503 Gast, مهمان; — 504 (162) تعظیم reverence, respect; — 505 پرستش adoration, worship; پرستیدن to worship.

[1]) das erste Hemistich nur in E. [2]) so ET, namâjaḥ H, namâla G. [3]) so HTE, emâmaç G. [4]) so H, shvâjaha T, shejâ G, shvâjâ E. [5]) so HGE, °çaḥ E, °siḥ T, °si G. [6]) so ETH sec. m., yurça G, arça H pr. m; ohne saṃdhi. [7]) so EG, rjavâha T, ṛvâha H; zweisilbig! [8]) karpâdau E. [9]) so E, °haḥ H, phâtehaḥ TG. [10]) da der Islâm nichts der Art kennt, war es dem Autor schwer ein entsprechendes persisches Wort zu finden. [11]) yâcakas tu G. [12]) so E, gadâṃyî H, °dâi G, °dâî T. [13]) so E, maha° HT, mahi° G. [14]) so E (zweisilbig!); pojiçaṃ bhavet H, porjisaṃ bh. T, yojisaṃ bh. G; ob etwa پوزش an excuse, apology? was aber doch nicht recht paſst; das Hind. hat mehrere Formen der Sk. Wurzel pûj, so: پوجن، پوجک پوجاری اپوجا, aber keine, die direct hier paſst.

çuçrûshâ khijmatih[1]) 506 proktâ, 'ṭâṭyâ[2]) gardîdanam 507 matam ı
istâdanam 508 pathi sthityâm, khâmoçî[3]) 509 mauna ucyate ‖ 118 ‖

506 Gehorsam, خدمة, service; — 507 گرديدن to walk about, saunter; aṭâṭyâ das Herumschweifen, Umhergehen (als Bettler); — 508 unterwegs Halt machen, استادن; — 509 Stillschweigen, خاموشی.

atikrame jyâdatî[4]) 510 syâd, vârî[5]) 511 paryâya ucyate ı
upavâse tu phâkâ[6]) 512 syâd, vrate rojâ[7]) 513 prakîrtitah ‖ 119 ‖

510 Überschreitung, زيادتی abundance, surplus.; — 511 باری once; a time, a turn; — 512 فاقة a day's fast; — 513 روزة, fasting, fast; daily allowance.

drishṭâmte tu dalîlah 514 syâd, vicâre tu taammulah[8]) ı
vujurgas 516 tu bhaven mukhye, nyâjavamdy[9]) 517 abhivâdane ‖ 120 ‖

514 Beispiel, دليل argument, proof, test; — 515 Überlegung, تأمّل reflecting, musing; — 516 hauptsächlich, بزرگ; — 517 Ansprechen um, نيازمندی necessity, indigence, supplicating.

mahâms tu kâmilah 518 proktah[10]), âmilas[11]) 519 tâpaso bhavet ı
khâmoçah 520 syân munir, dânâ 521 jnânayukta, rishâv api ‖ 121 ‖

518 grofs, كامل perfect, complete; — 519 ? Asket, عامل (s. 542) a maker, performer; عمل trouble, vexation; — 520 desgl., خاموش silent; — 521 Weiser دانا.

yatau tu daraveçah 522 syât, prayate pâka 523 ucyate ı
mulhidah[12]) 524 syât tu pâshamde[13]), bhavec carmani carma 525 ca ‖
kadakhudâî[14]) 526 vivâhe syâd, rate sohavatir[15]) 527 matâ ‖ 122[16]) ‖
kshatavrate khârajî 528 syâd, avrate râphajî 529 bhavet ‖ 123[16]) ‖

522 Asket, درويش; — 523 ernst, rein (in rituellem Sinne), پاك pure; — 524 Ketzer, ملحد a heretic, unbeliever; — 525 چرم leather, skin, hide; — 526 Hochzeit, كدخدائی; — 527 Liebesgenufs, صحبة coition; — 528 خارجی outlaw; kshatavrata (liegt nicht vor) der die Gelübde gebrochen hat; —

[1]) so HTG, °ti E. [2]) °ṭyâm E; aṭâṭî liegt aber bis jetzt nicht vor. [3]) so ET, khâmâ° H, pâm° G. [4]) so E, jayâdarî H, japâdati T, jiyâjati G. [5]) so EH, syâd ârî T, syâ upari G. [6]) so EG, phâkah H, phâkaha T. [7]) so EG, rojah H, rojaha T. [8]) so HT, taasmûlah G, takamvulah E. [9]) so EH (°dî), nyâjvamdî T, nyâjamandrî G. [10]) samdhi-Mangel! [11]) so T, yâmilas G, âpilas H, amilas E. [12]) molhidah HG, molahilah T, muhlidah E. [13]) pâkha° Alle. [14]) viersilbig; so E, °dâyî H, khodâî T, shodâdre G. [15]) so G, çavahatir T, gbhoha° E, H hat ganz verderbt: syât bhavet çatre havir mamâ (!). [16]) so E, ich fasse daher diese beiden Verse zusammen.

529 ruchlos, die religiösen Obliegenheiten nicht erfüllend, رافضی one of the sect of the Shiites, resp. bei den Sunniten gewöhnliche Bezeichnung der Shiiten überhaupt.

muktau khalâsî 530, muktas tu khalâsaḥ 531 parikîrtitaḥ ।
brahmavargaḥ[1]) ॥

530 Befreiung, خلاصی; — 531 befreit, خلاص liberation, خلّاص a saviour.

§ 8 (bis 162[a]) kshatriyavargaḥ.

udaye[2]) tu khurûj[3]) 532 prokto, gurûvo 533 'ste[4]) prakîrtitaḥ ॥ 124 ॥

532 Aufgang, خروج going out, egress; — 533 Untergang, غروب.

pâtaçâho[5]) 534 nṛipe proktaḥ, sulatânas 535 tato[6]) 'dhike ।
çâhaṉçâho[7]) 536 nṛipâdhîçe, vajîro[8]) 537 maṃtriṇi smṛitaḥ ॥ 125 ॥

534 Fürst, پادشاه; — 535 über dem Fürsten stehend, سلطان; — 536 Kaiser, شاهنشاه; — 537 Minister, وزیر.

çâho 538 'pi syân narapatau, çâhajâdas[9]) 539 tadâtmaje ।
mîreadlaḥ[10]) 540 prâḍvivâke[11]), daravâṉ[12]) 541 dvârapâlake ॥ 126 ॥

538 Fürst, شاه; — 539 Fürstensohn, شاهزاده; — 540 Oberrichter, میر عدل aus میر prince und عدل administering justice; — 541 Thürhüter, دربان.

amaldâro[13]) 542 'dhikârî syân, mîraḥ 543 syân mukhyaMudgale ।
mîrâtmaje tu mirajâ[14]) 544, açrâphaḥ[15]) 545 syât[16]) sâdhuMudgale ॥ 127 ॥

542 Beamter, عملدار one in command; — 543 vornehmer Mogole, میر (aus امیر) prince; — 544 Sohn eines dgl., میرزا son of a great lord; — 545 edler Mogole اشراف nobles, grandees; — die in mukhyaMudgala 543 und sâdhu(!)-Mudgala 545 vorliegende Verwendung des Wortes Mudgala im Sinne von: vornehmer Herr basirt offenbar auf der volks-etymologischen Wiedergabe des Namens des mogolischen Herrscherstammes durch: mudgala, s. mein Verz. der Berl. S. u. Pr. H. 2, 15 n. 1.[17])

---

[1]) fehlt G. [2]) 124[b] bis 138[b] fehlt in H, 124[b] resp. auch in G. [3]) so E, tulua T, طلوع rise. [4]) °vo staṃ E, guruvo me T. [5]) so E, vâdaçâho T, pâtîsâhas tu G. [6]) so TG, tu tato E. [7]) so E, çâhavâṉçâhi G, çânahaçâhî T. [8]) so ET, vejîro G. [9]) yâdas G. [10]) mîreallaḥ E, mîraadla T, mîrayadbhyaḥ G. [11]) °vipâke E. [12]) daravâra G. [13]) so TG, âmilo E (wo dann eine Silbe fehlt) عامل a maker, performer (s. 519). [14]) so E, mirjaha T, mîrjarâ G. [15]) so E, syâd âgaha T, syât âmahu G, آغا a great lord, chief, master. [16]) so EGT, syât stört das Metrum. [17]) im MBhâr. 7, 397 besiegt Janârdana im Kampfe mit Jarâsaṃdha u. A. auch: Kâçmîrakân Aurasikân piçâcâṅç(!) ca sa-Mudgalân । Kâmbojân ...; diese Stelle reicht augenscheinlich in sehr späte Zeit hinab! die Zusammenstellung der Mudgala mit den piçâca ist markant!

vahûnâṃ Yavanânâṃ yaḥ prabhuḥ khâna[1]) 546 sa ucyate ।
navâvas 547 tu sa evo 'kto, mîyâṃ[2]) 548 syâd Yavanottame ॥ 128 ॥

546 خان a prince, nobleman, lord; — 547 نوّاب, eig. plur. von نائب vicegerents, governors; a nabob; — 548 vornehmer Yavana; ob etwa مئين plur. of مائه hundreds? also: Centurio?. — Auch hier ist die Verwendung des Wortes Yavana (546. 548) zur Bezeichnung des fremden Herrschervolkes von Interesse. Von den Griechen, Ἰαονες, ausgehend (s. p. 5), ist dieses Wort im Laufe der Zeiten auf deren Nachfolger, die Indoskythen, die Moslims, schliefslich die Europäer übergegangen, welche je der Reihe nach jene Stellung in Indien eingenommen haben.

yaḥ sarvaguṇasampannaḥ sarvaçâstrârthakovidaḥ ।
jnânopadeshṭâ sarveshâṃ sarvaiḥ[3]) sa hajarata[4]) 549 smṛitaḥ ॥ 129 ॥

549 mit allen Tugenden versehen, aller çâstra kundig, Lehrer im Wissen für Alle; حضره a title by which kings and great men are addressed, similar to; majesty, highness, lordship worship etc.. — Seiner Bedeutung entsprechend erhält dies Wort einen ganzen Vers für sich allein; ebenso das folgende.

karmopadeshṭâ sarveshâṃ çâstramârgânusârataḥ ।
svayaṃ jnânena samparano makhadûmaḥ[5]) 550 sa kathyate ॥ 130 ॥

550 Lehrer für Alle im Handeln nach dem Wege der çâstra, selbst reich an Wissen; مخدوم a lord, master.

shaṃḍhe[6]) khojasarâyaḥ[7]) 551 syâd, dostaṃ 552 mitre prakîrtitaḥ ।
haṃjolî[8]) 553 tu vayasye syâd, duçmanas 554 tu ripau bhavet ॥ 131 ॥

551 خواجه سرای a domestic, a eunuch; — 552 Freund, دوست; — 553 hind. همجولی an equal, peer, coeval; — 554 Feind دشمن.

narâ meharamâ[9]) 555 râjno ye syur aṃtaracârakâḥ ।
jâsûsa 556 syâc care vijne, mevarâ 557 "dhâvane mataḥ[10]) ॥ 132 ॥

555 Vertraute eines Königs, محرم intimate; — 556 جاسوس a spy; — 557 Anlauf, Angriff, نميمه slander, a sowing of dissension.

---

[1]) shâṇaḥ G. [2]) ? so E, mîyâ G, mîjâ T; ob etwa nochmals ميرزا (s. 544)? [3]) so E, fehlt GT. [4]) so E (dreisilbig!), sa nâ(nâṃ G)hajaratiḥ(taḥ G) TG. [5]) so ET, masha° G. [6]) so G, shaṃḍe E, °ṭe T. [7]) so E, khâja° T, shyâja° G. [8]) so T, hama EG, yolî G. [9]) so E, ma° GT. [10]) so E, lekhake kâtibo (°tile G!) bhavet GT, کاتب a writer, scribe (war aber schon da, s. 489).

kadakhudâ[1]) 558 grihasthe syân, najûmî[2]) 559 tâmtrike bhavet ।
vakîlas 560 tu bhaved dûte, tasya karma vakâlatah 561 ॥ 133 ॥

558 كدخدا master of a family; — 559 Fachgelehrter, نظمى a composer, arranger, a poet? oder نجومى an astronomer?; — 560 وكيل ambassador; — 561 وكالة embassy.

musâphiras 562 tu pathike, videçe sapharo 563 bhavet ।
jâdalas[3]) 564 jigîshau syât, khajânah[4]) 565 koçasamcaye ॥ 134 ॥

562 Wanderer, مسافر; — 563 Ferne, سفر a journey, voyage; — 564 sieglustig, جادل a wrangler; — 565 خزانه a treasury, magazine.

kilaa[5]) 566 syâd gadhe[6]), râshtre mulakam 567 ca[7]) vilâyatam 568 ।
laçkaras 569 tu vale[8]), mukhyeshû 'marâ[9]) 570 parikîrtitah ॥ 135 ॥

566 قلعه a castle, fort (especially on the top of a mountain); gadha ist kein Sanskritwort, sondern eine sogenannte deçî, s. Hemacandra's deçînâmamâlâ ed. Pischel 2, 81 gadho durge, cf. Mahr. gadhî und gadhî; a small fort, or castle; — 567 Reich, ملك; — 568 ولايه dominion, a province; — 569 لشكر an army; — 570 امراء commanders, governors.

hamjavâ[10]) 571 syâd amâtyeshu, samdhâv âstî[11]) 572 nigadyate ।
âçraye tu panâha 573 syâd, vigrahe jamga[12]) 574 ucyate ॥ 136 ॥

571 Minister, همزبان of the same language, etwa im Sinne von: conversing together?; — 572 Frieden, آشتى; — 573 پناه an asylum, refuge, protection; — 574 جنگ war, battle.

râjye saltanatih[13]) 575 proktâ, daulatih 576 sâhivî 577 ca sâ ।
mamtre maslahatam[14]) 578 proktam, jaye phataha 579 ucyate[15]) ॥ 137 ॥

575 Königreich, سلطانة; — 576 desgl., دولة dominion, reign; — 577 desgl., صاحبى; — 578 Rath, مصلحة advice; — 579 Sieg, Eroberung فتح.

nîtâv adâlatih[16]) 580 proktâ, durnîtau julma[17]) 581 ity api ।
julmânâ 582 tu[18]) bhaved damde, sâhase ca[19]) ajî 583 matah[20]) ॥ 138 ॥

[1]) so E, °dâya T, kadapodâra (!) G. [2]) so E, nijûmî T, nayûptî (!) G. [3]) so ET, çilâvandas G (? cf. etwa شلاتين disgustingly importunate). [4]) so T, khayânâ E, pajâra G (ohne syât). [5]) so E, kikâyaras G, kâlagraha T. [6]) syâd gathe ET, syâd gaha G. [7]) so ET, muluvî tu G cf. مولوى judicial. [8]) so ET, sainye G. [9]) °shû 'sarâ G, °khye um° E, °shû 'marâyah T. [10]) so T, hama° EG, °juvâ G. [11]) so E, samtrâv astî G, samdhau râstî T. [12]) yamga G. [13]) so ET, salatatih T. [14]) so E, maçvaratam T, s. مشاوره consultation, mahpûrahih G مشوره. [15]) so ET, in G nochmals: daulatih sâhivî va sah(!). [16]) nîcau yadâlatih G. [17]) so ET, pulpah(!) G. [18]) so E; jarmamâ tu T, urjjayat tu G, blos Fehler? [19]) so E, tu T; fehlt G; ohne samdhi. [20]) sâhase hima smritah G; ob hidda? حدّه passion, fury.

580 عدالة justice, equity; — 581 ظلم injuring, oppressing; — 582 Strafe, ظلمانه liegt nicht direct vor, cf. aber Mahr. jalamânâ a mulct or fine; — 583 gewaltthätig, arab. آزى vehement?

vadarâhy 584 upajâpe syâj, jarûra[1]) 585 câ "vaçyake bhavet ।
mavajjahaṃ[2]) 586 tu yukte[3]) syâd, vaṃdane[4]) vâjî 587 samarthane ॥ 139 ॥

584 das Zuraunen, Aufwiegeln, بد راه wrong road, deviation from the right path; — 585 ضرور necessary; — 586 passend, موجّه suitable, congruent; — 587 ? 1. Ehrenbezeugung, 2. Betrachtung, Begründung, Rechtfertigung, ناز (باج, باز) 1. tribute, 2. choice, distinction, separation (2 pafst nicht recht).

aparâdhe gunâhaḥ 588 syât, çâsane hukma[5]) 589 ity api ।
vaṃdhane vastanaṃ 590 proktaṃ, kare saugâta-peçkaçau[6]) 591. 592 ॥ 140 ॥

588 گناه sin, crime, fault; — 589 حكمة justice, equity, dignity; — 590 بستن to bind; — 591 سوغات a magnificent present; — 592 پیشکش (first fruits) tribute.

upâyanaṃ ca tuḥphaḥ[7]) 593 syâj, jakâtaḥ 594 çulka ucyate[8]) ।
gaje phîlas 595, turaṃge 'spaḥ[9]) 596, sâyaras[10]) 597 tu vinîtayoḥ ॥ 141 ॥

593 تحفة a gift, present; — 594 Zoll, Abgabe, Steuer, زكاة alms, a fortieth; — 595 Elephant, فيل; — 596 Rofs, اسب; — 597 ? vinîta, das sich dem Dual zufolge sowohl auf Elephant wie auf Rofs bezieht, bedeutet dressirt, etwa für: travelling? cf. سائر a walker, goer, traveller, wanderer, oder cf. صائر becoming, what becomes, صيّر well made, goodly.

pâyalas[11]) 598 teja 599 ity etau vegavaṃtau smṛitau vudhaiḥ ।
davîdanaṃ 600 dhâvane syât, shurî[12]) 601 syân nartane 'pi ca ॥ 142 ॥

598 ? rasch; das Pârasî-Wort ist unklar, فاعل a maker, doer, performer will nicht recht passen; — 599 تيز swift; — 600 laufen, دويدن; — 601 ? Tänzeln, cf. شرى shaking to and fro (a camdshalter); playing with the bridle in this manner (a horse).

---

[1]) zweisilbig. [2]) so EH, mavajahî G, tavajjahaṇ T. [3]) so ETG, mukte H. [4]) so EHT, ûdare G; eine Silbe zu viel. [5]) so EG, hukmam H, hukyam T. [6]) peça° T, saugâti iritaḥ G. [7]) so H sec. m., hahṛiphaḥ H pr. m., turhaphâ E, tuṃhaphaha T, upahâse phaha G. [8]) so (jedoch syâ ja°) HT, turhaphâ (Platz für ein aksh.) yakâtaḥ ucyate (ohne çulka) E, syat pâhugâte(!) daṇḍa ucyate G. [9]) sphaḥ ET. [10]) sâparas E, soyaras H, sâyapas T, sâyâs G. [11]) so H, pâpa° ET, ṇâra G. [12]) ?syât khurî EHT, syâturî G.

khalîne tu lagâmaḥ[1]) 602 syâṭ, khure[2]) sumbhaḥ[3]) 603 prakîrtitaḥ ।
ayâlaḥ[4]) 604 syât skaṃdhakeçeshu[5]), paryâṇe[6]) jîna 605 ucyate ॥ 143 ॥

602 Zügel, لغام; — 603 سنب the hoof of a beast; — 604 Mähne, يال a horse's mane; im Hind. auch ايال; skandhakeça für Mähne ist freilich etwas sonderbar; ob etwa kanṭh° zu lesen?; — 605 Sattel, زين.

khvagîro[7]) 606 jayanâdhâre[8]), proktas tatkâsake hanâ 607 ।
tatpakshatî janâkhaḥ[9]) 608 syât, tallagne darma[10]) 609-yugmakaṃ ॥ 144 ॥

606 خوگير the stuffing of a saddle, a packsaddle; die Herübernahme von زين jayana in das Sanskrit geht wohl in alte Zeit zurück; s. Hemac. an. Med. („Rüstung eines Pferdes u. s. w." Pet. W.); — 607 ? tatkâsake, wohl das zu dem „stuffing" gehörige Gras, Polstergras? kâsaka = kâçaka, kâça „ein glänzend weifses Gras"; cf. etwa حنا being green (a spot) having thick and luxurious herbage (davon: حناء the dying colouring shrub henna); — 608 جناح the flap of a saddle; pakshati, °tî, der Ort, wo die Flügel oder vorderen Extremitäten angewachsen sind; — 609 ? tallagna „dáran, an den Sattel-Klappen, hangend"; pflegten daselbst etwa bei Vornehmen zwei (yugma) درم, a silver coin[11]), resp. Geldtäschchen(?), befestigt zu werden?

pâdâdhâre rakevaḥ 610 syâd, umacîlama 611 meṭhikâ ।
sikâravaṃdas[12]) 612 tatstaveshu, peçvaṃdo 613 hṛidi carmaṇi ॥ 145 ॥

610 ركاب a stirrup; e im Text statt â; — 611 ? zu meṭhikâ cf. methî ein Pfosten zum Anbinden; ob etwa: Sattelknopf? das Pârasî-Wort wohl eine hybride Bildung aus arab. أم Mutter und pers. Hind. چلم, چليم caput fumisugii, in quo tabaccum ardet, nach Skakespear: the round plate, cup or bowl to which is stuck the tobacco in a hukah; die Tabakspfeife wurde eben wohl am Sattelknopf befestigt, so dafs dieser den Namen

---

[1]) lajâmaḥ H. [2]) vure E. [3]) so E, summaḥ HT, summa G. [4]) so E, iyâlaḥ G, Beides zweisilbig zu lesen! yâlaḥ HT. [5]) so T, kaṭakeçeshu H, kaṃdhadeçe tu G, skaṃdhadeçeshu E. [6]) paryâne E, palpâne T, palâne G, khalyâne H. [7]) shva° E, kho° HT, ro°(!) G. — Die Verse 144—149[c] fehlen HTG was wohl für den speciell brâhmanischen Charakter dieser Recension eintritt; nur das erste Wort von 144 findet sich daselbst vor; doch lautet der Text ganz anders: khogîras tu namaṃde (HT, nammade G) syât; in diesem letztern Wort liegt resp. wohl, ebenso wie bei dem jayana in E, ein in verhältnifsmäfsig früher Zeit aus Iran nach Indien gewandertes Wort vor, nämlich نمد, Filz s. nr. 476, das resp. hier wie dort in der moderneren Form mit *d* erscheint, nicht in der sonst im Sansk. recipirten älteren Form mit *t* (namata). [8]) japanâ° E. [9]) janâshaḥ E. [10]) 'darma E (also: adarma!). [11]) δραχμη. [12]) viersilbig.

ام جلم führte?; — 612 شكاربند cords for tying game to a saddle; stava = stabaka Quaste, Troddel; — 613 پیشبند belt over a horse's breast.

pedârake ca taṃgaḥ 614 syât, tadyukte kacikâpujî 615 ।
sûtrapade jeravaṃdo 616, jînapoço[1]) 617 jayanâṃvare[2]) ॥ 146 ॥

614 تنگ a horse girth, a strap for fastening a load, a package, half a horse's load; cf. Gujr. tan̄ga a girth of a horse saddle; pedâraka ist kein Sk. Wort, sondern eine deçî, cf. Mahr. peḍa a rope of a single strand, peṃḍolâ a coil or roll of a rope, a binding for a bundle; — 615 ? tadyukte „damit verbunden (bepackt?)"; aber mit kacikâpujî weiſs ich nichts zu machen; ob Hind. كچپچ „close, thick, stuffe together" etwa hergehörig ist?; — 616 زيربند a whip, a lash; sûtrapada oder °paṭa? Beides unbekannt; — 617 زین پوش the ornamental covering of a saddle; auch hier ist jayana, wie bei 606, als Sk. Wort verwendet.

açvâṃvare[3]) tuhṛisaḥ 618 syât, kâṃdhî 619 skaṃdhâṃvare[4]) matâ ।
netrâvaraṇasûtreshu magasadân 620 itî 'ritaḥ ॥ 147 ॥

618 ? Pferdedecke; was aber ist tuhṛisaḥ? (oder ob tu hṛisaḥ zu theilen?) cf. etwa تخريص takhrîs the gore of a shift or other garment heranzuziehen?); — 619 Schulterdecke; zu Hind. كاندها (aus dem Sanskrit, Shakesp.) the shoulder liegt hier wohl eine Weiterbildung كاندهى vor; — 620 مگس fly und دان what holds or contains; unter netrâvaraṇasûtreshu ist somit wohl: ein Maschen-Netz zum Schutz der Augen zu verstehen.

pâdatrâṇe lohakṛite nâla 621 ity abhidhîyate ।
malahâriṇi romotthe çilye haçthî 622 'ti kathyate ॥ 148 ॥

621 نعل a horse-shoe; — 622 ein den Schmutz nehmendes, aus hervorstehenden Haaren bestehendes Instrument; Hind. هتهى (from hasta, Shakesp.) a brush for rubbing down horses with, or rather a hair-glove; çilya ist bisher unbekannt, es ist dabei wohl an çila Ähre, çilîmukha Pfeil, Biene, çilâ adhastâddâru, çilî stambhaçîrsha, dvârâdhaḥsthitakâshṭha zu denken? die Haare der Bürste stehen empor wie Spitzen, Ähren u. dgl. Man kann auch etwa: çil*p*e „Kunstwerk, künstliches Instrument" lesen, doch ist dies für eine Pferdebürste wohl etwas zu viel!

açvakaṃḍûyane lohe procyate kharakharâ[1]) 623 vudhaiḥ ।
kîleshu meshâ 624 ity uktaṃ, kaçâyâṃ câvukaṃ 625 mataṃ[5]) ॥ 149 ॥

[1]) dreisilbig. [2]) japa E. [3]) açvâvare E. [4]) °dhâvare E. [5]) mit pâda[d] beginnen HTG wieder; câkaṃ T, smṛitaṃ HT; G hat: çâyâ taṃga ucyate; تنگ (s. v. 146) ist aber nicht: Peitsche, sondern: a horse girth etc., s. oben bei 611.

623 eiserner Pferde-Striegel, خرخره a curry comb; — 624 kîla Handgriff, kîlaka Schiene; میشی a kind of leather; — 625 Peitsche چابک.

açvârohe[1]) savârikâ 626, "rohy asavâro[2]) 627 'pi kkathyate ı
ushṭrârohe çutaravâṉ 628, phîlavân[3]) 629 hastirohake ॥ 150 ॥

626 Reiten, zu Rofs, سواری; — 627 Reiter, اسوار; — 628 Kameelreiter, شتربان; — 629 Elephantenreiter, فیلبان.

sainike saradârah[4]) 630 syân, mardânâ[5]) 631 çûra[6]) ucyate ı
tarkaçvaṃdas[7]) 632 tu subhaṭe, senâyâṃ laçkaro 633 mataḥ ॥ 151 ॥

630 سردار general, officer; — 631 Held, مردان; — 632 ترکشبند wearing a quiver; — 633 (569) لشکر an army.

vakhtaraḥ[8]) 634 kavace prokto, jirahaḥ 635 kaṃcuke bhavet ı
mustaadas[9]) 636 tu saṃnaddhe, yâjî 637 pattau[10]) prakîrtitaḥ ॥ 152 ॥

634 بکتر coat of mail, cuirass; — 535 زره desgl.; — 636 gerüstet, مستعد prepared; — 637 Fufssoldat, بازی a husbandman, peasant, rustic.

dhanurdhare kamâṉdâraḥ 638, tîraṃdâjaç 639 ca kathyate ı
puraḥsare peçaravaḥ[11]) 640, parâgaṃdâ[12]) 641 tu maithune[13]) ॥ 153 ॥

638 کماندار an archer; — 639 تیرانداز desgl. — 640 پیشرو a guide, forerunner; — 641 پراکنده dispersed, scattered, disbanded, dissipated, inattentive; maithuna zur Begattung gehörig; beide Wörter etwa hier in der dafür sonst freilich nicht vorliegenden Bed.: ausschweifend?

saṃpattau tu bhavet sâmân 642, muçkilaṃ 643 syât tathâ "padi ı
âpannâçe[14]) athâ "sânaḥ[15]) 644, silâho[16]) 645 nikhilâyudhe[17]) ॥ 154 ॥

642 سامان opulence; — 643 مشکل difficulty; — 644 آسان easy, convenient, commodious, âpannâça, wohl: „dessen Wünsche erfüllt sind, befriedigt"?; — 645 سلاح arms.

kamânaṃ 646 tu bhavet çârṅge, koçâ[18]) 647 koṭau prakîrtitaḥ ı
cillâ[19]) 648 jyâyâṃ, niçânâ[20]) 649 syâl lakshye, tîraḥ 650 çare bhavet ॥ 155 ॥

[1]) von diesem Verse haben HTG nur den ersten und letzten pâda, und zwar lautet ersterer daselbst: açvârohe subâraḥ (çuvâ° T, çvavâ° G) syât; سوار. [2]) dreisilbig. [3]) so HT, vâna E, târa (!) G. [4]) çara° T. [5]) so EG, °naḥ H, °jaḥ T. [6]) so H, sûra E, çura T, sûna G. [7]) so H, taraka° ETG. [8]) so HT, vasharaḥ G, valûraḥ E. [9]) so EHT, mohamîlas G (?) cf. محمول loaded, freighted, was aber doch nicht recht pafst. [10]) yattau E. [11]) yeça° E. [12]) so E, gaṃdaḥ H, °daha TG. [13]) so EHT, manyite (!) G. [14]) ohne saṃdhi. [15]) °çe yâsânaḥ H, tathâ "çânaḥ G. [16]) çilâho G. [17]) yudhi E. [18]) so E, goçaḥ H, koçaha T, çoçmaḥ (!) G. [19]) so E, cilaḥ H, cillaha T, yeha (!) G. so E, °çânaḥ H, °çânaḥ G, çâna T.

646 Bogen, كمان; — 647 كوشه an angle, corner; — 648 Bogensehne, چله; — 649 Fahne, نشان; — 650 Pfeil, تير.

jahrâlûdo[1]) 651 vishâkte syât, tûṇe[2]) tarakaçam[3]) 652 bhavet ı
çamçeras[4]) 653 tu bhavet khadge, tsarau kavjaḫ[5]) 654 prakîrtitaḥ[6]) ‖ 156 ‖

651 زهر آلود poisoned; — 652 Köcher, ترکش; — 653 Schwert, شمشیر; 654 Griff, قبضه the gripe of a sword.

sipaṟ[7]) 655 syât[8]) phalake, kârda[9]) 656 kardaḥ[9a]) 657 çastryâm nigadyate ı
nejâ[10]) 658 çalye bhavet, kumte gurjâ[11]) 659 ity abhidhîyate ‖ 157 ‖

655 Schild, سپر; — 656 کارد a knife; — 657 کرد dsgl.; — 658 نیزه a short spear, demi-lance, javelin, dart; — 659 Speer, Lanze, گرز a mace.

râjyârambhâbhisheke tu kutbaḥ[12]) 660 syât Pârasîmate ı
prasthâne kûca[13]) 661 ity ukto, mukâmaḥ 662 samniveçane ‖ 158 ‖

660 Königsweihe, cf. خطبه das Kirchen-Gebet für den regierenden Fürsten; — 661 کوچه migration; — 662 مقام staying, residing.

dhûlau gardo 663, dhvaje togâ[14]) 664, vairako[15]) 665 'lpe nigadyate ı
dumdubhau tu damâmâ[16]) 666 syât, çaurye mardânagî 667 matâ ‖ 159 ‖

663 Staub, گرد; — 664 Fahne, türk. توغ Roſsschweif; — 665 eine kleine (dgl.), بیرق a standard, flag, pennant; die Lesart von E vârîka führt auf باریک subtile, fine, was aber nicht recht paſst; — 666 دمامه a small drum or trumpet; — 667 مردانگی manliness, prowess.

palâyane gurejaḥ 668 syât, pâyamdâraḥ 669 sthire bhavet ı
jadanam[17]) 670 tu prahâre syân, murdâ[18]) 671 tu[19]) mritake bhavet ‖ 160 ‖

668 Flucht, گریز; — 669 پایدار pâydâr firm, fixed, permanent; der Nasal (pâyam°) ist hier gratis zugegeben; — 670 schlagen, زدن; — 671 todt, مرده.

---

[1]) yahrâ° G, °lûdo HGT, °ludo E. [2]) tûṇîre T, tûṇî G. [3]) so HT, °kasam EG. [4]) çama° ET, samase° G, samoras H. [5]) kavajâ E, kavuḫ H, kuvraha T. [6]) in G fehlt pâda 4. [7]) pâda 1 fehlt in G; sipara E, °raḥ H, çiparaḥ T. [8]) syât tu HT. [9]) so H, °rdaḥ G, °rddhaḥ T, kârada E. [9a]) so E, fehlt HTG. [10]) so E, neyaḫ H, nepaha T, nejaha G. [11]) gurja HT, gursyâ G, gujâ E. [12]) so H, kutvaḥ T, kutva G, kutavaḥ E. [13]) kûda H pr. m., kuca G. [14]) so E, togo T, toṇe H, tego G. [15]) so HTG, vârîko E. [16]) so E, °maḫ H, °maḥ TG. [17]) yada° G. [18]) so E, murdaḫ HT, murdara G. [19]) so E, fehlt HTG.

vaṃdis 672 tu vṃdyâṃ[1]), kârâyâṃ jiṃdâṇ[2]) 673 syât Pârasîmate ।
vale tu jora[3]) 674 ity ukto, nairû[4]) 675 syât kurvataç ca ha[5]) ॥ 161 ॥

672 Gefangener, بندى; — 673 Gefängnifs, زندان; — 674 Kraft, زور; — 675 dem Handelnden eigen, نيرو strength, power.

kuçtanaṃ 676 mâraṇe[6]) proktaṃ, jiṃdagî[7]) 677 jîvane bhavet ।
iti kshatriyavargaḥ ॥

676 tödten, كشتن; — 677 Leben, زندگى.

§ 9 (bis v. 200) vaiçyvargaḥ.

saudâgarâ[8]) 678 bhaveyus te ye vyâpâraparâ janâḥ[9]) ॥ 162 ॥
saudâ 679 tatkarmaṇi proktâ, vakkâlaḥ 680 syâd vaṇigjane ।
vartane rojagâraḥ 681 syâj jirâyata[10]) 682 kṛishau[11]) bhavet ॥ 163 ॥

678 Geschäftsleute, سوداگر; merchant; — 679 سودا gain, profit; — 680 Kaufmann, وكال having mutual confidence; — 681 Tagelohn, روزگار earning; — 682 Ackerbau, زراعة.

ṛiṇe karjaṃ 683 samâkhyâtaṃ, karjakhâhaḥ[12]) 684 kusîdake[13]) ।
kṛishîvale varjagara[14]) 685 syât, kulokho[15]) 686 loshṭa ucyate ॥ 164 ॥

قرض; Schulden, قرض; — 684 Gläubiger, Wucherer قرض خواه; — 685 Ackersmann, برزگر; — 686 Erdklofs, كلوخ.

khale kharamanaḥ[16]) 687 khyâto, jeva 688 yava[17]) itî "ritaḥ ।
khoyîdo[18]) 689 vâlapatre syât, tokme[19]) dulamulaṃ[20]) 690 bhavet ॥ 165 ॥

687 Tenne, خرمن; — 688 Gerste, جو; — 689 bâlapat(t)ra ist Name zweier Bäume, bedeutet aber hier wohl einfach nur: junge Blätter habend? cf. خويد green corn not yet in ears, oder خويدك a kind of melon; — 690 junger Getraidehalm; دُلْمُل unripe grain.

---

[1]) so HT, vaṃdya G, vathaṃ E. [2]) yandâna G. [3]) yora G. [4]) so H, nerû T, naiyû G, naicû E. [5]) ? kuvataç ca hâ E, kuvataç ca ha T, kuvacaç ca ha H, kuvataiç ca saḥ G. [6]) mâra*n*e E. [7]) so HTE, jîdagânî G. [8]) so HTE, vây*u*varjâ G, cf. باى a city und ورز gain profit, trade. [9]) so HT, °pârâyaṇâḥ EG. [10]) so E, jirâyat tu HG, jirâyas tu T. [11]) kriçau E. [12]) so E, karjakhvâhaḥ T, karjaṃkhv° H, kâryyaṃjvâdaḥ G. [13]) so E, °çî° T, °çîdike H, °sîdataiḥ G. [14]) so E (dreisilbig), varjârgma H pr. m., varjârgar H sec. m., varjîgara T, vapragara G برزيگر. [15]) kulosho E, kulûsho T, kulûkho H, kusthepo (!) G. [16]) so E, khira° HT, shira° G. [17]) so E, yave java H, jave java T, yave dava G, [18]) so vermuthe ich; shopâdo E, khorîdo H, khoîdo T, shavâro G. [19]) so H, tokmo T, *l*okye G, moko (!) E. [20]) so HT, dulabhilaṃ G, duladulaṃ (!) E.

gaṃduma[1]) 691 syât tu godhûme, caṇake nakhudo 692 bhavet ।
kuṃjedas[2]) 693 tu tile khyâtaḥ, syât khoçaḥ[3]) 694 sasyamaṃjarî[4]) ‖ 166 ‖

691 Weizen, گندم; — 692 Kichererbse, نخود; — 693 Sesam, کنجد; — 694 خوشه an ear of corn.

çâlî 695 dhânyeshu sarveshu, tushe vuçam 696 itî "ritaṃ ।
khurjînaṃ[5]) 697 tu bhavet syûte[6]), voriyâ[7]) 698 tu kaṭe[8]) bhavet ‖ 167 ‖

695 Reis, hind. شال; — 696 Spreu, hind. بوس husk, chaff (aus Sk. busa); — 697 Sack, خرجين a portmanteau, saddle bags, خورجين dasselbe; — 690 Matte, بوريا a mat made of split reeds.

vâvarcî 699 sûdamâtre syât, pâkâdhyakshe[9]) vakâvulaḥ 700 ।
vâvarcîkhânâ[10] 701 pâkagṛihe viraṃjas 702 taṃdule bhavet ‖ 168 ‖

699 باورچى a cook („in Khwârazm"; von باور true, creditable); — 700 بکاول a head cook; — 701 باورچى خانه a kitchen; — 702 برنج rice.

cullyâṃ[11]) tu degadânaṃ[12]) 703 syât, sthâlyâṃ degaḥ 704 prakîrtitaḥ ।
hasaṃtyâm inkalaṃ[13]) 705 proktaṃ, tanûraḥ 706 kaṃdusaṃjnake ‖ 169 ‖

703 ديگدان a fireplace, hearth; — 704 ديگ a pot, kettle; — 705 ? hasantî Kohlenbecken, inkalaṃ ist nicht persisch, sondern indisch, cf. mahr. iṃgala a live coal; — 706 تنور an oven.

kuṃbhe kûjâ[14]) 707, piyâlâ[15]) 708 syât pânapâtre prakîrtitaḥ ।
pâtre jarpham[16]) 709 iti khyâtaṃ, çâke savjî[17]) 710 prakîrtitâ ‖ 170 ‖

707 Krug, کوزه; — 708 Trinkgefäſs, پياله[15]); — 709 Gefäſs, ظرف a vessel, vase; — 710 Gemüse, سبزى any esculent vegetable.

jîraḥ[18]) 711 syâj jîrake, girdaphilphilo[19]) 712 marice bhavet ।
philphildarâja[20]) 713 pippalyâṃ, ârdrake 'daraka[21]) 714 ucyate ‖ 171 ‖

711 زيره cumin seed; — 712 Pfeffer; wohl گرد round und فلفل; — 713

---

[1]) gumd° G. [2]) so E, kuṃjîdas T, kuñji° G, vuji° H. [3]) so HT, khoçâ E, blos sro G. [4]) so H, çasya° ETG. [5]) so HT, shu° G, khujjînaṃ E. [6]) so ET, sûte G, sthûle H. [7]) so HG, voripâ TE. [8]) so HG, kaṭau ET. [9]) pâkâdhyakshe E. [10]) so E, °naḥ H, °naha T, °na G; viersilbig!. [11]) so E, culhyâṃ T, cûlhyâṃ G, culhyaṃ H. [12]) so EHG, °naha T. [13]) so E, hasatyâṃm ankalaṃ T, °satyâṃm atkalaṃ H, hasatvâṃm akalaṃ G. [14]) so E, kûjaḥ HT, kûja G. [15]) φιαλη, Phiole. [16]) ? arpham HT, japhâm G, jarphâm E. [17]) so H, çavjî T, çavujî E, çavyo G. [18]) so HTE, ketara (!) G. [19]) philphalo G, philaphilo T, pilphilo H, blos philo E. [20]) so H, philaphila TE, G ganz verderbt. [21]) adraka G; zweisilbig.

(s. 459) فلفل دراز long pepper; — 714 (457) ادرک moist ginger (aus dem Sanskṛit).

çuṃṭhyâṃ[1]) tu jaṃjavîlaṃ[2]) 715 syât, kisnîjaṃ[3]) 716 dhânyake matam ।
jardacovaḥ[4]) 717 haridrâyâm[5]), aṃgojâ[6]) 718 hiṃguni smṛitaṃ ॥ 172 ॥

715 (456) trockner Ingwer, زنجبیل zingiber; — 716 (466) Koriander, کشنیج; — 717 (453) زردچوب yellow wood, turmeric; — 718 نگوز assa foetida.

namak[7]) 719 syât[8]) sarvalavaṇe, çakaraṃ[9]) 720 çarkarâsu ca ।
matsyaṃḍikâ navâtaḥ 721 syât, kaṃdaṃ 722 syât suguḍâdishu ॥ 173 ॥

719 Salz, نمک; — 720 Zucker, شکر (aus dem Skr.); — 721 eingedickter Saft von Zuckerrohr, نبات fine sugar; — 722 Zuckerkand, کند sugar (aus dem Skr.).

çîkhaṃ[10]) 723 tu çûla[11])mâṅse syât, kavâvaṃ 724 bharjite mataṃ ।
goçtaṃ 725 tu mâṅsamâtre syât, kshîre çîraṃ 726 prakîrtitaṃ ॥ 174 ॥

723 am Spiefs gebratenes Fleisch, سیخ a roasting spit; — 724 کباب meat roasted; — 725 Fleisch, گوشت; — 726 Milch, شیر.

laçune[12]) çîram[13]) 727 ity uktaṃ, pûvâsu[14]) çipusaṃ[15]) 728 bhavet ।
bhakte khushkapulâvaḥ[16]) 729 syân, maṃḍe çorvâ[17]) 730 prakîrtitaḥ ॥ 175 ॥

727 سیر garlic; — 828 ? pûvâ existirt nicht; cf. etwa pûpa *m.* Kuchen? dazu stimmt سپوسا pulmentum ex farina; — 729 خشک dry (mit wénig Ghee versehen) und پلاو a pillau, a dish composed of flesh or fish highly seasoned; — 730 Rahm, Oberes, شوربا broth, soup, gruel.

roganaṃ 731 snehamâtre syân, maskâ[18]) 732 syân navanîtake ।
jogharâtaṃ[19]) 733 tu dadhni syâd, grâse lukmâ[20]) 734 prakîrtitaḥ ॥ 176 ॥

731 روغن oil; — 732 Butter, مسکه; — 733 جغرات (in the dialect of Samarkand) sour coagulated milk; — 734 لقمة a mouthful, morsel.

---

[1]) çuḍhy° E. [2]) yaṃjavîraṃ G. [3]) so E, çnî T, çtî H, G ganz verderbt. [4]) jardacovaha E, yaracovaḥ G, jaïcovaḥ H, °vaha T. [5]) °yâṃm E. [6]) so E, °jaṃ HTG. [7]) so T, namaka HGE. [8]) so TGE, fehlt H. [9]) so EH, çakkaraṃ T, çakvare G. [10]) so T, çîkha H, sausham G, çîshaṃ E. [11]) so EH, çûlye TG. [12]) das erste Hemistich fehlt HT. [13]) so E, sîra G. [14]) so E, yûkâsu (!) G. [15]) so E, saṃpusaṃ G, سنبوسه a pie, a kind of triangular pasty. [16]) shushka E, shuçka HT, blos çka G. [17]) so HT, suraâ G, blos rvâ E. [18]) so E, °skaḥ G, °çkaḥ H, °çkaha T. [19]) so E, yoga° G, juga° HT. [20]) so E, °kmaḥ HT, °kmaṃ G.

âhâre khurdanî 735 proktâ, phelâyâm[1]) uçlam[2]) 736 ucyate ।
serî 737 tṛiptau, satṛiptau[3]) syât sero 738, 'jîrṇe tu[4]) imtilâ[5]) 739 ॥ 177 ॥

735 Essen, خوردنی; — 736 ? Speise-Überbleibsel; nach Hörnle ist (mit H pr. m.) uçlam zu lesen, = وصل „collection, hence the collected remnants of food", s. bei Shakesp. وصلچه a shred, remnant; — 737 Sattsein, سیری; — 738 satt, سیر; — 739 Verdauungsbeschwerden, arab. امتلاء being filled, im Hind. indigestion.

gallavânaç 740 ca câre[6]) syât, caupân[7]) 741 syât paçucârake ।
gausâlaḥ[8]) 742 syâd vatsa[9])mâtre, kîlake[10]) mesha 743 ucyate ॥ 178 ॥

740 ? câra Späher, Kundschafter; cf. گلهبان a pastor, shepherd; — 741 ? چوپان a shepherd, paçucâraka liegt nicht vor, nur paçucaryâ, und zwar nur in der Bedeutung: Leben nach Art des Viehes; — 742 گوساله a calf; — 743 میش; kîlaka in entsprechender Bedeutung liegt nicht vor, bedeutet resp. wohl den spielenden Schafbock.

Manâv[11]) âdama 744 ity ukto, Haivâ[12]) 745 'sya[13]) syâd griheçvarî ।
tadapatyaṃ manushyaḥ[14]) syâd âdamî 746 Pârasîmate ॥ 179 ॥

744 Manu, آدم (Adam); — 745 dessen Hausfrau, حوّى (Eva); — 746 deren Sprofs, der Mensch, آدمی.

saraḥ[15]) 747 çirasi, peçânî 748 lalâṭe, 'vrû[16]) 749 bhrûr[17]), vîkshaṇe ।
casma 750, vînî 751 tu[18]) nâsâyâṃ[19]), karṇayor goça 752 ucyate ॥ 180 ॥

747 Kopf, سر; — 748 Stirn, پیشانی; — 749 Braue, ابرو, برو; — 750 Auge, چشم; — 751 Nase, بینی the nose, the snout; — 752 Ohr, گوش.

mukhe dahana 753, jihvâyâṃ javâṃ[20]) 754, damdân[21]) 755 rade[22]) bhavet ।
tâlau kâmo 756, lavas 757 tv oshṭhe, nâyaḥ 758 kaṃṭhapraṇâlake ॥ 181 ॥

753 Mund, دهن; — 754 Zunge, زبان; — 755 Zahn, دندان; — 756 Gaumen, کام; — 757 Lippe, لب; — 758 Halsröhre, نای a reed, pipe; the throat.

---

[1]) so HTE, uchishṭe G. [2]) uçlam H pr. m., ulçam ET und H sec. m., ulusam G. [3]) so ET, satṛipte H, ca tṛipte G. [4]) so HT, fehlt EG. [5]) so HT, timstilâ G, imlilâ E. [6]) so H, °naçca shâre G, naçnacâre T, °vân çvacâre E. [7]) so T, caupâna HEG. [8]) so E; goçâlaḥ H, °laha T, gopâla G. [9]) so G, vasta ET, vastra H. [10]) so HT, kaulake G, kîlako E. [11]) so H, tparav G, mânava E, blos nave T. [12]) haitvâ E, haṃvâ H, havvâ G, vâsahî (!) T. [13]) fehlt T. [14]) so GT, °shyaṃ EH. [15]) so HT, siraḥ G, çiraḥ E. [16]) vrû HG, vrur T, varû E. [17]) so E, bhru HG, bhû T. [18]) vîṇî G. [19]) nâçâyâṃ EG. [20]) so ET, javâ H, blos vâ G. [21]) so H, °na T, daṃdâṃ E, duṃvâdana G. [22]) so HG, rado E, radane T.

mijagâ[1]) 759 netrapâlau[2]) syât, kapole[3]) ârijo[4]) 760 bhavet |
hanau[5]) janakha 761 ity uktas, tadadho gaɣgavo 762 bhavet || 182 ||

759 Wimpern, مژگان; — 760 Wange, عارض; — 761 Kinn, زنخ; — 762 غبغب a double chin.

grîvâyâṃ gardaniḥ[6]) 763 proktâ, tathâ kaṃṭhe gulû[7]) 764 bhavet |
skaṃdhe syâtâṃ dosha[8]) 765-kaphtau[9]) 766 Pârasîkamate dhruvaṃ || 183 ||

763 Hals, گردن; — 764 Kehle, گلو; — 765 Schulter, دوش; — 766 desgl., کفت.

pṛishṭhe[10]) puçtaṃ 767, çikaṃ[11]) 768 koshṭhe, nâpho 769 nâbhau, kaṭau kamar[12]) 770 |
pistâ[13]) 771 syât stanayoḥ strîṇâṃ, sînâ[14]) 772 syâd urasi dvayoḥ || 184 ||

767 Rücken, پشت; — 768 Bauch, شکم; — 769 Nabel, ناف; — 770 Hüfte, کمر; — 771 Brüste (der Weiber), پستان; — 772 Brust, سينه dvayoḥ, bei Mann und Weib.

pahalû 773 syât pârçvadeçe, maṇivaṃdhe mudho[15]) 774 bhavet |
haste dastaḥ 775, kurpare syâd âraṃjaṃ 776 ca[16]), tale kaphaḥ 777 || 185 ||

773 Seite, پهلو; — 775 Handgelenk, hind. موٹه a handle, hilt, fist, aus Sk. mushṭi; — 775 Hand, دست; — 776 آرنج the elbow; — 777 کف palms of hands.

aṃguçtas 778 tv aṃgulîshu syân, nâkhunas 779 tu nakheshu ca |
vastau jahârâ[17]) 780 ity uktaḥ, phalakâ 781 ca[18]) nitaṃvayoḥ[19]) ||
rânas 782 tû ”rvor, jânudeçe jânû[20]) 783, sâkas 784 tu jaṃghayoḥ |
kakshe vagala 785 ity uktaḥ, khâyâ[21]) 786 syâd aṃḍakoçayoḥ[22]) || 186[23]) ||

---

[1]) so E, miyagâ H, mipagâṃ T, mippagî G. [2]) so HTG, °pakshatau E. [3]) so HTG, °lau E. [4]) so E, yâneyo G, jârajo HT (j° für y° im Anlaut). [5]) dies Hemistich nur in E, fehlt HTG. [6]) so E, gardani G, garadaniḥ HT. [7]) so ET, gulûma H, gulaṃ G. [8]) so E, °ça HG, °çaṃ T. [9]) so E, kitphau HT, kiphîṃ G. [10]) G hat hiervor noch ein leider sehr corruptes Hemistich. [11]) so E, sikaṃ HT, çikama G. [12]) so H, kamara ET, miyâna (!) G ميان waist, loins. [13]) so ET, pîstâ H, pistâna G. [14]) so E, sînaha T, sîmaḥ H, sîjaḥ G. [15]) so E, mucau H, muco TG. [16]) so E, °jaṃtan G, °raṃbhe ca H, °raṃme ca T. [17]) so E, hâra H, yahâra T, pahâra G. [18]) so E, phalako 'pi H, surînas tu T سرين the buttocks; in G fehlt pâda 4 nebst pâda 1—3 des nächsten Verses. [19]) so ET, nivaṃdhayoḥ H. [20]) so T, blos nû H, nûkâ E. [21]) so E, khâyaḥ H, khâpahṛi (statt °ḥ) T, hkâshâyaḥ G. [22]) °koshayoh HG. [23]) es sind hier in E vier Hemistiche als ein çloka gezählt.

778 Finger, انگشت; — 779 Nagel, ناخن; — 780 Blase, زهار; — 781 ? Hinterbacken, cf. فلقه the kneepan oder فلق the opening of the mouth, a fissure; — 782 Schenkel, ران; — 783 Knie, زانو; — 784 Bein, ساق; — 785 Achselhöhle, بغل armpit; — 786 Hoden, خايه.

pârshṇau pâsnâ[1]) 787, pâ[2]) 788 caraṇayoḥ[3]), keraḥ 789 çiçne[4]), kuso[5]) 790 bhage ।
gude kûnaḥ[6]) 791, sarvakeçe[7]) moyo[8]) 792, rîça 793 - varûtakau 794 ‖ 187 ‖

787 Ferse, پاشنه; — 788 Fufs, پا; — 789 کیر penis; — 790 vulva کس, und cf. کش the groin (Schambug), کوش a large glans penis; — 791 podex, کون; — 792 Haar, مو; — 793 ریش the beard; — 794 بروت whiskers, mustaches [v. 187 greift nach v. 188 hinüber].

çmaçrv-oshṭhakeçayoḥ syâtâm, asthni co 'stukhâṃ[9]) 795 ity api ।
roḍâ[10]) 796 câ 'ntre, yakṛitpiṇḍe[11]) jigar[12]) 787, postaṃ[13]) 799 tvaci smṛitaḥ ‖ 188 ‖

795 Knochen, استخوان a bone; — 796 Eingeweide, روده; — 797 Leber, جگر; — 798 Haut, پوست.

âçleshe[14]) syâd vâlaî 799 ca, vosaha[15]) 800 syâc cuṃvane 'pi ca ।
durbhikshe tu garânî[16]) 801 syâd, arjânî 802 syât subhikshake ‖ 189 ‖

799 ? âçlesha Umschlingung, ob etwa بالائی oben sein (in concubitu)?, denn ولاء kindred, relationship, friendship, love; hind. ولا nearness, affinity, friendship pafst nicht recht; — 800 Kufs, بوسه; — 801 گرانی, scarceness, dearth; — 802 ارزانی cheapness, abundance.

samarghe 'rjâ[17]) 803, mahârghe tu[18]) girâ[19]) 804 syât Pârasîmate ।
gurasanagî[20]) 805 kshudhâyâṃ syât, tṛishṇâyâṃ tishṇagî[21]) 806 matâ ‖ 190 ‖

803 wohlfeil, ارزان; — 804 theuer, گران; — 805 Hunger, گرسنگی; — 806 Durst, تشنگی.

---

[1]) so E, pâçnaha HT, pârshṇaḥ G. [2]) yâṃ E. [3]) dreisilbig! [4]) blos keraḥ (ohne çi°) E, karaḥ çiçne HT, liṃge karaḥ G. [5]) so H, kuço ETG. [6]) so HTG, konaḥ E. [7]) so HTG, °çeshu E. [8]) mopo ET. [9]) asthni ustukhâṃ E, a. co 'stakhânam HTG (shâṇam G). [10]) so E, rodaḥ H, °daha T, °daḥ G. [11]) jak° EHTG. [12]) so H, °garu T, °gara GE. [13]) so E, blos pos H, poçtas T, yostas G. [14]) dies Hemistich nur in E, fehlt HTG; °shâ E. [15]) zweisilbig. [16]) so E, girânî HTG. [17]) so E, 'rjâṃ HT, 'rjâna G. [18]) fehlt E. [19]) so E, girâṃ HT, girâna G. [20]) viersilbig. [21]) so EG, tiçnagî T, tiçnigî H.

tanau[1]) vadana 807, tarkîbo[2]) 808 dehe, rûy[3]) 809 mukham aṃḍale ׀
amge[4]) javâriho 810, gulphe sitâliṃga[5]) 811 iti smṛitaḥ ॥ 191 ॥

807 Körper, بدن the body, especially when liveless; — 808 desgl., تركيب; 809 Antlitz, روى face; — 810 Glied, جوارح members of the body; — 811 شتالنگ the ankle-bone.

çuturaṃ[6]) 812 tu bhaved ushṭre, mûlye syât kîmatir 813 vahâ 814 ׀
panyâjîve dukâṇ-dâro 815, mâyaḥ[7]) 816 mûladhane bhavet ॥ 192 ॥

812 Kameel, شتر; — 813 قيمة price, value; — 814 بها desgl.; — 815 دكاندار a shopkeeper; — 816 مايه a capital in trade, stock.

vikrayî syât pharoçaṃdaḥ[8]) 817, kharîdâra[9]) 818 krayî bhavet ׀
phâyadâ[10]) 819 tu bhavel lâbhe, nyâse tu syâd amânata[11]) 820 ॥ 193 ॥

817 Verkäufer, فروشنده; — 818 Käufer, خريدار; — 819 Gewinn, فائده; — 820 امانة a deposit, ary thing given in trust.

kharîdas[12]) 821 tu kraye proktaḥ, pharokhto[13]) 822 vikraye[14]) bhavet ׀
surakhadânaḥ[15]) 823 guṃjâyâṃ, karshe tolâ[16]) 824 prakîrtitaḥ ॥ 194 ॥

821 Kauf, خريد; — 822 Verkauf, فروخت; — 823 سرخ دانه red medicinal berry; guñjâ, Samenkorn des Abrus precatorius, als Gewicht gebraucht; — 824 توله name of an Indian weight of $2\frac{1}{2}$ miskâls; karsha, ein best. Gewicht (16 mâsha).

diramaṃ[17]) 825 dravyamâtre syâd, ratnamâtre javâhiraṃ[18]) 826 ׀
yâkûtaṃ 827 syât padmarâge, ilmâsaṃ[19]) 828 hîrake bhavet ॥ 195 ॥

825 Geld, درم[20]); — 826 Juwel, جواهر; — 827 Rubin, ياقوت[21]); — 828 Diamant الماس[22]).

muktâyâṃ maravârîdaḥ 829, phirojâ[23]) 830 harite maṇau ׀
marjâno[24]) 831 vidrume proktaḥ, tilâ[25]) 832 svarṇe prakîrtitaḥ ॥ 196 ॥

---

[1]) tano HTG, hanau E. [2]) tarkîcau E, tarakîvau HT, rakîvo G. [3]) rûpa E, roya G, *sûy* H, *sûpu* T. [4]) aṃgi E. [5]) so H, çi° T, sitâliga E, çitâlaṃga G. [6]) so HT, çutaraṃ E, çatura G. [7]) so H, mâpaha ET, mâyâ G. [8]) çaṃdaha E, saṃdaḥ H, °saṃdahaḥ T; mit pharosaṃ bricht G in Zeile 6 von 16[a] ab. [9]) so E, kharîdadâraḥ H, °dahâraḥ T. [10]) so E, °daḥ H, dahṛi (für daḥ) T. [11]) so HE, °nataḥ T. [12]) arîdas T. [13]) so EH, °rokho T. [14]) so HT, vikriye E. [15]) so (aber °sha°) H, °ha TE. [16]) so E, tolaḥ H, °laha T. [17]) so HT, dirama E. [18]) so ET, °haraṃ H. [19]) so E; ohne saṃdhi; almâsaṇ H, *ts*al° (!) T. [20]) *δραχμη*. [21]) *ὑακινθος*. [22]) *αδαμας*. [23]) so E, pherojaḥ H, pherojaha T. [24]) so H, mîrjâno E, mararjânaha T. [25]) so ET, tillâ H.

829 Perle, مروارید[1]); — 830 فیروزه a turkois; haritamaṇi aber, und somit wohl auch harita maṇi, ist: Smaragd; — 831 مرجان red coral; — 832 Gold, طلا (طلاء).

nukraha 833 ca[2]) bhaved rûpye, misaṃ 834 tâmre prakîrtitaṃ ।
viraṃjaṃ[3]) 835 tu bhaved rîtau[4]), royî[5]) 836 kâṅsye prakîrtitaṃ ॥ 197 ॥

833 Silber, نقره; — 834 Kupfer, مس; — 835 Messing, برنج copper; — 836 روی brass.

lohe syâd âhanaṃ 837, kâce çîçâ[6]) 838 syâd, abhrake 'vrakaṃ 839 ।
sîmâvaḥ 840 pârade proktaḥ, surmaḥ[7]) 841 çroto-'ṃjane[8]) bhavet ॥ 198 ॥

837 Eisen, آهن; — 838 Glas, شیشه; — 839 hind. ابرک (nach Shakesp. aus dem Sansk.) talk, mica; — 840 Quecksilber, سیماب; — 841 سرمه a collyrium with which they tinge the eyebrows and lashes, antimony, leadore; çroto'ṃjana liegt nicht vor, würde resp. Ohrensalbe bedeuten.

gogirdaṃ[9]) 842 gaṃdhake, tâle jaranîkaṃ[10]) 846 prakîrtitaṃ[11]) ।
arjîjaṃ 844 tu bhaved vaṃge, surva[12]) 845 sîsaka[13]) ucyate ॥ 199 ॥

842 Schwefel, گوگرد; — 843 زرنیق arsenic [dáraus entstanden?]; tâla Auripigment; — 844 ارزیز lead; vaṅga Zinn und Blei; — 845 Blei, سرب.

tûle paṃbaḥ[14]) 846, aslaṃ[15]) 847 kshaudre, sikthake[16]) moma[17]) 848 ucyate ।
syâd dhiṃgule[18]) çaṃgarapham[19]) 849, çilâyâṃ[20]) manaçilaṃ[21] 850 bhavet ॥ 200 ॥

॥ vaiçyavargaḥ ॥

846 پنبه cotton; — 847 Honig, عسل; — 848 Wachs, موم; — 849 Mennig, Zinnober, شنگرف cinnabar, vermilion; — 850 rother Arsenik, hind. منسل (aus Sk. manaḥçilâ).

---

[1]) μαργαρίτης. [2]) so E, nokaraḥ tu H, nokaras tu T. [3]) so T, virajaṃ E, vîraṃ (Platz für ein aksh.) H. [4]) so T, bhaved îtau H, bhaveddrîtau E. [5]) ropî E, rojaḥ HT. [6]) so E, çîçaḥ H, sîsaba T. [7]) so H, surmaha TE. [8]) çroto◡'jane E. [9]) so HT, gotirdṛi E. [10]) so E, jaranîshaṃ HT. [11]) so HT, pari° E. [12]) so HT, surava E. [13]) çîçaka HTE. [14]) so H, ghaṃvaha T, puṃvai E. [15]) asalaṃ E, °vaḥ çalaṃ HT. [16]) so T, çi° E, sikyake H. [17]) so E, mûma HT. [18]) so E, syâd iṃgule HT. [19]) so ET, siṃga° H. [20]) so HT, çilâçaṃ E. [21]) mana° HT, manaḥçilaṃ E.

§ 10 (bis v. 211) çûdravargaḥ.

kumbhakâre kulâlaḥ 851 syân, mâlâkâre tu vâgavân 852 ।
sthapatau râja 853 ity ukto[1]), jolâhâ[2]) 854 tamtuvâyake ॥ 201 ॥

851 كلال a potter; wohl aus dem Sanskrit?; — 852 Kranzwinder, باغبان a gardner; — 853 Baumeister, راز a plasterer of walls, Hind. a mason, a bricklayer; — 854 Weber, جولاهه.

darajî 855 tunnavâye[3]) syât, çaykalgar[4]) 856 çastramârjake[5]) ।
sûcyâm tu sojanaḥ[6]) 857 proktas, tamtau ristâ[7]) 858 prakîrtitaḥ ॥ 202 ॥

855 Schneider, درزی; — 856 Schwertfeger, صیقل, resp. hind. صیقلگر a polisher, furbisher, burnisher, armourer; — 857 Nadel, سوزن; — 858 Faden, رشته.

ramgâjîve ramgarejaḥ 859 procyate Pârasîmate ।
kaphaçdojaç[8]) 860 carmakâre, câ "hangar[9]) 861 lohakârake ॥ 203 ॥

859 Maler, رنگریز a dyer; — 860 کفشدوز a shoemaker; — 860 آهنگر a blacksmith.

jaragaraḥ[10 u. 11]) 862 svarṇakâre syân, misagaras[11 u. 12]) 863 tâmrakuṭṭake[13]) ।
hajjâmo 864 nâpite prokto, darûdagara[11 u. 14]) 865 vardhakau[15]) bhavet ॥ 204 ॥

862 Goldschmid, زرگر; — 863 Kupferschmid, مسگر; — 864 Barbier, حجام; — 865 درودگر carpenter.

gâjuro[16]) 866 rajake proktaḥ[17]), khamâraḥ 867 çaumḍike bhavet ।
vâjîgaro 868 mâyike syât, vâjî 869 sarvemdrajâlake ॥ 205 ॥

866 Wäscher, گازر a bleacher; — 867 خمار a wine merchant; — 868 Gaukler, بازیگر; — 871 بازی Gaukelspiel.

gâyane syât tu goyamdaḥ[18]) 870, sâjamdaḥ[19]) 871 syâc ca vâdake ।
sarvavyâdheshu saiyâdo 872, majdûro[20]) 873 bhṛitibhug bhavet ॥ 206 ॥

870 Sänger, گوینده; — 871 Musikant, سازنده; — 872 Jäger, صیاد a

---

[1]) so E, mejamâraḥ syâj H, meja° syâd T, معمار an architect. [2]) so E, jolâh H, vâphamdas T بافنده a weaver. [3]) so E, tu tamtuvâye H, tu tunnavâye T. [4]) çajkalgar T, °ra H (j für y!), syâ‸(Zeichen für Lücke)kalegaraḥ E. [5]) so HT, çastrâ° E. [6]) so H, soyanaḥ E, çojanaḥ T. [7]) so E, riçtaḥ HT. [8]) so H, kaphaça° TE, °dojaha T. [9]) so HT, °kâre ahamgara E. [10]) so HE, °raha T. [11]) dreisilbig! [12]) so HE, miça° T. [13]) so HT, °ṭṭane E. [14]) so E; durodur H, proktash ṭurodura (!) T, etwa eine Abbreviatur (cf. 873) aus درودگر? [15]) vârddhakau E. [16]) so E, gâjaro HT. [17]) so E, rajakeshu syât HT. [18]) gojadaḥ H, °jamdaha T, °yamdaha E. [19]) so H, °daha TE. [20]) so H, marjûro T, majûro E.

hunter; — 873 مزدور, a mercenay, hired labourer; im Hindust. verkürzt (cf. 865[a]) zu مزور.

hammâlo[1]) 874 bhâravâhe syât, pâmare[2]) âma[3]) 875 ucyate ।
gulâmas 876 tu bhaved dâse[4]), kâhalas 877 tv alase bhavet ॥ 207 ॥

874 Lastträger, حمّال; — 875 عام common, vulgar; — 876 Sklave, غلام a boy, lad, servant, slave; — 877 faul, كاهل.

mṛigayâyâm çikâra[5]) 878 syâd, dujdaç[6]) 879 core[7]) prakîrtitaḥ ।
tamtau târaḥ 880 samâkhyâto, dujdî 881 syât steyakarmaṇi ॥ 208 ॥

878 Jagd, شكار; — 879 Dieb, دزد; — 880 Faden, تار; — 881 Diebstahl, دزدی.

vâphtanam[8]) 882 tu bhaved vâṇau, putrikâsu ca sûrataḥ 883 ।
maujaḥ[9]) 884 tv anupadînâyâm, pâpoçaḥ 885 syâd[10]) upânahi ॥ 209 ॥

882 Weben, بافتن to weave, plait; — 883 صورة image, effigy, figure; 884 موزه a boot; — 885 Pantoffel, پاپوش[11]).

kaçâyâm[12]) tâjiyânaḥ[13]) 886 syân, mahakam[14]) 887 nikashe bhavet ।
dyûtakâre kimârvâjo[15]) 888, mora[16]) 889 pâçaka îritaḥ ॥ 210 ॥

886 Peitsche, تازیانه; — 887 محک a touchstone; — 888 قماراز a gamester; — 889 ? Würfel, مور moving, fluctuating; für das durch HT indicirte مهر findet sich die Bedeutung: Würfel, die sich ganz gut an die Bed.: calculus s. latrunculus quo in lusu utuntur anknüpfen liefse, nicht vor.

dastaḥ[17]) 890 tu muçale prokto hâvanam[18]) 891 syâd ulûkhale ।
yamgalâgur[19]) 892 bhaved darvyâm[20]), câlanyâm[21]) elako[22]) 893 bhavet ॥ 211 ॥

॥ çûdravargaḥ ॥

890 ? muçala Mörserkeule, Stöfsel, Klöppel دسته a handle; — 891 Mörser, هاون; — 892 ? darvî Löffel; das Pârasî-Wort fehlt mir; denn زنگ Rost und لاغر (s. 988) lean meager thin, also etwa „durch Rost dünn“ liegt doch gar zu weit von: „Löffel“ ab; — 893 Sieb, türk. الك (elek) Haarsieb.

[1]) so HT, hamsâlo E. [2]) ohne saṃdhi. [3]) so E, yâma H, pâma T. [4]) dâro E. [5]) so E, °raḥ H, raha T. [6]) so HT, dujadaç E. [7]) so HT, caure E. [8]) so HT, vâphanam E. [9]) maujaḥs H, maujas T, mojahas E. [10]) so TE, pâd H. [11]) unser „Babusche“. [12]) so E, kashâyâm HT. [13]) tâjiyânaï H, °naha T, tâjîyânaha E. [14]) so E, mehakam HT. [15]) so H, kimâra TE. [16]) mora E, moharaḥ H, moharaha T. [17]) so H, dastaha E, *h*astahas T. [18]) so HT, havanam E. [19]) yagalâgur T, yamgamlâgur H, yagalâjur E; ist etwa an زنگل a bell, a rattle zu denken? der Löffel als der klimpernde, klirrende? aber der Schlufs des Wortes? [20]) so T, bhaved arvyam H, bhaved drivyâm E. [21]) °lanyâmm T, câlanyâmm H, vâlarâyâm (oder vâlan yâm) E. [22]) so HT, eloko T pr. m., egalakâ E.

§ 11 (bis v. 249[a]) Adjectiva (viçeshyanighnavargaḥ)[1]).

nekîkâraḥ 894 sukṛitî syâd, vujurgas 895 tu mahâçayaḥ ı
dilâvaraḥ 896 sahṛidaye[2]), dânâ 897 syân nipuṇe 'pi ca ॥ 213 ॥

894 tugendhaft, نیکی goodness, virtue und کار acting; — 895 بزرگ great, magnificent; — 896 beherzt? sahṛidaya (oder suh°) liegt aber in dieser Bedeutung nicht vor; دلاور bold, warlike, brave; — 897 geschickt, دانا.

mahâṃtam[5]) udyamaṃ kartâ yas tasmin puṟtaraddudaḥ[6]) 898 ı
sayagadakunaṃdaḥ[7]) 899 syât saṃçayâpannamânasaḥ ॥ 214 ॥

898 eine grofse Anstrengung vollbringend, پر voll und تردد labour, exertion, endeavour; — 899 ? dessen Sinn von Zweifel erfüllt ist; aus arab. صيقة dust driven about by the wind und كننده „Staub machend" im Sinne von: „voll Bedenken"? Die Lesart von E liefse sich ebenfalls als eine hybride Bildung aus Hind. سی hundred, شک doubt und كننده, also: „hundert Zweifel erhebend" auffassen, oder in sa yah saka° zertheilen, was freilich sehr umständlich wäre (s. jedoch 898. 936).

akâviras[8]) 900 tu jyeshṭhaḥ[9]) syâṯ, râstaḥ 901 syâd dakshiṇîyake[10]) ı
umaṟdarâja[11]) 902 âyushmâṉ, vadânye tu sakhî 903 bhavet ॥ 215 ॥

900 ältest, اکابر; — 901 des Opferlohnes werth (ehrenwerth) راست good, just; — 902 عمردراز a long life, hier als bahurîhi; — 903 سخی liberal.

parîkshake[12]) çanâsiṃdâ[13]) 904, mulânâ 905 çâstravettari ı
ârjûdeḫ[14]) 906 syâc ca[15]) varade, saguphtaḫ[16]) 907 hṛishṭamânase ॥ 215[17]) ॥

904 شناسنده knowing; — 905 der Lehrbücher kundig, مولا a judge, lord, master, مولانا s. 485; — 906 bereit Wünsche zu erfüllen, آرزو wish und ده a giver; — 907 شکفته blossomed, blown; happy.

unmanasy[18]) api câkaḥ 910 syâd, dilgîro[19]) 909 durmanasy api ı
juâṃmarda 910 udâre syât, purkâraḥ[20]) 911 sukale 'pi ca[21]) ॥ 216 ॥

---

[1]) so nach T; s. oben p. 16. [2]) so E, bujurakaḥ syân H, bujurukaḥ syân T. [3]) so T, suhṛidaye HE. [4]) so E, die Zahl 212 ist ganz übersprungen. [5]) eigenthümlich umständliche Ausdrucksweise (cf. 936); auch sollte man den Genetiv: mahata udyamasya erwarten! [6]) so H, puras taruddaveḥ T, yura tadduraḥ E. [7]) so H, sayagadakaṃdaḥ T, sayahsakaku° E. [8]) so ET, âviras H. [9]) so E, pûjya H, pûjye T. [10]) so HT, °pake E. [11]) so T, umara° HE. [12]) so HT, °kshate E. [13]) so E, °daḫ H, daha T. [14]) so H, °deha T, °daha E. [15]) so E, syât tu HT. [16]) çakuphtaḫ H, °taha T, saguphtaha E. [17]) so E, die Zahl 215 zweimal. [18]) so HT, unmanâsy E. [19]) syâd dilagîro E, syâdilgirau H, syâddiliro T. [20]) so H, pura° TE. [21]) 'pi ca bis syâhî le in v. 218 fehlt in T (Lücke!).

908 چاک vigorous, healthy; — 909 دلگیر sad, afflicted; — 910 جوان‌مرد brave, generous; — 911 پرکار skilful.

khyâte tu maçahûraḥ[1]) 912 syâj, jardâro 913 dhanini smṛitaḥ ।
sâhivas[2]) 914 tu prabhau proktaḥ[3]), avâdânas[4]) 915 tu samṛiddhake ॥ 217 ॥

912 مشهور celebrated; — 913 reich, زردار; — 914 Herr, صاحب; — 915 آبادان peopled, flourishing, populous.

gumga 916 mûke, dayâlau ca[5]) meharavân[6]) 917 itî "ritaḥ ।
masîmâtre bhavet syâhî 918, lekhanyâṃ kalamo 919 bhavet ॥ 218 ॥

916 stumm, گنگ; — 917 mitleidig, مهربان; — 918 Dinte, سیاهی; — 919 Schreibrohr, قلم.

doyâtaṃ[7]) 920 tu mashîpâtre[8]), haraphas 921 tv akshare bhavet ।
sataras 922 tu bhavet paṃktau[9]), mâtrâsu mukutaḥ[10]) 923 smṛitaḥ ॥ 219 ॥

920 Dintenfaſs, دوات davât inkstand; — 921 Silfe, حرف a letter of the alphabet; — 922 Zeile, سطر a line, a row, writing; — 923 ? More; cf. موقوت fixed or restricted to a certain time; oder sollte nicht doch die Lesart von HT: نقطه, s. unten, den Vorzug verdienen?

çâiraḥ[11]) 924 kavimâtre syât, kavitâyâṃ tu çâarî 925 ।
ruvâî[12]) 926 tu bhavec chloke, vayataṃ 927 padyamâtrake ॥ 220 ॥

924 Dichter, شاعر; — 925 Dichtung, شاعری; — 926 çloka رباعی Vierzeile; — 927 aus Versgliedern bestenend, بیت a distich, verse.

misaraḥ[13]) 928 tu[14]) pade proktaḥ, chaṃdovaddhe najaṃ 929 bhavet ।
paratamtre giriphtâra 930, âjâdâ[15]) 931 syât svataṃtrake ॥ 221 ॥

928 مصراع a hemistich; — 929 نظم arrangement, composition of verses; — 930 abhängig, گرفتار captive; — 931 آزاده free.

pukhtaḥ[16]) 932 tu dîrghasûtre syât, saṃjîdâ[17]) 933 sâvadhânake ।
aklaho[18]) 934 ghasmare prokto, gurusaṇ[19]) 935 kshudhite bhavet ॥ 222 ॥

932 sich lange bedenkend, پخته (eig. gekocht) expert, skilful, versed

---

[1]) so H, mahaçûraḥ E. [2]) so E, sâhavas H. [3]) so H, kta E; ohne saṃdhi! [4]) so E, dreisilbig! avâdâṃs tu H. [5]) so E, tu H. [6]) so E, meharvîna H. [7]) so H, doyânaṃ E; in T unklar ob n, ob t. [8]) makhî° E; °pâtre T, mâtre HE. [9]) so E, paṃktyâṃ HT. [10]) mukutaha E, nukataḥ H, nukutaha T; cf. نکته a sublime or quaint conceit, a point, an impression made on the ground, spots of rust on a mirror, oder نقطه a point, a dot, a diacritical point, a part of any thing. [11]) so E, çâaraḥ HT. [12]) so E, rubâyî H, rupâî T. [13]) so H, °raha E, miçaraha T. [14]) fehlt H. [15]) so ET, âjâdaḥ H. [16]) so H, potkhahas T, yotkhrâṃ E. [17]) so E, °daḥ H, °daha T. [18]) aktaho E, avlaho H, ashlaho T. [19]) so E, gurasanaḥ H, °sanaha T.

in business, also wie unser: reif erfahren, im Sinne von: bedächtig; — 933 aufmerksam, سنجیده weighty, grave; — 934 gefräfsig, اکال eating, devouring; — 935 گرسنه hungry, famished.

khyâtaḥ çikamparasto[1]) 936 'tra yaḥ syât kukshimharir naraḥ[2]) ।
lâlûjo[3]) 937 lolupe prokto, harîpho[4]) 938 lobhavaty api ॥ 223 ॥

936 شکم پرسته a pamperer of his belly, an epicure, a glutton; — 937 begehrlich, gierig; hind. لالچ longing, covetous, لالچی covetous, interested, selfish; — 938 حریف a rival, impudent, audacious.

viniyâja[5]) 939 vinîte syâd, devâno 940 'nmatta[6])saṃjnake ।
masto 941 'pi ca bhaven matte, dhṛishṭe veadavaḥ 942 smṛitaḥ ॥ 224 ॥

939 bescheiden, بی نیاز without prayer or entreaty, in want of nothing; — 940 besessen, دیوانه; — 941 مست drunk; — 942 kühn, unverschämt, بی ohne und ادب propriety of conduct, good breeding.

darrâkas[7]) 943 tu pragalbhe[8]) syân, nâmardaḥ 944 kâtare bhavet ।
gṛihayâlau[9]) girimdaḥ[10]) 945 syât, çraddhâlau[11]) purahausalâ[12]) 946 ॥ 225 ॥

943 ? muthig, entschlossen, cf. درّاک darrâk intelligent, penetrating; zur Bedeutung pafst aber weit besser das Abstractum: دراک dirâk overtaking, coming up, seizing; — 944 unschlüssig, نامرد; — 945 zum Greifen geneigt, گیرنده a taker, cf. auch گرنده a oort of brush used by weavers to apply plaste or size to their warp; — 946 gläubig, vertrauensvoll; پر voll und حوصله a bird's crop; also: „mit vollem Kropfe" d. i. satt, und daher: gemüthlich gestimmt, zutraulich? Die Bed. geduldig, die durch بی‌حوصله ungeduldig nahe gelegt wird, pafst nicht zu çraddhâlu.

yâvaḥgo[13]) 947 mukhare, goyâ[14]) 948 vaktari syât tu, kadvade ।
vadsakhun[15]) 949, pursakhun[16]) 950 câ 'pi vâcâle parikîrtitaḥ ॥ 226 ॥

947 geschwätzig, یاوه, یاب vain foolish futile (cf. 145) und گو saying; — 948 گویا a speaker; — 949 schlecht redend, بد bad und سخن word speach; — 950 redselig; پر voll und سخن.

---

[1]) so H, çikamrasto T, çikamapusto E. [2]) sehr ausführlich! cf. 898. [3]) so HT, lajûlo E. [4]) so E, harîso HT; cf. حریش voracious. [5]) °jî E, beniyâjo H, venipâjo T. [6]) so HTE, aus: devâna unma°. [7]) so HT, dararâ° E. [8]) so HT, prâ° E. [9]) °pâlau E, °jâlau T, °jâlaṃ H. [10]) giraṃdaḥ H, °daha T, °riṃdaha E. [11]) çrâ° E. [12]) so E, °laḥ HT. [13]) jâvaḥgo H, jâvahago T, yâvahago E. [14]) gopâ ET. [15]) vadasukhana E, kaïsakharu T, kaïsan H; ist kaï nur Schreibfehler für vada? [16]) purasakhan HT, °sakhuna E.

nâdâno 951 'jne ca, nidrâlau purkhvâvo[1]) 952 'tra nigadyate ।
krodhane syât khaçmanâko[2]) 953, niyâjmaṃdo 954 'bhivâdake ॥ 227 ॥

951 unverständig, نادان; — 952 schläfrig, پرخواب; — 953 خشمناک passionates, furious; — 954 نیازمند supplicating.

khâmoça[3]) 955 iti tûshṇîke, verahnâ[4]) 956 tu digaṃvare ।
veijjato[5]) 957 'bhibhûte syâd, vasta[6]) 958 vaddhe prakîrtitaḥ ॥ 228 ॥

955 schweigend, خاموش; — 956 برهنه naked, bare; — 957 bewältigt, بی عزت inglorious, dishonorable; — 958 gebunden, بسته.

âpanne vadahâlaḥ 959 syâd, âçiko 960 vyasanârthake ।
pareçâno 961 vyâkule syâd, vehâlo 962 vihvale bhavet ॥ 229 ॥

959 بدحال in bad circumstances; — 960 اشق most difficult and troublesome; — 961 bestürzt, پریشان disturbed, perplexed, confounded; — 962 verwirrt, بی حال illcircumstanced.

vadaklo[8]) 963 dushṭavuddhau syân, nekaaklaḥ[9 u. 10]) 964 sumatau bhavet ।
vadaphailaç[11 u. 10]) 965 câ "tatâyî[12]) syâd, vadhye[13]) syât kustanî[14]) 966 'ti ca ॥ 230 ॥

963 bösgesinnt, بد bad und عقل intellect, mind; — 964 gutgesinnt, نیک good und عقل; — 965 بد فعال doing mischief; of bad habits; — 966 کشتنی fit to be killed, destined for slaughter.

kaje 967 'nṛite[15]), vadâmojaḥ 970 khale, khûnî 969 tu ghâtake[16]) ।
dhûrte riṃdaḥ 970, kadarye tu vadakaulaḥ[17]) 971 prakîrtitaḥ ॥ 231 ॥

967 Lüge, کجی crookedness; crossness; — 968 Bösewicht, بد آموز illbred, teacher of evil; — 969 Mörder, خونی; — 970 Schelm رند dissolute; — 971 knauserig بد und قول speaking, thinking.

muphlisas[18]) 972 tu daridre syâd, gadâ 973 syâd yâcake tathâ ।
jamâdo[19]) 974 giridhâtvâdau, navâto[20]) 975 bhûruhâdishu ॥ 232 ॥

972 arm, مفلس; — 973 گدا beggarly; — 974 Bergerz, جماد any thing

---

[1]) purakhvâvo H, °shvâvo T, °shvavo E. [2]) so E, khasaṃnâko HT. [3]) so T, °sa H, °çam E. [4]) varahna H, varahanaha T, verahanâ E. [5]) °jjâto T. [6]) so E, vasto HT. [7]) mit vada bricht H ab. [8]) vadalko T, vadaaklo E. [9]) so E, alkaḥ T. [10]) dreisilbig. [11]) phelo T. [12]) -°tâî ET. [13]) so T, vaddhe E. [14]) kuçtanî T. [15]) so E, kajo 'lrijau. [16]) so E, ghâtuke T. [17]) so T, phailaḥ E (war eben schon da, s. 965). [18]) muktiphlisas T. [19]) so E, tamâdo T. [20]) so T, navâdî E.

not growing or increasing, inorganic; a fossil; — 975 Baum etc., نباتی, نبات growig, germinating; a vegetable.

tiryakshu syâc ca hevâna[1]) 976, insâno[2]) 977 manujeshv api |
sumdare mahavûvaḥ 978 syâṭ, rucâyamdâ[3]) 979 priye bhavet || 233 ||

976 Thiere, حیوان; — 977 Mensch, انسان; — 978 schön, محبوب; — 979 ? lieb; etwa eine denominative Part. Praes. Bildung رچهاینده von Hindust. رچها (aus skr. rakshâ, Shakesp.) protection, guarding, defence.

vado 980 'dharme[4]), cirakinaṃ[5]) 981 maline parikîrtitaṃ |
pavitre pâka 982 ity uktaḥ, pâkîjaha[6]) 983 syât tu nirmale || 234 ||

980 بد bad; — 981 schmutzig, چرکن und چرکین; — 982 reinigend, پاک; — 983 پاکیزه pure, chaste.

saradâra[7]) 984 mukhyeshu vikhyâto, vemarato[8 u. 6]) 985 'sâravastuni |
pharâkas[9]) 986 tu viçâle syât, pharavaha[10 u. 7]) 987 syât sthûlavastuni || 235 ||

984 سردار a general, officer; — 985 بی مروّه without fortitude; — 986 فراق separation, distance; — 987 فربه fat, gross, corpulent.

kriçe tu lâgaraḥ 988 prokto, leçe jarâ[11]) 989 prakîrtitaḥ |
pracure visiyâra[12]) 990 syâd, dhama[13]) 991 syân nikhile 'pi[14]) ca || 236 ||

988 mager, لاغر; — 989 جره any thing small; — 990 بسیار much, copious; — 991 ہم together, all.

samagre tu tamâmaḥ 992 syân, najdîkaṃ[15]) 993 nikaṭe smṛitaṃ |
vayaddaha[16 u. 6]) 994 tv avyavahite, dûre dûra 995 itî "ritaḥ || 237 ||

992 vollständig, تمام; — 993 nahe, نزدیک; — 994 ungetrennt, بی und عداء distance; — 995 fern, دور.

girdâ[17]) 996 syâd vartule, procce vusaṃdâ[18]) 997 parikîrtitaḥ |
vâmane pasta[19]) 998 ity uktaḥ, ṛijau râstaḥ 999 prakîrtyate || 238 ||

996 rund, گرده; — 997 ? überaus heftig, stark; cf. بسنده sufficient, complete; — 998 zwerghaft, پست low, humble; — 999 gerade, راست just.

---

[1]) haivâna T. [2]) so T, inas° E. [3]) so E, °daḥ T. [4]) rmo E. [5]) so E, cara° T. [6]) dreisilbig. [7]) zweisilbig. [8]) so E, vemagjo T بی مغز ohne Mark, brainless, giddy, superficial. [9]) so E, pharakhas T. [10]) so E, °veha T. [11]) so E, jararaha T. [12]) so E, viçiyâraḥ T. [13]) so E, syâṭ hameha T. [14]) so E, nikhileshu T. [15]) so E, najîkaṃ T. [16]) so E, vepardaha T بی پرده without veil, open, exposed, hier im Sinne von: ohne (trennenden) Vorhang, ungetrennt. [17]) so E, girdaha T. [18]) so E, vilaṃdaha T بلند high, sublime. [19]) so T, yasta E.

sadâtane tu pâdâra[1]) 1000, pâyaṃdâ[2]) 1001 tu anaçvare[3]) ।
nâjuviṃdahâ[4]) 1002 sthiratare, juviṃdaha[5]) 1003 tu care bhavet ॥ 239 ॥

1000 پادار permanent; — 1001 پاینده firm, solid; — 1002 sehr fest, نادونده; — 1003 beweglich, دونده running a racer.

nyûne kamo 1004, masâvî 1004 tulye[6]), jayâdâ 1005 adhike[7]) bhavet ।
nûtane tu navaḥ[8]) 1006 proktaḥ, komale naramo 1007 bhavet ॥ 240 ॥

1004 کم few, little; — 1005 مساوی equal, equivalent; — 1006 زیاده increase, too much; — 1007 neu, نبا news; — 1008 zart, نرم soft, smooth sleek, gentle.

kaṭhore tu durustaḥ[9]) 1009 syât, purâṇe kohanâ[10]) 1010 smṛitaḥ ।
pratyakshe jâhiraḥ 1011 proktaḥ, âkhiro 1012 'mte prakîrtitaḥ ॥ 241 ॥

1009 درشت rough, hard; — 1010 alt, کهن; — 1011 زاهر shining, lucid, clear, plain, oder ظاهر apparent clear manifest; — 1012 آخر the end, issue, extremity.

avvalas[11]) 1013 tu bhaved âdau[12]), moghe vephâyadâ[13]) 1014 smṛitaḥ ।
postkaṃdaha[14]) 1015 syâd ativyakte, sngupte poçîdaha[15]) 1016 smṛitaḥ ॥ 242 ॥

1013 erst, اول; — 1014 vergeblich, بی فائده without profit, gain, utility; — 1015 ? überaus deutlich cf. پوست کندن to flea, pellem detrahere; eig. also wohl: „einer, dem die Haut abgezogen ist", und hieraus hat sich, wie es scheint, die Bed.: blofs, klar, deutlich entwickelt!; — 1016 پوشیده concealed, covered.

ekâkî tanahâ 1017 proktaḥ, sarvage[16]) haṃravaḥ[17]) 1018 smṛitaḥ ।
jiddaḥ[18]) 1019 syât pratikûleshu, vâphikas[19]) 1020 tadviparyaye ॥ 243 ॥

1017 einzeln, تنها; — 1018 ? überall hin gehend, همرو a fellow traveller; — 1019 widrig, ضدّ opposite; — 1020 günstig; arab. وافق, Part. Praes. von وفق convenientem, aptum esse.

---

[1]) so E, tu pâyaṃdaha T. [2]) so E, nâpâyaṃdaha T ناپاینده. [3]) tu naçvare ET (für T auch richtig!). [4]) so E, nâjûvaṃdaha T; viersilbig. [5]) so E, juvaṃdaha T; dreisilbig. [6]) so P; tuttu E, blos tu T; der pâda hat só allerdings eine Silbe zu viel! es ist resp. wohl: kaṃ zu lesen. [7]) jayâdâ 'dhike E, jayâdo 'dhike T. [8]) so T, nayaḥ E. [9]) so E, duraçtaḥ T. [10]) so E, °naḥ T. [11]) so T, aüvalas E. [12]) so T, °ved vâdau E. [13]) so E, °daha T. [14]) so T, poskaṃdaha E; dreisilbig. [15]) so ET; dreisilbig. [16]) so T, sarvajne E. [17]) ? haṃkhaḥ ET. [18]) so E, jitvaḥ T. [19]) so E; svâphikas T, mir unklar, denn مواقف events, accidents pafst nicht her.

saṃkîrṇe tu bhavet taṃgas[1]) 1021, tarâçîdaha[2]) 1022 tu muṃdite[3]) ।
saṃsmṛite[4]) dâçudaḥ[5]) 1023 proktaḥ[6]), pharâmoças 1024 tu vismṛite ॥ 244 ॥

1021 voll, gemischt; تنگ narrow, strait; a package, bundle (eig. enggestopft, vollgepfropft); — 1022 rasirt, تراشيده shaved; — 1023 im Gedächtnifs behalten, داشته holden; — 1024 vergessen, فراموش.

âsyûte[7]) syât tu pevaṃdo[8]) 1025, voîdo 1026 ghrâta[9]) ucyate ।
veshṭite girdakardaḥ 1027 syât, tejaḥ 1028 syât tejite tathâ ॥ 245 ॥

1025 angebunden, پيبوند; — 1026 gerochen, بوئيده; — 1027 umhüllt, bekleidet گرد turning, round und كرده made; — 1028 geschärft, تيز.

pakve pokhta 1029 iti khyâtaḥ, çarmiṃdâ[10]) 1030 syâc ca lajjite ।
kophto[11]) 1031 'vacûrṇite jneyo, vâphtâ[12]) 1032 prote nigadyate ॥ 246 ॥

1029 پخته, پوخته cooked; ripe; — 1030 sich schämend, شرمنده; — 1031 zermalmt, كوفته split; — 1032 بافته woven, twisted.

sokhtâ[13]) 1033 syâd agnidagdheshu, çukuphtâ[14]) 1034 hṛishṭa ucyate ।
prâpte rasîdâ[15]) 1035 ity ukto, juçtaç[16]) 1036 câ 'nveshite bhavet ॥ 247 ॥

1033 verbrannt, سوخته; — 1034 (907) شگفته flourishing; — 1035 erlangt, رسيده; — 1036 erwünscht, دوست a friend, a lover.

ârdre taras 1037 tu vikhyâtaḥ, khuçkaḥ[17]) 1038 çushke prakîrtitaṃ ।
syûte dokhta 1039 iti khyâtaḥ, sarvataḥ Pârasîmate ॥ 248 ॥

1037 feucht, تر; — 1038 trocken, خشک; — 1039 دوخت stitshed, sewed.

âmokhta 1040 upadishṭe syât, çanâkhtas 1041 tu[18]) parîkshite[19]) ।
॥ viçeshyanighnaḥ[20]) ॥

1040 gewiesen, آموخته learnt; — 1041 شناخته, known, understood.

---

[1]) so T, bhaved bhaṃgas E. [2]) viersilbig. [3]) so T, maṃdite E. [4]) so E, vismṛite (!) T. [5]) so E, vâçudaha T. [6]) so E, khyâtaḥ T. [7]) so E, athite (gra°!) T. [8]) so E, vepaṃdo T. [9]) so E, jâta T. [10]) so E, daha T. [11]) so T, kopto E. [12]) vâphâ E, vâphtaha T. [13]) so E, °taha T. [14]) so E, çukhuphtada (da für ha!) T. [15]) so E, rasîda T. [16]) so E, justaç T. [17]) so T, çuçkaṃ E; mit çka beginnt das 13te Blatt von H, welches z. Z. nicht mehr vorhanden ist, sich aber, s. oben p. 17, bei Râjendra Lâla Mitra Notices of Sansk. Mss. vol. III, 329 (Calc. 1876), facsimilirt vorfindet; ich bezeichne dasselbe fortab mit R. [18]) so RT, sanâkhtaḥ E. [19]) so T, parîcite R, paricite bhavet E. [20]) so E, °ghnavargaḥ R, iti viçeshyanighnavargaḥ T; durch dies iti wird entschieden, dafs der viçeshyanighna hier schliefst, dies Wort somit nicht als Überschrift zum Folgenden gehört, wozu es an und für sich besser passen würde, s. oben p. 16.

§ 12 (bis v. 256ᵃ) Wörter mit doppelter Bedeutung.

mâhaç 1042 caṃdre ca mâse ca, gurau krayiṇi[1]) muçtarî[2]) 1043 ‖ 249 ‖
siddhâṃte peshaṇe hallo 1044, mehaṛ[3]) 1045 syât karuṇârkayoḥ ।
rûya[4]) 1046 syât kâṅsyamukhayoḥ, kaphaḥ 1047 phene tale kaphe ‖ 250 ‖

1042 (34. 60) ماه 1. moon, 2. month; — 1043 (76) مشتري 1. Jupiter, 2. a buyer; — 1044 (105) حلّ 1. solution, 2. dissolving; — 1045 (18) مهر 1. love, mercy, pity, 2. the sun; — 1046 (871. 838) روی 1. brass, 2. face; — 1047 (778) كف 1. froth, foam, scum, 2. palm of the hand, 3. spittle; letztere Bedeutung, resp. die von: phlegma, Schleim, die das Wort speciell auch im Hind. hat (Shakesp.), ist wohl aus dem Sanskr. herübergenommen, und geht auf sie eventual. wohl auch die erste Bedeutung zurück.

pheraṃgaḥ 1048 kathyate tajjnaiḥ. kushṭha-deçaviçeshayoḥ ।
çâkhas 1049 tu vṛikshaçâkhâyâṃ[5]) paçoḥ çṛiṃge 'pi kathyate ‖ 251 ‖

1048 فرنگ 1. a Frank; 2. in der Bed.: Aussatz liegt das einfache Wort im Pers. nicht vor, s. aber 384; — 1049 (252) شاخ 1. a branch, 2. a horn.

arjaṃ[6]) 1050 vijnâpane vastrapariṇâhe[7]) 'pi kathyate ।[8])
pratyudgame kaṃcuke ca peçavâj[9]) 1051 Pârasîmate ‖ 252 ‖

1050 (422) عرض 1. rendering manifest; 2. breadth, width; — 1051 پیشباز 1. a going out to meet a person of distinction; 2. a kind of garment.

çânâ[10]) 1052 keçaprasâdhinyâṃ bhavec câ 'sthiviçeshayoḥ[11]) ।
nimâjâgrasare[12]) mukhye smârta îmâma[13]) 1053 îritaḥ ‖ 253 ‖

1052 (480) شانه 1. a comb, 2. shoulderblade; — 1053 (494) امام 1. a head, chief, leader in religious matters, 2. any book of instruction. Die Erklärung von: nimâjâgrasara, resp. namâjâ° oder namâjy° aus نماز prayers resp. نمازی a praying person, verdanke ich Hörnle; der Vorbeter spricht die Gebete vor den andern Betern stehend (agresara), die ihrerseits nur die ceremoniellen Bewegungen machen; nimâja, resp. namâja, ist hier vom Autor ebenso unbedenklich in das Sk. recipirt, s. oben p. 23;

---

[1]) so RT, krayîti E. [2]) so RT, mustarî E. [3]) so T, °hara E, °haraḫ R. [4]) so T, rûp S, rûpaṃ E. [5]) çâkhas tu vṛi° khâyâṃ tu R. [6]) so TR, arja E. [7]) parî° R. [8]) so E, kîrttitaḥ T, kîrtyate R. [9]) so TR, peçavâ E. [10]) so E, çânaha T, çânaḫ R. [11]) so E, °shake RT. [12]) so R u. T pr. m., nimmajâ° T sec. m., nismajâpaḥsare (!) E. [13]) so RT, îmâsa E.

wir hatten im Übrigen die beiden hier zusammenstehenden Wörter nimâja und îmâma schon in v. 114 neben einander.

çâyada[1]) 1054 yogye 'numâne ca, kinârâ[2]) 1055 skaṃdhakûlayoḥ[3]) ।
bhaved ard 1056 vâri-vishaye[3]), amal̮ 1057 karmâdhikârayoḥ[4]) ॥ 254 ॥

1054 شايد 1. proper, 2. probability; — 1055 (210) كنارة 1. a side, shore, coast, 2. Nacken (nach Hörnle); — 1056 hiermit weifs ich nichts zu machen; da es zwei Bedeutungen sein sollen, erwartet man: vârivishayayoḥ, was aber das Metrum nicht zuläfst, oder vâri-vishayoḥ, was wieder gegen den saṃdhi verstöfst. Ein Pârasî-Wort ard (oder etwa dard?) sodann, welches 1. Wasser, 2. Bereich, Gelegenheit oder 1. Wasser, 2. Gift bedeutet, liegt nicht vor; man könnte allenfalls etwa an عرض 1. a valley, having villages, water and trees (dás wäre übrigens allein schon etwa: vârivishaya!), 2. an accident, denken, aber es liegt dies Wort doch theils lautlich (wir hatten es soeben erst in 1050, in der Form: arja), theils begrifflich zu fern; — 1057 عمل 1. working, 2. office.

sar̮[5]) 1058 mastake nideçe[6]) syâd, upary-arthe phale ca var̮[7]) 1059 ।
kamar̮[8]) 1060 kaṭau ca caṃdre ca, vâj[9]) 1061 udghâṭa-nivṛittayoḥ ॥ 255 ॥

1058 (747) سر 1. head, 2. سِرّ und سِرّ a secret, mystery (nideça, Befehl); — 1059 بر 1. top summit, 2. (cf. 249) fruit; — 1060 (771) 1. كمر the waist; 2. قمر the moon; — 1061 باز 1. open, 2. back.

ây[10]) 1062 jale ca pratishṭhâyâṃ sarvataḥ Pârasîmate ।

1062 (267) آب 1. water, 2. dignity, rank.

prâyaḥ chaṃdo'nurodhena samyag-uccâraṇâya ca ॥ 256 ॥
çir akâraç[11]) ca çavdâṃte prayuktau yau na tau sthirau[12]) ॥ 257 ॥

„Das mehrfach metri caussa und behufs bequemer Aussprache am Ende der Wörter verwendete *çi*, resp. *a*, sind Beide nicht stetig“ sondern nur aushülfsweise zugefügt. — Unter *çi* kann dem Zusammenhange

[1]) so T, çâyaï (wohl çâyad̲?) R, çâpada E; zweisilbig! [2]) so E, °raha T, °ra R. [3]) bhevad ar̮d vârivi*y*aye R, bhaved darad vârivishaye T, bhaved arada vârivishaye E. [4]) so RT, kârâdhi° E. [5]) so R, çara E, saraṃ T. [6]) so E, nirdiçe RT. [7]) vara R, varu (wohl für var̮) T, vat E. [8]) makar̮ R, kamara TE. [9]) so TR, vâpa (für vâya) E. [10]) so T, âb̮ R, âva E. [11]) so TE, siṃr akâr̮ç ca R, was von Râj. L. M. l. c. p. 330 irrig durch: siṃhakâyaç ca wiedergegeben wird. [12]) so ER, fehlt T.

nach nur *i* verstanden werden. Ich vermuthe, dafs der Autor hier etwas Renommage treibt, nämlich sich des Pâṇinischen *çi*, welches ja freilich etwas ganz Anderes (nämlich das *i* der Neutra im Nom. Acc. Plur.) bedeutet, bedient, um dasselbe hier für einen ganz andern Fall zu verwenden, und damit resp. einen gewissen Abglanz von Kenntnifs eben der Pâṇinischen Terminologie auf sich fallen zu lassen; cf. das oben p. 16 über einen ähnlichen verunglückten Versuch gelehrten Anstrichs Bemerkte.

Was nun aber die in diesem Verse enthaltenen Angaben selbst betrifft, so beschränkt sich zunächst die darin erwähnte Hinzufügung eines finalen *i*, abgesehen von einigen wenigen andern Fällen, z. B. khâhiçi 181, gardani 763, navâdi 975 E, fast ausschliefslich auf die Hinzufügung desselben hinter finalem ة, so z. B. lajjatiḥ 115, asâlatiḥ 176, syâsatiḥ 201, khijmatiḥ 506, sohavatiḥ 527, saltanatiḥ 575, daulatiḥ 576, adâlatiḥ 580 etc.

Weit häufiger ist die Hinzufügung eines finalen *a*, und zwar erscheint dasselbe zunächst eben auch mehrfach hinter ة [1]), so z. B. harakataṃ 47, râhataḥ 204, vilâyataḥ 318, vakâlataḥ 561, vilâyataṃ 568, maslahataḥ 578, jirâyataḥ 682, amânataḥ 820, sûrataḥ 883, vemarataḥ 985 etc. Insbesondere häufig aber erscheint *a* hinzugefügt hinter dem ه occultum, in Bezug worauf denn freilich die Handschriften sehr auseinander gehen und wobei speciell das Metrum mehrfach dafür eintritt, dafs die Hinzufügung des *a* zu Unrecht geschehn ist. Es liegen resp. für die só (auf ه occultum) auslautenden Wörter die folgenden Transscriptionen neben einander, resp. bei demselben Worte, vor: *â* (meist in E), *ah̭* [2]) (meist in H), *âh* (! 74 in E), *aha* (meist in T), *aḥ* (meist in G). Daneben aber erscheint dafür auch, und zwar mehrfach als sec. m. vorgenommene Correctur, *e*, so nakkâr*e* 149 (G), mohar*e* 216 (H), hujar*e* 295 (H sec. m.) und sogar auch *ai*, so hâl*ai* 74 (H sec. m.), guṃc*ai* 328 (G), halk*ai* 312 (H sec. m.), puṃv*ai* 846 (E). Endlich findet sich einmal sogar auch: *ahaḥ*, in hameç*ahaḥ* 27. — Aufser nach dem ه occultum wird ein *a* auch noch überaus häufig an consonantisch auslautende Wörter angefügt, die dann resp. als auf *aḥ*, resp. *aṃ*, oder auch nur auf *a*, auslautend erscheinen [3]).

[1]) durch *t* allein ist ة z. B. vertreten in sakûna*t* 46 (aber nur in E).

[2]) dieses mit virâma versehene *h* sieht in H wie *hru* aus (s. das Facsimile bei Râjendra L. M.), und in T wie *hṛi*.

[3]) das hierfür in karanphal*e* 440 (H) erscheinende *e* ist wohl nur ein Schreibfehler, dagegen das *e* in naiyar*e* âjama 3 (HTG), mîr*e* adla 540 ist wohl die Idhâfet.

Auch der Pârasîprakâça des Vedâñgarâya hat am Schlufs eine Bemerkung über das am Ende der pada zum Behufe der deutlichen Aussprache hinzugefügte *a*: uccâraṇâya samyag datto 'kâraḥ padasyâ 'ṃte. Von *i* aber erwähnt er nichts. Es mögen hier auch die übrigen daselbst nochfolgenden Interpretations-Regeln ihre Stelle finden: 2. prathamai 'va Pârasîke, saṃskṛitasaṃjnâsu saptamî co 'ktâ, „der Nominativ für die persischen, der Locativ für die Sanskṛit-Wörter"; — 3. api-cau samuccayârthau, tu punaḥ kvacid bhede, „api und ca als Conjunctionen, tu und punaḥ hie und da zur Trennung"; — 4. he ârâghû (oder he âdâthû), mir unklar; verderbter Text; — 5. kadâcid vibhaktilopo, na ca liṃgatâtparyârthaḥ, „hie und da Mangel der Casus-Endung und keine Rücksicht auf das Genus"; — 6. kvâ 'pi na saṃdhir vihito rûpaviçeshaprakâçanârthaṃ, „hie und da Mangel des saṃdhi, um die Form besser hervorzuheben". Diese Angaben passen grossentheils auch hier.

Es folgen nun noch die Unterschriften *a.* des Werkes und *b.* für R[1]) die des Schreibers, für E die des Herausgebers etc.

a. Die Unterschrift des Werkes lautet:

iti çrî[2])mahîmahemdra çrîmad-Akavarasâha[3])viracite[4]) Kṛishṇadâsakṛite[5]) Pârasî[6])prakâçe çabdârthakoshaprakaraṇaṃ[7]).

Die hier in RT vorliegende Bezeichnung des Vfs. als vihâriKṛishṇadâsa ist in dieser Form nicht recht klar. Was sollte etwa vihârin hierbei bedeuten?[8]) Es liegt näher, darin vielmehr vihârî, resp. Bihârî (aus Bihâr stammend?) zu sehen, das wir im Namen des berühmten Hindi-Dichter Bihârî Lâl (about the beginning of the 16th cent.) sowie in dem des RâjaBihari Mall, der als Schwiegervaters Kaiser Akbar's der mütterliche Grofsvater Jehângîr's war, vorfinden. — Nach einer Mittheilung Hörnle's gab es resp. der Tradition zufolge ungefähr zur Zeit Akbars eine Achtzahl von grofsen Dichtern, ashṭâchap genannt, unter denen auch ein Kṛishṇadâsa war, der unter dem Namen Pay Ahâri bekannt ist.

[1]) d. i. H; T hat nichts der Art, und G bricht früher ab.

[2]) so E, fehlt R, çrîman T. [3]) so E, çâha T, çâhi R. [4]) so ER, kârite T. [5]) so E, vihâriKṛi° RT. [6]) Pârasîka R. [7]) so E, °koçaprak° T, °koçaprasâraṇam iti R.

[8]) freilich findet sich dies Wort in älteren Namen z. B. in dem Namen des Vihârisiṅha wirklich vor, s. Pet. W.

b. Die Unterschriften von R (H) und E.

1. R (H): Bhagavânamiçrair alekhi saṃvat 1666 [AD 1610] samaya çrâvaṇa çukla 8 çukravâsare. Die Handschrift ist hiernach nur etwa 30 Jahre[1]) nach der Abfassung geschrieben. Die in ihr, resp. weiter auch in TG vorliegende Recension hat somit von vornherein den Anspruch auf gröſsere Originalität als E, für dessen Grundlagen ein Datum nicht bekannt ist, und es erscheinen denn auch die darin vorliegenden Lesarten denen von E gegenüber vielfach als die besseren, resp. eventuell älteren. Andrerseits fällt es aber doch schwer, alle die in E (zum Theil in Gemeinschaft mit G) enthaltenden Verse, welche HT nicht kennen, als secundäre Zuthaten zu erachten[2]). Auch liegt hie und da doch auch gerade in E die bessere Lesart vor; so z. B. gleich in v. 1 bei 'lâmannûro; und auch der Mangel des Wortes deva in v. 2 macht einen guten Eindruck. Das gänzliche Fehlen der einleitenden 7 Verse bei E möchte ich dadurch erklären, daſs darin eine so zu sagen officielle, speciell für die Mudgala und ihren Adel bestimmte Recension zu erkennen ist, wofür ja u. A. auch die besondere Rücksicht auf die Ausrüstung des Pferdes in v. 143–149 eintritt, während der Text von HTG theils durch die 5 ersten einleitenden Verse, theils eben durch das Fehlen der v. 143–149 als eine gewissermaſsen brahmanische, für die Inder bestimmte Recension markirt, resp. aufzufassen, wäre.

2. Die Angaben in E über Herausgabe, Druck etc. lauten wie folgt:
çâstrajnena Gaṇeçena mânamaṃdiravâsinâ ı
lavdhaṃ mahattarâd yatnâd idaṃ Phârsîprakâçakaṃ ıı 1 ıı

Die groſse Mühe, die sich hiernach Ehren-Gaṇeça um die Herbeischaffung des Werkchens gegeben hat, ist insofern befremdlich, als sich dem Katalog im Paṇdit zufolge auf der Universitätsbibliothek (vidyâmandirasarasvatîbhavane) von Benares ein Exemplar desselben befindet (s. Ind. Streifen 3, 238. 239), wie denn ja auch TG direct dâhin gehören (sie tragen den Stempel: „Sûn. Coll. Bunarus"). Die Sternwarte aber

[1]) Kaiser Akbar reg. 1556—1605. Da nun kein bestimmtes Datum vorliegt, in welches Jahr seiner Regierung die Abfassung des Pârasîpr. fällt, so bleibt zunächst nichts übrig, als dieselbe auf gut Glück in die Mitte derselben zu verlegen, also um 1580.

[2]) bei v. 104—109 macht dies freilich keine Schwierigkeit, ihr Inhalt findet sich im Wesentlichen in v. 171 fg. vor.

(mânamaṃdiram (cf. Ind. Streif. 3, 231. 2, 370), die der Herausgeber als seine Wohnung angiebt, ist der Universität doch wohl nahe genug, dafs er die dortige Mss. hätte benutzen können!

çâstyâ Gokulacaṃdrasya çrîman Nâlâlaçarmaṇâ ।
yatnân mudrâm ayaṃ prâpi çilâvarṇaiḥ suçodhitaḥ ॥ 2 ॥

mânamaṃdirasaṃnidhau Vârâṇasîsaṃskṛitayantrâlaye mudrito 'yaṃ saṃvat 1923 । mitîkvâra(?) su dî 15 maṃgala । çrîJyotiḥsvarûpaParamahaṅsodâsi pariçodhitaḥ ।

Es erübrigt noch, die G allein eignen Verse aufzuführen; leider ist G sehr verderbt, sodafs die Lesarten darin hie und da allem Verständnifs spotten:

1) zwischen 13*c* und *d* (in G resp. als 21 und 23 gezählt) finden sich darin nach: sipehara 1. samâ 2. tathâ (s. oben p. 27 n. 8) noch folgende Angaben:

gacdûma 3[1])-phalakau 4 cai 'va anye[2]) 'py âkâçavâcinaḥ ॥ 21 ॥
maççarakkaḥ 5 çaraṃkvaç 6 ca pûrvadigvâcinau smṛitau ।
jûnavo 7 dakshiṇe[3]) proktaḥ çamâlaç 8 co 'ttare smṛitaḥ ॥ 22 ॥
magarevo 9 garevaç 10 ca *prâcîkâ*(!)vâcinau smṛitau ।
jâniva[4]) 11 sitau(?) tu soyaç 12 ca [diçâsu tarapho bhavet ॥ 23 ॥

3? كژدم the sign scorpion, hier als Bezeichnung des ganzen Zodiacus, resp. des Äthers, Himmels selbst, gebraucht! auch die tenuis in gaca° ist auffällig; — 4 فلك heaven, sky; — 5 مَشْرِق the east; — 6 شَرْق rising; — 7 جَنُوب south; — 8 شمال north; — 9 مَغْرِب west; — 10 غَرب desgl.; statt prâcîka ist: pratîcî zu lesen!; — 11 جانب a part, side; statt sitau ist etwa: sthitau, Situation, Lage zu lesen?; — 12 سُوى a side, part, quarter.

2) zwischen 84*a* und *b*:

*sh*usuraḥ[5]) 13 çvasure, çyâl*ai* vuraḥ 14 *sh*vasura 15 ity api ।
shaṇci(?) 16 *sh*oçadâmanaç 17 ca çvastrîcame(?) prakîrtitaḥ ॥ 95 ॥

13 خُسُر father-in-law; — 14 Schwager; das pers. Wort fehlt mir, denn بُر observing truth and fidelity (nb. als Abstractum!) pafst doch nicht recht

[1]) gacadûmaḥ Cod. [2]) ohne saṃdhi. [3]) dâksh° Cod. [4]) zweisilbig! [5]) raḥ pro Cod.

her; — 15 Schwager, خوسره khûsra a husband's or wife's brother; — 16 mir unklar; — 17 خوشدامن, Schwiegermutter; die Sanskṛit-Erklärung ist mir unklar; es mufs çvaçrû, resp. etwa çvaçurastrî(?), darin stecken.

3) zwischen 183 und 184:

papâsîvâvidîpu*ns*â (*ns* unsicher) kâtiphaḥ kathitas tathâ || 184 ||

Der Eingang ist ganz unklar, ich verzichte daher auf einen Erklärungsversuch; kâtipha ist offenbar كتف shoulder, shoulderblad; sollte dem etwa: aṅsa vorhergehen?

Die nachstehenden drei Indices schliefsen sich zunächst an E an, sind resp. danach gemacht und zwar zu einer Zeit, wo mir HTG noch nicht zugänglich waren[1]). Es ist daher wohl möglich, dafs sich darin, in der Schreibung der Wörter sowohl wie in dem Zählen derselben, allerhand Mängel erhalten haben, die mir bei der später erfolgten Revision entgangen sind. Ich bitte dies mit der grofsen Umständlichkeit einer solchen Revision zu entschuldigen. Die Remedur liegt ja stets so nahe, dafs die etwaigen dgl. Defecte sich mit leichter Mühe erkennen, resp. beseitigen lassen; * bezeichnet, dafs das Wort noch zu irgend welche Bedenken Anlafs giebt, resp. dafs es entweder só, oder doch in dér Bedeutung, anderweit noch nicht vorliegt.

[1]) aus gleichem Grunde sind auf pagg. 15. 16, die vorher bereits abgedruckt waren, einige Zahlen zu ändern. Es ist nämlich zu lesen: pag. 15 Z. 18 werden 1063[1]) persische Wörter; — Note [2]: bedacht, s. 74. 186. 273. 274. 311. 312. ... 546. 620–23 ... 746. 859. 898. 899. 936. 1039. 1048–53. 1062. ... ..Verbosität vor, s. 274. (276?). 409. 898. 899(?). 936; — pag. 16, 21: (im Ganzen 21, von denen 16; — in der letzten Zeile: s. 1049). 442. 521. 587; — zu dem über viçeshyanighna Bemerkten s. pag. 66 n. 1 und pag. 72 n. 20.

[1]) das letzte Wort trägt die Zahl 1062; aber die Zahl 499 ist doppelt vertreten, durch 499 und 499a.

Index I.

âvahayâta آب حيات pîyûsha 12
âvareçamî ابريشمی paṭṭaje (vashe) 415
âvâja آواز çabda 113
âviçtana آبستان garbhe 361
âçika اشق vyasanârthaka 960
âsâna آسان âpannâçe 644
âsti آستی saṃdhau 572
âsmânaṃ آسمان vyomani 52
âhanaṃ آهن lohe 837
âhû آهو mṛige 255
ijâraḥ (ej°) ازار adho'ṅçuke 435
inasâna انسان manuja 977
*inkalaṃ hasantyâm 705
imâma (s. î°) امام upadeshṭari 494
imtilâ امتلا ajîrṇe 739
iyâla s. ayâla
ilâj(yal°)a علاج cikitsâ 374
ilâhî الاهي devatâ 5
ilmâsa الماس hîrake 828
ivlîsa ابليس asura 7
istâdanaṃ استادن sthiti 508
isma اسم nâmni 135
îmâma امام 1. nimâjâgrasara mukhya, 2. smârta 1053
umacîlama امچلم meṭhikâ 611
umaradarâja عمر دراز âyushmant 902
umarâ امراء mukhye 570
*urjaya (yu°) daṇḍe 582 G
ursa عرس çrâddhe 499
*ulça (uçla) وصل phelâ 736
ustukhâṃ استخوان asthi 795
ûda (yû°, jû°) عود agurau 445
*ekâṃgî palâçake 472
ekhalâsa اخلاص snehe 178
elaka الكى câlanî 893
aurati عورت dharmapatnî 347
*kaïsakhun (?) 949 HT
*kacikâpujî كچپچ tad(= pedâraka)yukte 615
kaje كجى anṛite 967
kajdum كژدم vṛiçcika 265
kataraha قطره vindau 209
katâr قطار çreṇi 325
kadakhudâ كدخدا gṛihasthe 558
kadakhudâi كدخدائى vivâhe 526
kanâta قنات pratisîrâ 434
kandaṃ كند suguḍa 722
kapha كف tale 778, phene tale kaphe 1047
kaphaçadoja كفش دوز carmakâra 860
kaphta كفت skandha 765
kama كم nyûne 1004
kamara كمر kaṭau 770. 1061
— قمر candre 1061
kamarvaṃda كمربند yat kaṭau 431
kamarvasta كمر بسته desgl. 431 G
kamânaṃ كمان çârṅge 646
kamândâra كماندار dhanurdhara 638
kayâmata قيامة pralaye 89
kayâsa قياس tarke 102
kara كر vadhire 373
— s. kera
karapâsa كرپاس sâmânye (vastre) 416
karanphala قرنفل lavaṃge 440
karjaṃ قرض ṛiṇe 683
karjakhâha قرض خواه kusîdake 684
karda كرد çastre 657
kalama قلم lekhanî 919
kalamâ كلام mûlamantre 495
kalâna كلان agraje 368
kavaka قوق cakorake 336
kavaja قبضه tsarau 654
kavâva كباب bharjite 724
kavûtara كبوتر kapote 285
kavûlam قبول aṃgîkâre 106
kaçapha كشف kachape 223
kashûpha (kus°) كسوف sûryaparvaṇi 72
kasama قسم çapathe 138
kasavâ قصبه madhyame pure 289
kâtipha G v. 181 (s. p. 79)
kâtiva كاتب lekhake 489. 557 G
kâna كان khanau 323
kâṃdhî كاندها skaṃdhâṃvare 619
kâphira كافر ghanasâre 444
kâma كام tâlau 756
kâmila كامل mahant 518
kârakhânaha كارخانه çilpaveçmani 298
kârada كارد çastre 656
kâhala كاهل alase 877

kinâra کنار kûle 210
kinârâ کناره 1. skaṃdhe, 2. kûle 1055
kimâravâja قمارباز dyûtakâre 888
kiroha (kur°) کروه kroçe 321
kilaa قلعه gaḍhe 566
kilîda کلید lohakuṃcyâṃ 311
kiçtî کشتی naukâ 219
kiçnîjaṃ کشنیج kustumvarau 466
— — dhânyake 716
kîmati قیمة mûlye 814
kuṃjiçka کنجشک caṭake 286
kuṃjeda کنجد tila 693
kutba خطبه râjyâraṃbhâbhisheke 660
kutuva قطب dhruve 68
kuphalaṃ قفل tad(= lohaveṇî)argale 310
kuroha s. kir°
kulâga کلاغ kâke 284
kulâla کلال kuṃbhakâre 851
kulokha کلوخ loshṭe 686
kullaha کله çriñge gireḥ 241
kuçtanaṃ کشتن mâraṇe 676
kusa کس bhage 791
kusûpha s. kash°
kustanî کشتنی vadhye 966
kûca کوچه prasthâne 661
kûjâ کوزه kumbhe 707
kûna s. kona.
kera (kara) کیر bhage 789
koca قوچ mesha 272 HTG
kona (kûna) کن gude 793
kopta کوفته avacûrṇite 1031
kora کور andhe 390
koçâ کوشه koṭau 647
koha کوه girau 243
kohana کهن purâṇa 1010
khaṃda خند hâse 154
khaṃdaka خندک parikhâ 230
khamayâjaha خمیازه jṛimbhâ 189
khamâra خمار çauṃḍike 867
khayânâ خزانه koçasaṃcaye 565
khara خر gardabhe 260
kharakharâ خرخرا açvakaṃḍûyane lohe 623
kharagoça خرگوش çaçake 259
kharamana خرمن khale 687
kharâtîn خراطین kaṃcule (kiṃ°) 198
kharîda خرید kraye 821
kharîdâra خریدار krayin 818
khalâsa خلاص mukta 531
khalâsî خلاصی mukti 530
khavara خبر kiṃvadantî 130
khasûpha (khu°) خسوف candraparvaṇi 73
khasmanâka خسمناک krodhane 953
khâka خاک mṛidi 317
khâdima خادم paricârake 488
khâna خان gṛihe 296
— — Yavanânâṃ prabhu 546
khâmoça خاموش muni 520, tûshṇîka 955
khâmoçî خاموشی mauna 509
khâyâ خایه aṃḍakoçayoḥ 785
khârajî خارجی kshatavrate 528
khârishaṃ خارش kaṃḍûshu rasakeshu 385
khâva خواب nidrâyâṃ 192
khâhiçi خواهش kârye kâma 181
khijmati خدمة çuçrûshâ 506
khirada خرد vuddhau 100
khirsa خرس ṛikshe 331
khudâya خدای parameçvara 9
khudî خودی ahaṃkâre 159
khurûj خروج udaye 532
khurjînaṃ خرجین syûte 697
khurda خرد anuja 369
khurdanî خوردنی âhâre 735
khuçahâlî خوش حالی ânaṃde 92
khushkapulâva خشک پلاو bhakte 729
khusura خسر çvaçura G v. 95 (s. p. 78)
khusûpha s. khas° 73
khûnaṃ خون çoṇite 397
khûnî خونی ghâtake 969
khûka خوک sûkare 330
khogîra s. khva°
khojasarâya خواجه سرای shaṃḍhe 551
khoçadâmana خوشدامن G v. 95 (p. 78)
khoçâ خوشه sasyamañjarî 694
khvagîra خوگیر jayanâdhâre 606
khvasura خوسر çyâla G v. 95 (p. 78)
khvâjâ خواجه vyutpannamânave 496
khvâhara خواهر bhaginî 357

gacadûma كژدم âkâça G v. 21 (p. 78)
gajaduma كژدم vriçcike 265
gajav غضب rushi 175
gamja گنج pattane 290
gadâ گدا yâcake 973
gadâyî گدائی yâcnâ 502
*gaddî غدی (mesh)asya patnî 273
ganduma گندم godhûme 691
gama غم çoke 173
garaja غرض manorathe 179
garam گرم ushne 83
garânî گرانی durbhikshe 801
garamâ گرما ushnakâle 49
gareva غرب Westen G v. 23 (s. p. 78)
garkâva غرقاب gambhîre 'mbhasi 221
garda گرد dhûlau 663
gardani گردن grîvâ 761
gardîdanam گردیدن aṭâṭyâ 507
gallavân گله بان câre 740
gavgava غبغب tad(= hanu)adhaḥ 762
gâphilî غافل pramâde 185
gâvam گاو gavi 270
gâvameça گاومیش mahishî 279
girâ گران mahârghe 804
girimdaha گیرنده grihayâlu 945
giriphtâra گرفتار paratantra 930
giriyaha گریه rudite 190
*girdakarda گردکرده veshṭite 1027
girdaphilphila گردفلفل marice 712
girdâ گرده vartule 996
gila گل kardame 212
gîvati غیبة nimdâ 144
gumga گنگ mûke 916
gujaçta گذشته atîta 40
gujâ گز kumte 659
gumcâ غنچه korake phulle 328
gunâha گناه pâpe 90
— — aparâdhe 588
gum گم amtardhi 59
gurasanagî گرسنگی kshudhâ 805
*gurumva گرنب vacâ 467
gurusan گرسن kshudhite 935
gurûva غروب aste 533

gureja گریز palâyane 668
gurvâ گربه viḍâla 282
gulam گل pushpe 247
— — nâgakesare 470
gulâma غلام dâsa 876
gulû گلو kamṭhe 764
gusalam غسل snâne 437
guha گوه male 401
gogirda گوگرد gamdhake 842
goyandaha گوینده gâyane 870
goyâ گویا vaktari 948
goça گوش karna 752
goçavârâ گوشواره kundale 408
goçtam گوشت mâmse 725
gostam — — 396
gospanda گوسفند pucchopalakshito (meshaḥ) 274
gauga غوغاء kolâhale 148
gausâla گوساله vatsa 742
gvauka غوک bheke 226
cakara (cokk°) چکره palvale 217
cadarî (câd°) چادر nivâse 424
capa چپ vâme 405
carma چرم carmani 525
casma چسم vîkshane 750
cahâracova چهارچوب catushṭaye 308
cahârapâî چهارپا mamce 475
câka چاک unmanas 908
câdarî s. cad°
câra für cahâra 308 G. 475 G
câra dîvârî (dev°) چار دیواری vapre 293
câvukam چابک kaçâ 625
câha چاه kûpe 228
cirakinam چرکین maline 981
cirâga چراغ dîpa 17
cirkinam چرکین kalushe 220
cillâ چله jyâ 648
cula چل kandvâm 380
cokkara s. cakara 217
cova چوب kâshṭhe 325
covakâ چوبک pîtadâru 454
covanâya چوب نای devadâru 452
caupâna چوپان paçucâraka 741

jakhama زخم vraṇe 382
jaṃga زنك vigrahe 574
jaṃgala جنگل çaivale 218, vane 244
jajîraha جزیره amtarîpe 211
jaṃjavîlaṃ زنجبیل nâgare 456
— — çuṃṭhî 715
jadanaṃ زدن prahare 670
jana ظن saṃdehe 103
jana زن striyâm 345
janakha زنخ hanau 761
janava ذنب ketu 71
*janâkha جناح tat(=jayanâdhâra)pakshatî 608
janûva جنوب dakshiṇa G v. 22 (s. p. 78)
jamâda جماد giridhâtu 974
jamâna زمان samaya 26
jamâyata جماعة samûhe 340
jamiçtâna زمستان çîtakâle 36
jamînaṃ زمین bhûmau 237
jamvura زنبور bhramare 334
jayâdâ زیاده adhike 1006
jaranîka زرنیق tâle 843
jarâ جره leçe 997
jarûra ضرور âvaçyake 585
jaragara زرگر svarṇakâre 862
jarkaçî زرکشی sadhâtau (vastre) 417
jarda زرد pîte 127
jardacova زرد چوب haridrâ 453. 717
jardâra زردار dhanike 913
*jarmamâ (?) daṇḍe 582 T
jarpha ظرف pâtre 709
jalâla جلال pratâpe 143 G
jallu زلو jalaukâ 225
javaha (yâv°) یابه pralâpe 145
javâṃ زبان jihvâ 754
javâna (yuv°) جوان yuvatî 349
javâriha جوارح aṃge 810
javâhira جواهر ratna 826
javoja s. jauja
jahara زهر vishe 197
jahârâ زهار vastau 780
jahrâlûda زهرآلود vishâkte 651
jâta زاده jâtau 97
jâdala جادل jigîshau 564
jâdû جادو kârmaṇa 186
jâna جان jîvâtmani 94
jâniva جانب v. 23 (diçi', s. p. 78)
jânû زانو jânudeçe 783
jâṃdâra جاندار prâṇini 96
jâpharâ زعفران kuṃkume 438
jâma(yâ°) جامه kaṃcuke 429
jâya جای sthale 236
jâraja (yâ°, â°) عارض kapola 760 HT
jârova جاروب mârjanî 314
jâsûsa جاسوس care vijne 556
jâhira زاهر (oder ظاهر) pratyakshe 1011
jigara جگر yakṛtpiṇḍe 797
jidda ضد pratikûle 1019
jiṃdagî زندگی jîvane 677
jiṃdân زندان kârâ 673
jiraha زره kaṃcuke 635
jirâyata زراعة kṛshau 612
jiçta زشت vîbhatsa 156
jîna زین paryâṇe 605
jînaha زین pârohaṇe (?) 313
jînapoça زین پوش jayanâṃvare 617
jîraḥ زیره jîrake 711
juâṃ marda جوان مرد udâre 910
judâî جدائی pṛthagâtmani 99
junûn جنون (unmat)tasya bhâva 389
juphta جفت yuge 343
jumukhta زمخت kashâye 117
julma ظلم durnîtau 581
*julmânâ ظلمانه daṃḍe 582
*juvâna kuṃjiçka جوان کنجشک liṃgake (?) 464
juviṃdaha دونده care 1003
juçta دوست anveshite 1036
jûdâ زود çîghre 25
jeradar زیردر adhaḥkâshṭhe 307
jeravaṃda زیربند sûtrapade (°ṭe?) 616
jeva جو yava 688
jogharâtaṃ جغرات dadhi 733
jora زور vale 674
jorâvara زوراور valini 371
jolâhâ جولاهه taṃtuvâya 854
joharâ زهراء çukre 77
johalâ زحل çanaiçcare 78
jauja (javoja) جوز jâtîphale 447. 451
jyâdatî زیادتی atikrame 510

jharokhâ جهروكها gavâkshe 299

taammula تأمّل vicâre 515
*taka طاق kapâṭe 304 HTG
takhtâ تخته kapâṭe 304
tañga تنگ kaçâ 625 G
— — pedârake 614
tanaha تنها ekâkin 1017
tanûra تنور kaṃdu 706
tapa تپ jvare 387
tabaka طبق bhuvaneshu 4
tamâcâ (tav°) تماچا capeṭake 403
tamâma تمام samaste 44, samagre 992
tamâlavarga تمال برگ pattrake 468
tamvû تمبو vastraveçmani 427
tara تر ârdre 1037
tarakaçvaṃda ترکشبند subhaṭe 632
tarakasaṃ ترکش tûṇe 652
tarapha طرف diçâsu 53
tarasaṃ ترس trâse 161
tarâçîdaha تراشیده muṇḍita 1022
talakh تلخ tikte 121
tarkîba ترکیب dehe 808
talavaṃ طلب âhvâne 134
tavajjahaṃ توجع utkaṃṭhâ 183

tavalluda تولّد janmani 95
tavassumaṃ تبسم smite 155
tavâṃcâ, s. tam° 403 H
tasvî تسبیح mâlâ 411
taha ته tale 172

tâûsa طاؤس mayûre 335
**tâka تاق dîpâlaye 18
tâjîma تعظیم âdare 162, abhyutthâne 504
tajîyânaha تازیانه kaçâ 886
târa تار tantau 880
târîkî تاریکی aṃdhakâre 195
tâvistâna تبستان ushṇakâla 38
tâsa باش kalaṃke 64
tiphala طفل vâlake 365
tiphalî طفلی vâlye 364
tila طلا (تله) svarṇe 832
tilakâ تلکی cole 425

tishṇagî تشنگی trishṇâ 805
tîra تیر çare 650
tîraṃdâja تیرانداز dhanurdhara 639
tukhma تخم vîja 250
tunda تنده vegavati 51
turçaṃ ترش amle 122
tulua طلوع udaya 532 T
tuhaphâ تحفه upâyane 593
*tuhṛisa açvâṃvare 618
tûtî طوطی çuke 279
tûda (tod°) تود puṃje 342
tûlaṃ طول dairghye 421
tûvâ طوبی kalpatarau 13
teja تیز tîkshṇe 87, kaṭau 120, vegavant 599, tejite 1028
togâ توغ dhvaje 664
tolâ توله karshe 824
daṃdâṃ دندان rade 755
damâma دمام duṃdubhau 666
darakhta درخت vṛikshe 245
darajî درزی tunnavâye 855
daravân دربان dvârapâla 541
daravâja درواز dvâre 303
daravâra دربار dvâra 303 HTG
daraveça درویش yatau 522
dariyâ دریا samudre 205, jalâçaye 231
darûdgar (durodara) درودگر vardhakau 865
daroga (dur°) دروغ mithyâ 147
*dard (?ard) 1. vâri, 2. vishaya (visa) 1054
darda درد çûla 19
*darma(yugma) درم tal(=pakshati)lagne 609
darrâka درّاک pragalbhe 943
dalîla دلیل dṛishṭâṃte 514
dallaha دله kuṭṭinî 352
davîdanaṃ دویدن dhâvane 600
dasta دست haste 775
dastaha دسته muçale 890
dastâraṃ دستار ushṇîshe 430
dahana دهن mukha 753
*dâncînî دانه چینی kaṃcuke, Cînajâte 442
dânâ دانا jnânayukte 521, nipuṇe 897
dânâyî دانائی tad(=ajnâna)-viparyaye 111

dâniçmanda دانشمند paṇḍite 484
dâma دام jâle 213
dâmâda داماد sutâdhava 358
dâya دايه dâsî 350
dâyara دائره maṃḍale 54
dâracînî دارچينی guḍatvaci 441
*dârasâra دارسار tvaci 469
dârû دارو aushadha 375
dâçuda داشته saṃsmṛite 1023
dirama درم dravya 825, s. darma
dilaṃ دل mânase 98
dilâvara دلاور suhṛidaya (sah°) 896
dilgîra دلگير durmanas 909
dîvâra (dev°) ديوار bhittau 294, s. câradî°
dukâna (dokk°) دکان âpaṇe 291
dukândâra دکاندار paṇyâjîve 815
dukhtara دختر sutâ 355
dujda دزد caure 879
dujdî دزدی steyakarmaṇi 881
dupuçtaṃ دوپشته garbhiṇî 353
duṃ دم puche 257
durusta درست kaṭhore 1009
durogha s. dar°
durodar s. darûdgar
dulamula دلمل tokme 690
duçmana دشمن ripau 554
duçmanî دشمنی vaire 168
dûda دود dhûma 19 G
dûra دور dûre 995
dega ديگ sthâlyâṃ 706
degadâna ديگدان cullyâṃ 705
deva ديو asure 79 HTG
devâna ديوان unmatte 940
devâra s. dîvâra
dokhta دوخت syûte 1039
*doyâtaṃ دوات mashîpâtre 920
dojakhaṃ دوزخ narake 200
dojakhî دوزخی nâraka 202
dosha دوش skandhe 765
dostaṃ دوست mitre 552
daulati دولة râjye 576
nakkâra نقاره paṭahe 149
nakhuda نخود caṇake 692
najaṃ نظم chaṃdovaddhe 929
najara نظر saṃkalpe 101
najûmî نظمی tâṃtrike 559
najdîka نزديک nikaṭe 993
naphîra نفير bheryâṃ 150
namaka نمک lavaṇe 119. 719
namada نمد ûrṇâḍhyam 476
namâja s. ni°
nayâ نيا nûtana 1007
nara نر nari 277
narama نرم komale 1008
navâta نبات matsyaṃḍikâ 721
navâdî نبات bhûruha 975
navâva نباب Yavanânâṃ prabhu 547
nâkhuna ناخن nakha 779
nâja ناز mâne 160
nâjuvimdaha نازونده sthiratara 1002
nâdâna نادان ajne 951
nâdânî نادانی ajnâne 110
nâpâyaṃdaba ناپاينده naçvara 1001 T
nâpha ناف nâbhau 769
nâma نام nâmni 136
nâmarda نامرد napuṅsake 362
— — kâtare 944
nâya نای kaṃṭhe 759
nâla نعل pâdatrâṇe lohakṛite 621
nimâja (na°) نماز saṃdhyâ 493
niyâjmaṃda نيازمند abhivâdake 954 (s. 517)
niçânâ نشان lakshye 649
niçîmanam نشيمن âsane 433
nîlopharaṃ نيلوفر padme 232
*nukataha (nuku°) نکته, نقطه mâtrâ 923
nukraha نقره rûpye 833
nutphâ نطف çukre 395
*nûrânî نورانی devatâ 6
*nekaakla نيک عقل sumatau 964
nekanâmî نيکنامی yaçasi 142
*nekîkâra نيکی کر sukṛitin 894
neja نيز çalye 658
naiyara âjama نير اعظم sûrye 3
nairû نيرو kurvataḥ 675
nyâjavaṃdî نيازمندی abhivâdane 517 (s. 956)

bahasa بحث vivâde 137
makara مکر kapaṭe 184
makhadûma مخدوم karmopadeshṭâ 550
magareva مغر G v. 23 (West, s. p. 78)
magasa مگس makshikâ 333
*magasadân مگسدان netrâvaraṇasûtreshu 620
majdûra (jû°) مزدور bhṛitibhuj 873
majnûna مجنون unmatte 388
majlisa مجلس sabhâ 497
majlisî مجلسی sabhya 498
mançilam منسل çilâ 850
marag مرگ mṛitau 392
maraja مرض vyâdhau 376
maravârîda مروارید muktâ 829
marda مرد puṅsi 344
mardânagî مردانگی çaurye 667
mardânâ مردانه çûra 631

mavajjaha موجه yukte 586
maçahûra مشهور khyâte 912
maçvaratam مشاوره mantre 578 T
maççarakka مشرق pûrvadiç G v. 27 (p. 78)
mashûrahi مشوره mantre 578 G
mashmalakâ مشمل râmkava 420
masâvî مساوی tulye 1005
maskâ مسکه navanîta 732
masta مست matte 941
maslahata مصلحة mantre 578
mahakam محک nikashe 887
mahatâva مهتاب camdrikâ 63

maharrama محرم narâ aṃtaracârakâḥ 555
mahavûva محبوب sundare 978
mahala محل harmya 300
mâdara مادر mâtari 356
mâdâ ماده strîshu 278
mâya مایه mûladhane 816
mâra مار sarpe 196
mârgîra مارگیر vyâlagrâhiṇi 199
mâha ماه mâsa 34, candra 60, beides 1042
mâhî ماهی matsye 222
mijagâ مژگان netrapakshatau 759
miyân میان tadaṃtare 235
— — kaṭau 770 G

mirajâ میرزا mîrâtmaje 544
mirîkha مریخ maṅgale 79
misam مس tâmre 834
misagara مسگر tâmrakuṭṭaka 863
misarah مصراع pade 928
mihamâna مهمان atithi 503

*mîyâm مئین (?) Yavanottame 548
mîra میر mukhya-Mudgale 543
mîreadla میرعدل prâḍvivâke 540

mîrjâna (marj.) مرجان vidrume 831
*mukutaha موقوت mâtrâ 923
mukâma مقام saṃniveçane 662
*mudha موته maṇivandhe 774
muphlisa مفلس daridre 972
murîda مرید mantraçishye 492
murga مرغ khage 267
murdâ مرده mṛitau 671
mulakam ملک râshṭre 567
mulânâ مولانا çâstravettari 905, s. maul°
mulhida (mo°) ملحد pâshaṇḍe 524
muçkilam مشکل âpadi 643
muçtarî مشتری brihaspatau 76
mushka مشک mṛigamade 444
musâphira مسافر pathike 562
mustaada مستعد saṃnaddha 636
mustarî مشتری 1. guru, 2. krayin 1043
mûça موش mûshaka 283
mejamâra معمار sthapati 858 HT
mevarâ میوره âdhâvane 557
mevâ میوه phale 248
mesha میش meshe 272
*meshâ میشی kîleshu 624
mehara مهر karuṇâ 153 1. karuṇâ, 2. arka 1045
meharavân مهربان dayâlau 917
maimûn میمون vânare 281
mojaha موزه anupadînâ 884
moma موم sikthake 848
moya مو keça 794
*mora مور pâçaka 889
molhida s. mu°
mohamîla محمول saṃnaddhe 636 G
mohara مهر çaṅkha 216, mudrâ 413

mobara مبر (?) pâçake 889 HT
mauja موج taramga 208
maujûda موجود siddhavastu 43
maulânâ مولانا âcârya 485
yakîna يقين niçcaye 104
*yaga(yamga)lâgu darvî 892
yakham يخ himasamtatau 67
yalâja s. ilâja
yavraîla جبرئيل Yama 22
yaramvâda زرنباد karcûre 455
yâkûta ياقوت padmarâge 827
yâji يازى pattau 637
yâla s. ayâla, iyâla
yâvaha يابه pralâpe 145
yâvahago ياوه گو 947
yuvâna s. jav°
rakeva رقيب pâdâdhâre 610
rakkâsa رقاص nartake 152
raksa رقص nritye 151
ramgareja رنگريز ramgâjîve 859
ravâha رواح nivâpe 500
ravimdâ رونده bhûcara 270
rasan رسن rajjau 214
rasîdâ رسيده prâpte 1035
râja راز sthapatau 853
râna ران ûrvoh 782
râphajî رافضى avrate 529
râça راس râhau 70
râstam راست satye 146
râsta راست dakshiṇe 404, dakshiṇîyake 901, ṛijau 999
râha راه adhvani 320
râhata راحة sukhe 204
rinda رند dhûrte 970
ristâ رسته tantau 858
rîça ريش çmaçru 793
resmân ريسمان rajjau 214 HTG
*rucâyamdâ priye 980
rubâî رباعى çloke 926
rûya روى mukhamamdale 809
— — 1. kâṅsya (s. 836), 2. mukha 1046
roganam روغن snehe 731
roja روز divase 29
rojagâra روزگار vartane 681
rojâ روزه vrate 513
rodâ روده amtre 795
royî روى kâṅsye 836 (1046)
roçanî mâhî ماهى (oder روشن) روشنى candrikâ 63 G
lagâma لگام khalîne 602
lajjati لذت rase 115
larjaha لرزه kampe 191
lava لب oshṭhe 757
laçkara لشكر vale 569, senâ 633
lâkha لاكه lâkshâ 439
lâgara لاغر durvale 371, kriçe 988
*lâbha sûrye 2 HTG
lâmasaha لامسه sparçe 116
lâycî (lâcî) الايچى 450
lâlûja لالچ lolupe 937
lukmâ لقمة grâse 734
lungî لنگى adhovastre 428
vakâvula بكاول pâkâdhyakshe 700
vakâlata وكالة dûtasya karma 561
vakîla وكيل dûte 560
vakkâla وكال vaṇigjane 680
vakhtara بختر kavace 634
vagala بغل kakshe 785
vaccâ بچه çiçau 339
vajîra وزير mantriṇi 537
vajvâja بزباز jâtipatrî 449
vada بد adharme 980
vadakaula بدقول kadarya 971
vadakla بدعقل dushṭavuddhau 963
vadana بدن tanau 807
vadaphaila بدفعل âtatâyin 965,
vadara بدراه upajâpe 584
vadavoi بد بوى durgamdhe 124
vadasakhuna بد سخن kadvade 949
vadahâla بد حال âpanne 959
vadâmoja بد اموز khale 968
vamdi بندى vaddhe 672
vayata بيت padye 927
vayaddaha بى عداء avyavahite 994
var بر 1. upari, 2. phale 1059
varakam برق saudâminî 58
varag برگ pattrake 246

varadâsta برداشت kshamâ 164
varaha بره çiçus tat(= gospanda)sutaḥ 276
varahna (ve°) برهنه digaṃbara 956
varû برو bhrû 749
varûtaṃ بروت oshṭhakeça 794
varjagara (rjî) برزگر kṛishîvale 685
varphaṃ برف tushâre 66
varsa برص çvitreshu 384
varsâtaṃ برسات jaladâgame 39
valagami بلغمی male 400
valelâ بليله vibhîtake 462
vavâsîra بواسير durnâmni 386
vastâ بسته vaddhe 958
vastanaṃ بستن vaṃdhane 590
*vahava بهو tadvarṇâḥ (?) 276
vahâ بها mûlye 815
vahâra بهار surabhau 37
vâulî باولی vâpyâm 229
vâga باغ ârâme 324
vâgavân باغبان mâlâkâre 852
vâj باز 1. udghâṭa, 2. nivṛitta 1061
vâjâra بازار haṭṭe 292
*vâjî باج (?) vaṃdane und samarthane 587
— بازی kautuke 188, sarveṃdrajâlake 871
vâjîgara بازیگر mâyike 868
vâjû بازو tiryakkâshṭhadvayaṃ 305 — tat(= paksha)âdhâra 338
vâda باد vâta 23
vâdavîjanaṃ باد بيزن vyajane 482
vâḏphiraṃga باد فرنگ kushṭhe 383
vâdiyâ sopha باديان سونف çatapushpâ 465
vâphanda بافند tantuvâyake 854 T
vâphika وافق tad(=pvatikûla)viparyaye 1020
vâphtanaṃ بافتن vâṇau 882
vâphtâ بافته prote 1032
*vâyuvarja بای ورز vyâpârapara 678 G
vâra بار phale 249
vâraṃ بار vṛishṭau 56
vârî باری paryâye 511
vârîkaṃ باريک sûkshma 171, alpe dhvaje 665
vârîdanaṃ باريدن varshaṇe 50
vâla بال pakshe 337
vâlaî بالائی âçlesha 799
vâlâ بالا upari 233
vâlâpoça بالا پوش tûlikâ 476
vâliga بالغ dṛishṭarajasi 348
vâliçtaṃ بالشت upadhâne 473
vâvarcî باورچی sûda 699
vâvarcîkhâna باورچه خانه pâkagṛihe 701
viniyâjî بی نياز vinîte 939
viraṃja برنج taṃḍule 702, rîtau 835
virâdara برادر bhrâtari 367
vilaṃd بلند ucce 239
— — procca 997 T
vilâyata ولاية deçe 318, râshṭre 568
vilista بلست vitastau 402
visiyâra (viçi°) بسيار pracure 990
vistaraṃ بستر çayyâ 474
vihiçta بهشت svarga 82
vînî بينی nâsâyâm 751
vîmaṃ بيم bhayânaka 158
vîmâra بيمار vyathite 391
vuja بج châge 271
vujaka وزغ ,وزک bheke 226 G
vujurga بزرگ mukhye 516, mahâçaye 895
*vuyvoya بوی بوی ajamodâ 471
*vura çyâle G v. 95 (s. p. 78)
vurjaṃ برج lagne 55
vuçaṃ بهس tushe 696
vusaṃdâ بسنده procce 997
veadava بی ادب dhṛishṭe 942
veijjata بی عزت abhibhûte 957
vekha بيخ mûle 251
vetâjîmî بی تعظيم anâdare 163
vedilî بی دلی cittavibhrame 177
veparda بی پرده avyavahita 994 T
vephâyadâ بی فائده moghe 1014
vemagja بی مغز asâravastu 985 T
vemarata بی مروة asâravastu 985
verahnâ (va°) برهنه digambare 956
vehâla بی حال vihvala 962
vehosa (hû) بيهوش mûrchite 393
vehosî (hû°) بيهوشی mûrchâ 394
vairaka بيرق alpe dhvaje 665

*vaivaphâ بيوفا sidhmani 378
voîda بوئيده ghrâta 1026
voya بوى gaṃdhe 114
voriyâ بوريا kaṭe 698
vosaha بوسه cumvane 800
çakaraṃ شكر çarkarâ 720
çagara (saṃg°) شكر bhramara 334 G
çaguptâ (çuk° suk°) شگفته kusume 329
çaṃgarapham شنگرف hiṃgule 849
çanâsiṃdâ شناسنده parîkshake 904
çamaçera شمشير khaḍge 653
çamâla شمال uttara G v. 22 (s. p. 78)
çamiyâna شميانه vitâne 426
çaraka شرق pûrvadiç G v. 22 (p. 78)
çaragîna s. sarag°
çaram شرم lajjâ 166
çarmindâ شرمنده lajjite 1030
çava شب râtrau 28
çavjî s. sa°
çavahati s. soharati
çahara شهر nagare 288
çâira شاعر kavi 924
çâirî شاعرى kavitâ 925
çâkha شاخ çâkhâ 252 und çṛiñga 1049
çâgirda شاگرد çishya 487
çâdî شادى utsâhe 182
çânâ شانه prasâdhanyâm 480 und asthiviçesha 1052
çâma شام sâyam 31
çâmiyâna s. çam°
çâyada شايد 1. yogye, 2. anumâm 1054
çâla شال râṃkave 418
çâli شالى dhânya 695
çâçaha شاشه mûtre 398
çâha شاه narapatau 538
çâhajâda شاه زاده tad(= çâha)âtmaja 539
çâhançâha شاهنشاه nṛipâdhîçe 536
çikam شكم koshṭhe 768
çikamaprasta شكم پرست kukshimbhari 936
çikâra شكار mṛigayâ 878
çikoha شكوه pratâpe 143
çigâla شگال çṛigâla 262
çipusam سپوسا pûvâsu (?) 728
*çilâvaṃda jigîshau 564 G
çikham سيخ çûlamâûse 723
çîra (s. çera) شير kshîre 726
— — laçuna 727
çîragaram شيرگرم koshṇe 85
çîçâ شيشه kâce 838
çukuphta شگفت hṛishṭe 1034
s. çag°, suk°
çuturam شتر ushṭre 812
çuturavân شتربان ushṭrârohe 628
çubâra s. savârikâ
çurû شروع ârambhe 45
çurpha سرفه kâse 379
çuçka (khu°) خشك çushke 1038
çusta شست dhâvite 423
çustanam شستن dhâvane 436
çûhara, çohara s. shauhara
çera شير vyâghre 254
çaitâna شيطان asura 8
çorvâ شوربا maṇḍe 730
çolah شعله çikhâ 21 H
*çvâlâ جوالا(?) çikhâ 21
*shaṇei G v. 95 (s. p. 78)
shîrîn شيرين madhure 118
shurî شرى nartane 601
shusura s. khusura (p. 78)
shora شور çavda 206
shoçadâmana s. khoça° (p. 78)
shauhara (çûh°, çoh°) شوهر dhave 360
shvasura s. khvasura (p. 78)
*sakakunaṃda شك كننده saṃçayâpannamânasa 899
sakalîta سقلات rallake 477
sakûnat (suk°) سكونت sthira 46
sakhâvatam سخاوة dâne 499
sakhî سخى vadânye 903
sakhunam سخن vacane 131
saga سگ çuni 261
saguphtaha شگفته hṛishṭamânase 909
saṃga سنگ pâshâṇa 302
sangapuçta سنگ پشت kachapa 224
saṃgara (çag°) شكر bhramare 334 HT
saṃginam سنگين gurau 170
saṃjîdâ سنجيده sâvadhâna 933

satara سطر paṃktau 922
sadapha صدف çuktau 215
sanâkhta شناخته paricite 1041
saṃtalaṃ صندل caṃdane 446
sapeda سپید çveta 125
saphara سفر videçe 563
sama سماء vyoman 52 G
saṃpusaṃ سنپوسه pûvâ (?) 728
sayagadakumanda صیقه کننده saṃçayâpanna 899
sayasakakunanda سی شک کننده saṃç° 899
sara سر çirasi 747
— — 1. mastake, 2. nideçe 1058
saragîna (çar°) سرگین 400 HTG
saradara, °dala سردر ûrdhvaṃ (kâshṭhadvayam) 306
saradâra سردار sainike 630, mukhye 984
saramâ سرما çîte 48
sarâya سرای çâkhâpure 288, antaḥpure 301
sarda سرد çîte 84
savârikâ (çubâra) سواری açvârohe 626
savâva صباب puṇya 91
savjaṃ سبز haridvarṇe 128
savjî سبزی çâke 710
sâka ساق jaṃghayoḥ 784
sâjaṃdaha سازنده vâdake 871
sâmân سامان sampattau 642
sâyataṃ ساعت muhûrte 33
sâyara سائر vinîta 597
sâyâ سایه châyâ 253
sâla سال saṃvatsare 88
sâhiva صاحب prabhau 914
sâhivî صاحبی vibhûtau 11, râjye 577
sikâravaṃda شکاربند tat(= meṭhikâ, Sattelknopf)staba 612
sitâyiça ستایش stave 141 HTG
sitârâ ستاره târâsu 75
sitâliṃga شتالنگ gulphe 811
sipara سپر phalake 655
sipehara سپهر vyoman 52 G
siphata صفت stave 141
silâha صلاح nikhilâyudha 645
sînâ سینه urasi 772
sîm-âva سیماب pârade 840
sukuphta, s. çuk°, çag°, sag°
sukhata سوخت bhasman 133
sumbha سنف khure 603
surakhadânaha سرخ دانه guṃjâ 823
surava سرب sîsake 845
surâva سراب mṛigatṛishṇâ 86
surîna سرین nitaṃvayoḥ 781 T
surkha سرخ rakta 129
surkhâv سرخابی rathâṃgake 332
surmaha سرمه çroto'ṃjane(!) 841
sulatâna سلطان tad(pâtaçâha)adhike 535
sulatânati سلطانة râjye 575
suvaha صبح prabhâte 30
suvukaṃ سبک laghau 169
suhana صحن gṛihâṃgaṇe 302
sûpha صوف râṃkava 419
sûrata صورة rûpe 112, putrikâ 884
sûrâkha سوراخ vile 194
setalakh سه تلخ trikaṭau 460
sera سیر satṛiptau 738
serî سیری tṛiptau 737
saiyâda صیاد vyâdha 872
sokhtâ سوخته agnidagdha 1051
sokhata سوخت bhasman 132
sophâ سونف çatapushpâ 465
soya سوی sthiti(?) G v. 23 (s. p. 78)
soyana سوزن sûcî 857
sohavati (çavahati) صحبة rate 527
sohela سهیل kumbhasaṃbhave 69
saugâta سوغات kare 591
saudâ سودا tat(= vyâpârapârâyaṇa)karmaṇi 679
saudâgara سوداگر vyâpârapârâyaṇa 678
syâsati سیاسة yâtanâ 201
syâha سیاه çyâma 126
syâhî سیاهی masî 918
*svâphika 1020 T
hajara حجره sarvaçâstrârthakovida 549
hajjâma حجام nâpite 864
hadda حد sîmni 315
hanâ حناء tat(= jayanâdhâra)kâsake 607
haphta هفت saptarshi 81

hama هم nikhila 991
*hamajavâ همجبان amâtya 571
hamajolî همجولى vayasye 553
hameçaha هميشه saṃtate 27
hamrava همرو sarvaga 1018
hamvâra هموار same 240
hammâla حمال bhâravâhe 876
hayâ حياء lajjâ 165
harakataṃ حركة cala 47
harapha حرف akshara 921
harama حرم bhoginî 346
haripha حريف lobhavanta 38
harîsa حريش lobhavant 938 HT
halakâ حلكاء veṇînivaṃdhakoṃṭâ(?) 312
halelâ هليله harîtakî 461
hulkâ حلقه kuṇḍale 409

hallaṃ حلّ siddhâṃta 105 u. peshaṇa 1044
havanaṃ هاون ulûkhale 891

*haçthi هتهى çilye(?) 622
hasad حسد asûyâ 167
hâla حال vartamâne 42
hâlâh هاله paridhau 74
*hima sâhase 583 G
hilâla هلال kalâ 61
hukkâ حقه saṃpuṭe 479
hukma حكمة çâsane 589
hujarâ حجرة guphâ(?) 295
hunara هنر vijnâne 107
husnaṃ حسن bhâsu 65
hejima, hejuma هيزم iṃdhane 326 HTG
hema هيمة iṃdhane 326
hevâna حيوان tiryakshu 976

haivâ حوّى (Manu's) gṛiheçvarî 745
haivân حيوان paçau 266
hauja حوض pushkariṇî 227

Index II.

آهن âhanaṃ, lohe 837
آهنگر ahangara, lohakâraka 861
آهو âhû, mṛige 255
ايال ayâla, skaṃdhakeça 604
آينه âîna (âyana), darpaṇe 481
آينده âyanda, bhavishyati 41
*باج, باژ vâjî, vaṃdane u. samarthane 587
باد vâda, vâte 23
بادبيزن vâdavîjanaṃ, vyajane 482
باد فرنگ vâdphiraṃga, kushṭhe 383
باديان سونف vâdiyâ sopha, çatâpushpâ 465
بار vâra, vṛishṭau 56
— — phale 249
بارى vârî, paryâye 511
باريك vârîkaṃ, sûkhme 171
— vârîka, alpe dhvaje 665
باريدن vârîdana, varshaṇe 50
بازار vâjâra, haṭṭe 292
بازو vâjû, tiryakkâshṭhadvayaṃ 305
— — tad(paksha)âdhâre 338
بازى vâjî, kautuke 188
— — sarveṃdrajâlake 869
بازيگر vâjîgara, mâyika 868
باغ vâga, ârâme 324
باغبان vâgavân, mâlâkâra 852
بافته vâphtâ, prote 1032
بافنده vâphaṃda, tantuvâyaka 854 T
بال vâla, pakshe 337
بالا vâlâ, upari 233
بالاپوش vâlâpoça, tûlikâ 478
بالائى vâlaî, âçlesha 799
بالشت vâliçtaṃ, upadhâne 473
بالغ vâligha, dṛishṭarajasi 348
باولى vâulî, vâpî 229
باورچى vâvarcî, sûda 699
باورچى‌خانه vâvarcîkhâna, pâkagṛiha 701
باى‌ورز vâyuvarja, vyâpârapara 678 G
بچ vuja, châga 272
بچه vaccâ, çiçau 339
بحث bahasa, vivâde 137
بد vada, adharme 980
بدآموز vadâmoja, khale 968
بدبوى vadavoî, durgaṃdhe 124
بدحال vadahâla, âpanna 959
بدراه vadarâ(hî), upajâpe 584
بدسخن vadasakhuna, kadvade 949
بدعقل vadaakla, dushṭavuddhau 963
بدفعال vadaphaila, âtatâyin 965
بدقول vadakaula, kadarye 971
بدن vadana, tanau 807
بر var, 1. upari, 2. phale 1060
برادر virâdara, bhrâtari 367
برج vurjaṃ, lagne 55
برداشت varadâsta, kshamâ 164
برزگر varjagara, kṛishîvala 685
برسات varsâtaṃ, jaladâgame 39
برص varsa, çvitreshu 384
برف varphaṃ, tushâre 66
برق varakaṃ, saudâminî 58
برگ varag, pattrake 246
برنج viraṃja, taṃḍule 702
— — rîtau 835
برو varû, bhrû 749
بروت varûtaka, oshṭhakeça 794
بره varaha, çiçus tat(= mesha)sutaḥ 275
برهنه verahanâ, digambare 956
بزباز vajvâja, jâtipatrî 449
بزرگ vujarga, mukhye 516
— — mahâçaye 895
بستر vistaraṃ, çayyâ 474
بستن vastanaṃ, vaṃdhane 590
بسته vastâ, baddhe 958
بسنده vusandâ, procce 97 G
بسيار visiyâra, pracure 990
بغل vagala, kakshe 785
بكاول vakâvula, pâkâdhyakshe 700
بلست vilista, vitastau 402
بلغمى valagami, male 401
بلند viland, ucce 239
— — procca 997
بليله valelâ, vibhîtake 462
بندى vandi, vaddhe 672
بواسير vavâsîra, durṇâmni 386
بوريا voriyâ, kaṭa 698
بوسه vosaha, cuṃvane 800
بوى voya, gaṃdhe 114
*بوى‌بوى voyvoya, ajamodâ 471

بوئیده voîda, ghrâte 1026
بها vahâ, mûlye 814
بهار vahâra, surabhi 37
بهس vuçam, tushe 696
بهشت vihiçta, svarga 82
بهو* vahava, tadvarṇâḥ (?) 276
بی‌ادب veadava, dhṛishṭe 942
بی‌پرده veparda, avyavahita 994 T
بیت vayata, padya 927
بی‌حال vehâla, vihvala 962
بی‌تعظیم vetâjîmî, anâdare 163
بیخ vekha, mûle 251
بیدلی vedilî, cittavibhrame 177
بیرق vairaka, alpe dhvaje 665
بیزن s. بادبیزن
بی‌عداء vayaddaha, avyavahite 994
بی‌عزت veijjata, abhibhûte 957
بی‌فائده vephâyadâ, moghe 1014
بیم vîmaṃ, bhayânake 158
بیمار vîmâra, vyathite 391
بی‌مروّة vemarata, asâravastu 985
بی‌مغز vemagja, asâravastu 985 T
بینی vînî, nâsâ 751
بی‌نیاز viniyâjî, vinîte 939
بیوفا* vaivaphâ, sidhmani 379
بیهوش vehosa, mûrchite 393
بیهوشی vehosî, mûrchâ 394
پا pâ, caraṇayoḥ 788
پاپوش pâpoça, upânahi 885
پادار pâdâra, sadâtane 1000
پادشاه pâtaçâha, nṛipe 534
پادشاهی pâtçâhî, vibhûti 10
پارچه pâracâ, vastre 414
پاس pâsha, prahare 32
پاسخ pâsukha, uttare 140
پاشنه pâçnâ, pârshṇi 787
پاک pâka, prayate 523
— — pavitre 982
پاکیزه pâkîjaha, nirmale 983
پایدار pâyaṃdâra, sthire 669
پایگاه pâygâha, açvaçâlâ 297
پاینده pâyaṃdâ, anaçvare 1001
پائین pâyîn, adhaḥ 234
پخته pokhtâ, pakve 1029
— pukhta, dîrghasûtraka 932
پدر padara, janaka 359
پراگنده parâgandâ, maithune (!) 641
پرتردّد purataradduda, udyamaṃ kartâ 898
پرچه parca, khaṃḍe 62
پرحوصل purahausala, çraddhâlu 946
پرخواب purakhvâva, nidrâlau 952
پرسته parasti, pûjâ 505
پرسخن purasakhuna, vâcâle 950
پرسیدن purasîdanaṃ, pṛishṭe 139
پرکار purakâra, sukale 911
پرنده pariṃdâ, khage 268
پروانه paravâna, lekhe 490
پری parî, apsaras 14
پریشان pareçâna, vyâkule 961
پس pasa, paççât 407
پست pasta, vâmane 998
پستان pistâ, stanayoḥ 771
پستی pastî, nimne 238
پسر pisara, putre 354
پشت puçtaṃ, pṛishṭhe 767
پشم paçma, romasu 258
پل pula, setau 319
پلاو s. خشک
پناه panâha, âçraye 573
پنبه puṃvai, tûle 846
پنجر paṃjara, gavâkshe 299 HTG
پوجش* pojiça, pûjâ 505 HTG
پوست postaṃ, tvaci 798
پوست کنده postkandaha, ativyakta 1015
پوشیدنی poçîdanî, parîdhâne 432
پوشیده poçîdaha, sugupte 1016
پهلو pahalû, pârçva 775
پیاله piyâla, pânapâtre 708
پیر pîra, vṛiddhe 366
— — maṃtradâtari 491
پیری pîrî, jarâ 363
پیش peça, agre 406
پیشاب peçâva, mûtra 399
پیشانی peçânî, lalâṭe 748
پیشباز peçavâj, 1. pratyudgame, 2. kaṃcuke 1051

پیشبند peçvamḍa, hṛidi carmaṇi 613
پیشرو peçarava, puraḥsare 640
پیشکش peçkaça, kare 592
پیوند pevamḍa, âsyûta 1025
تابستان tâvitâna, ushṇakâla 38
تاق, تاغ, تاخ tâka, dîpâlaye 18
تار târa, tantau 880
تاریکی târîkî, amdhakâre 195
تازیانه tâjîyânaha, kaçâ 886
تاش tâsa, kalamke 64
تأمل taammula, vicâre 515
تبسم tavassumam, smitam 155
تپ tapa, jvare 387
تحفه tuhaphâ upâyane 593
تخته takhtâ, kapâṭe 304
تخم tukhma, vîja 250
تر tara, ârdre 1037
تراشیده tarâçîdaha, muṇḍita 1022
ترس tarasa, trâse 161
ترش turçam, amle 122
ترکش tarakaçam tûṇe 652
ترکشبند tarakaçvamḍa, subhaṭe 632
ترکیب tarkîba, dehe 808
تسبیح tasvî, mâlâ 411
تشنگی tishnagî, tṛishṇâ 806
تعظیم tâjîma, âdare 162
— — abhyutthâne 504
تلخ talakha, tikte 121
تلکا tilakâ, cole 425
تله tilâ, svarṇe 834
تماچه tamâcâ, capeṭake 403
تمال برگ tamâlavarga, pattrake 468
تمام tamâma, samaste 44
— — samagre 992
تمبو tamvû, vastraveçmani 427
تند tunda, vegavati 51
تنگ tamga, pedârake 614
— — kaçâ 625 G
تنور tanûra, kamḍu 706
تنها tanaha, ekâkin 1017
توجع tavajjaha, utkaṇṭhâ 183
توده tûdâ, pumje 342
توغ togâ, dhvaje 664

تولد tavalluda, janmani 95
توله tolâ, karshe 824
ته taha, tale 172
تیر tîra, çare 650
تیرانداز tîramḍâja, dhanurdhara 639
تیز teja, tîkshṇe 87, kaṭau 120, vegavant 599, tejite 1028
جادل jâdala, jigîshau 564
جادو jâdû, kârmaṇa 186
جاروب jârova, mârjanî 314
جاسوس jâsûsa, care vijne 556
جامه jâmâ, kamcuke 429
جان jâna, jîvâtmani 94
جانب jâniva, sthitau(?) G v. 23 (s. p. 78)
جاندار jâmdâra, prâṇini 96
جای jâya, sthale 236
جبرئیل yavraîla, Yame 22
جدائی judâî, pṛithagâtmani 99
جره jarâ, leçe 997
جزیره jajîra, antarîpe 211
جغرات jogharâtam, dadhni 733
جفت juphta, yuge 344
جگر jigara, yakṛitpiṇḍe 797
جلال jalâla, pratâpe 143 G
جماد jamâda, giridhâtu 974
جماعة jamâyata, samûhe 340
*جناح janâkha, tat(des Sattels)pakshatî 608
جنگ jamga, vigrahe 574
جنگل jamgala, çaivale 218, vane 244
جنوب janûva, dakshiṇa G v. 22 s. p. 78
جنون janûn, (unmat)tasya bhâva 89
جو jeva, yava 688
جوارح javâriha, amge 810
*جوالا çvâlâ, çikhâ 21
جوان javâna, yuvatî 349
جوان کنجشک juvâna kumjiçka, limgake 464
جوان مرد juâmmarda, udâre 910
جواهر javâhira, ratna 826
جواز jauja, jâtîphale 447. 451
جولاهه jolâhâ, tamtuvâyaka 854
جهروکها jharokhâ, gavâkshe 299
چابک câvukam, kaçâ 625
چادر cadarî, nivâse 424

چار دیواری câra dìvârî, vapre 293
چاق câka, unmanasi 908
چاه câha, kûpe 228
چپ capa, vâme 405
چراغ cirâga, dìpa 17
چرکین cirkinaṃ, kalushe 220
— cirakinaṃ, maline 981
چرم carma, carmaṇi 525
جسم casma, vîkshaṇe 750
چکره cakara, palvale 217
*چل cula, kaṃḍvâṃ 380

چلّه cillâ, jyâ 648
چوب cova, kâshṭhe 327
*چوبک covaka, pîtadâru 454
*چوبنای covanâya, devadâru 452
چوپان caupâna, paçucârake 741
*چول cula, kaṇḍvâṃ 380
چهارپا cahârapâî, maṃce 475
*چهارچوب cahâracova, (kâshṭha)catushṭaye 308
چیچک s. 378
حال hâla, vartamâne 42
حجام hajjâma, nâpite 864
حجرة hujarâ, guphâ(?) 295

حدّ hadda, sîmni 315
حرف harapha, akshare 921
حرکة harakataṃ, cala 47
حرم harama, bhoginî 346
حریش harìsa, lobhavati 938 HT
حریف harîpha, lobhavati 938
حسد hasad, asûyâ 167
حسن husnaṃ, bhâsu 65
حضرة hajarata, sarvaguṇasampanna 549
حقه hukka, saṃpuṭe 479
حکمة hukma, çâsane 589

حلّ hallaṃ siddhâṃte 105 u. peshaṇe 1044
حلقه halkâ, kuṃḍale 409
حلکاء halakâ, veṇîvaṃdhakoṃṭâ(?) 312
حمال hamâla, bhâravâhe 874
حناء hanâ, tat(des Sattels)kâsake 607
حیوان haivân, paçau 267. 976
حوض hauja, pushkariṇî 227

حوّی haivâ, (des Manu) gṛiheçvarî 745
حیاء hayâ, lajjâ 165
خادم khâdima, paricârake 488
خارجی khàrajì, kshatavrate 528
خارش khârishaṃ, kaṃḍûshu rasakeshu 385
خاک khâka, mṛidi 317
خاموش khâmoça, muni 520
— — tûshṇîṃ 955
خاموشی khâmoçì, mauna 509
خان khâna, gṛihe 296
— — , Yavanânâṃ prabhu 546
خایه khâya, aṃḍakoçayoḥ 786
خبر khavara, kiṃvadaṃtì 130
خدای khudâya, parameçvara 9
خدمة khijmati, çuçrûshâ 506
خر khara, gardabhe 260
خراطین kharâtîn, kaṃcule (kiṃc°) 198
خرجین khurjînaṃ, syûte 697
خرخرا kharakharâ, açvakaṇḍûyane lohe 623
خرد khirada, vuddhau 100
خرد khurda, anuja 369
خرس khirsa, ṛikshe 331
خرگوش kharagoça, çaça 259
خرمن kharamana, khala 687
*خروج khurûj, udaye 532
خرید kharîda, kraye 821
خریدار kharîdâra, krayin 818
خزانه khayânâ, koçasaṃcaye 565
خسر khusura, çvaçura G v. 95 p. 78
خسوف khusûpha, candraparvaṇi 73
خشک khuçka, çushke 1038
خشکپلاو khushkapulâva, bhakte 729
خشمناک khaçmanàka, krodhane 953
خطبه kutba, râjyâraṃbhâbhisheka 660
خلاص khalâsa, mukta 531
خلاصی khalâsî, mukti 530
خمار khamâra, çauṃḍike 867
خمیازه khamayàjaha, jṛiṃbhâ 189
خند khaṃda, hâse 154
خندک khaṃdaka, parikhâ 230
خواب khâva, nidrâ 192
خواجه khvâjah, vyutpannamânave 496
خواجه‌سرای khojasarâya, shaṃḍha 552

خواهر khvâhara, bhaginî 357
خواهش khâhiçi, kârye kâmaḥ 181
خودی khudî, ahaṃkâre 159
خوسره khvasura, çvâla G v. 95 (s. p. 79)
خوش حالی khuçahâlî, ânaṃde 92
خوش دامن khoçadâmana (socrus) G v. 95 (s. p. 79)
خوشه khoça, sasyamaṃjarî 694
خوک khûka, sûkare 330
خوگیر khvagîra, jayanâdhâre 606
خون khûnaṃ, çoṇite 397
خونی khûnî, ghâtake 969
دارچینی dâracînî, guḍatvac 441
دارسار* dârasâra, tvac 469
دارو dârû, aushadha 375
داشته dâçuda, saṃsmṛite 1023

دالّه dalla, kuṭṭini 352
دام dâma, jâle 213
داماد dâmâda, sutâdhava 358
دانا dânâ, jnânayukta 521, nipuṇe 899

دانائی dânâyî tad(= ajna)viparyaye 111
دانچینی* dânacînî Cînajâte, kaṃcuke 442
دانشمند dâniçmaṃda, paṃḍite 484

داوره dâvara, maṃḍale 54
دایه dâya, dâsî 350
دختر dukhtara, sutâ 354

درّاک darrâka, pragalbhe 943
دربان daravân, dvârapâla 541
دربار daravâra, dvâra 303 HTG
درخت darakhta, vṛikshe 245
درد darda, çûla 19
درزی darajî, tunnavâye 855
درشت durusta, kaṭhore 109
درم darma(yugmakam), tat(= Sattelklappe)-lagne 609
— dirama, dravya 825
درواز daravâja, dvâra 303
درودگر darûdagara, vardhaki 865
دروغ daroga, mithyârtha 147
درویش daraveça, yatau 522
دریا dariyâ, samudre 205, jalâçaye 231

دزد dujada, caure 879
دزدی dujdî, steyakarmaṇi 883
دست dasta, haste 775
دستار dastâraṃ, ushṇîshe 436
دسته dastaha, muçale 890
دشمن duçmana, ripau 554
دشمنی duçmanî, vaire 168
دکان dukâna, âpaṇe 291
دکاندار dukândâra, paṇyâjîve 875
دل dilaṃ, mânase 98
دلاور dilâvara, suhṛidaye 896
دلمل dulamula, tokme 690
دلگیر dilagira, durmanas 909

دلّه dallah, kuṭṭinî 352
دلیل dalîla, dṛishṭâṃte 514
دم dum, puche 257
دمامه damâma, duṃdubhau 666
دندان daṃdâṃ, rade 755
دوپشت dupuçtaṃ, garbhiṇî 359
دوخت dokhta, syûte 1039
دود dûda, dhûma 19 G
دور dûra. dûre 995
دوزخ dojakhaṃ, narake 200
دوزخی dojakhî, nâraka 202
دوست dostaṃ, mitra 552
— juçta, anveshite 1036
دوش dosha, skaṃdhe 765
دولت daulatî, râjye 576
دونده juviṃdaha, care 1003
دویدن davîdanaṃ, dhâvane 600
دهن dahana, mukha 753
دیگ dega, sthâlî 704
دیگدان degadâna, cullî 703
دیو deva, asura 79 HTG
دیوار dîvâra, bhittau 294 (s. 293)
دیوان devâna, unmatta 940
ذنب janava, ketushu 71
راحت râhasa, sukhe 2014
راز râja, sthapatau 853
راس râça, râhau 70
راست râstaṃ, satye 146
— râsta, dakshiṇe 404, dakshiṇîyake 901, ṛijau 999

راقضی râphajî, avrate 529
ران râna, ûru 782
راه râha, adhvani 320
رباعی ruvâî, çloke 926
رچهایندہ* rucayamdâ, priye 979
رستہ ristâ, tantau 858
رسن rasan, rajjau 214
رسیدہ rasîdâ, prâpte 1035
رقاص rakkâsa, nartake 152
رقص raksa, nritye 151
رقیب rakeva, pâdâdhâre 610
رند riṃda, dhûrte 970
رنگریز raṃgareja, raṃgâjîve 859
رواح* ravâha, nivâpe 500
رودہ rodâ, aṃtre 796
روز roja, divase 29
روزگار rojagâra, vartane 681
روزہ rojâ, vrate 513
روشنی ماهی (oder روشن) roçanîmâhî, caṃdrikâ 63 G
روغن roganaṃ, snehe 731
روندہ raviṃdâ, bhûcara 269
روی rûya, mukhamaṇḍale 809
— royî, kâṅsye 836
— rûya, kâṅsyamukhayoḥ 1046
ریش rîça, çmaçru 793
ریشمان resmân, rajjau 214 (HTG, cf. 415)
زادہ jâta, jâtau 97
زانو jânû, jânudeçe 783
زاهر jâhira, pratyakshe 1011
زبان javâṃ, jihvâ 754
زحل johala, çanaiçcare 78
زخم jakhama, vraṇe 382
زدن jadanaṃ, prahare 670
زراعت jirâyata, krishau 682
زرد jarda, pîte 127
زردار jardâra, dhanini 913
زردچوب jardacova, haridrâ 453. 717
زرنباد yaraṃvâda, karcûre 455
زرکشی jarkaçî, sadhâtau (vastre) 417
زرگر jaragara, svarṇakâra 862
زرنیک jaranîka, tâle 843
زرہ jiraha, kaṃcuke 635
زشت jiçta, vîbhatsa 156
زعفران jâpharâ, kuṃkume 438
زلو jallu, jalaukâ 225
زمان jamâna, samaye 26
زمخت jumukhta, kashâye 117
زمستان jamiçtâna, çîtakâle 36
زمین jamînaṃ, bhûmau 237
زن jana, striyâṃ 345
زنبور jaṃvura, bhramare 334
زنخ janakha, hanau 761
زنجبیل jaṃjavîlam, nâgare 456
— — çuṃṭhî 715
زنجیر jaṃjîra, lohaveṇî 309
زندان jiṃdân, kârâ 673
زندگی jiṃdagî, jîvane 677
زود jûda, çîghra 25
زور jora, vale 674
زوراور jorâvara, valin 371
زهار jahârâ, vastau 780
زهر jahara, vishe 197
زهراء joharâ, çukre 77
زهرآلود jahrâluda, vishâkte 651
زیادتی jyâdatî, atikrame 510
زیادہ jayâdâ, adhike 1006
زیربند jeravaṃda, sûtrapade (°ṭe?) 616
زیردر* jeradara, adhaḥkâshṭha 307
زیرہ jîra, jîrake 711
زین jîna, paryâṇe 605
— jînaha, pârohaṇe(?) 313
زین‌پوش jînapoça, jayanâṃvare 617
سازندہ sâjaṃdaha, vâdake 871
ساعت sâyataṃ, muhûrte 33
ساق sâka, jaṃghâ 784
سامان sâmân, saṃpattau 642
سال sâla, saṃvatsare 88

سائر* sâyara, vinîta 597
سایہ sâyâ, châyâ 253
سبز savjaṃ, haridvarṇe 128
سبزی savjî, çâke 710
سبک suvukaṃ, laghau 169
سپر sipara, phalake 655
سپوسا çipusaṃ, pûvâsu(!) 728
سپید sapeda, çveta 125
ستارہ sitârâ, târâ 75

ستایش sîtâyiça, stava 141 HTG
سخاوة sakhâvatam, dâne 499
سخن sakhunam, vacane 131
سخی sakhî, vadânye 903
سر sar, çiras 747
— —, 1. mastake, 2. nideçe 1058
سراب surâva, mrigatrishnikâ 86
سرای sarâya, çâkhâpure 287
— — amtahpure 301
سرب surava, sîsake 845
سرخ surkha, rakte 129
سرخابی surkhâv, rathâmgake 332
سرخدانه surkhadânaha, gumjâ 823
سرد sarda, çîte 84
سردار saradâra, sainike 630, mukhya 984
سردر saradara, ûrdhvam (kâshthadvayam) 306
سرفه surpha, kâse 379
سرگین saragîna, male 400 HTG
سرما saramâ, çîte 48
سرمه surmaha, çroto'mjane 841
سرین surîna, nitamvayoh 781 T
سطر satara, pamktau 922
سفر saphara, videçe 563
سقلات sakalîta, rallake 477
سکونة sakûnat, sthira 46
سگ saga, çuni 261
سلطان sulatâna, tato(pâtçâha) 'dhike 535
سلطانة sultânati, râjye 575
سنبوسه sampusam, pûvâ(!) 728 G
سنجیدة samjîdâ, sâvadhâna 933
سنگ samga, pâshâne 322
سنگ پشت samgapushta, kachapa 224
سنگر samgara, bhramare 334 HT
سنگین samginam, gurau 170
سنف sumbha, khure 603
سواری savârikâ, açvârohe 626
سوخت sokhata u. sukhata, bhasman 132. 133
سوخته sokhtâ, agnidagdha 1033
سودا saudâ, tat(s. 678)karmani 679
سوداگر saudâgara, vyâpârapârâyana 678
سوراخ sûrâkha, vile 194
سوزن soyana, sûcyâm 857
سوغات saugâta, kare 591
سونف sophâ, çatapushpâ 465
سوی soya, sthitau(?) G v. 23 s. p. 78
سه تلخ setalakha, trikatau 460
سهیل sohela, kumbhasambhave 69
سیاسة syâsati, yâtanâ 201
سیاه syâha, çyâma 126
سیاهی syâhî, masî 918
سیخ çîkham, çûlamâmse 723
سیر çîram, laçune 727
سیر sera, satriptau 738
سیری serî, triptau 737
*سی شکی کننده sayasakaknnamda, samçayâpanna 899
سیماب sîmâva, pârade 840
سینه sînâ, urasi 772
شاخ çâkha, 1. çâkhâ, 2. çrimga 252. 1049
شادة çâdî, utsâhe 182
شاشه çâçaha, mûtre 398
شاعر çâira, kavi 924
شاعری çâarî, kavitâ 925
شاگرد çâgirda, çishya 487
شال çâla, râmkave 418
شالی çâlî, dhânya 695
شام çâma, sâyam 31
شانه çânâ, prasâdhanî 480; 1. keçaprasâdhanî, 2. asthiviçesha 1054
شاه çâha, narapati 538
شاهزادة çâhajâda, tad(= çâha)âtmaja 539
شاهنشاة çâhançâha, nripâdhîça 536
شاید çâyada, 1. yogye, 2. anumâne 1055
شب çava, râtrau 28
شتالنگ sitâlimga(çi°), gulpha 811
شتر çuturam, ushtre 812
شتربان çuturavân, ushtrâroha 628
شرق çaraka, pûrvadiç G v. 22 s. p. 78
شرم çaram, lajjâ 166
شرمنده çarmindâ, lajjita 1030
شروع çurû, ârambhe 45
شری shurî, nartane 601
شست çusta, dhâvite 423
شستن çustanam, dhâvane 436
شعلة çolah, çikhâ 21 H

شکار çikâra, mṛigayâ 878
شکاربند sikâravaṃda, tat(Sattelknopf)staba 612
شکر çakaraṃ, çarkarâ 720
— saṃgara (çag°), bhramara 334 HTG
*شک کنندہ saka kunaṃda, saṃçayâpanna 899
شکم çikam̱, koshṭhe 768
شکم پرست çikam prasta, kukshiṃbhari 936
شکوہ çikoha, pratâpe 143
شمال çamâla, uttara G v. 22 s. p. 78
شگال çigâla, çṛigâle 262
شگفته çaguphtâ, kusume 329
— saguphtaha, hṛishṭamânase 909
— çukuphta, hṛishṭa 1034
شمشیر çamaçera, khaḍge 653
شمیانه çamiyâna, vitâne 426
شناخته çanâkhta, paricite 1041
شناسندہ çanâsiṃdâ, parîkshake 904
شنگرف çaṃgarapham, hiṃgule 849
شور shora, çavda 206
شوربا çorvâ, maṇḍe 730
شوهر shauhara, dhave 360
شهر çahara, nagare 289
شیر çera, vyâghre 254
— çîraṃ, kshîre 726
شیرگرم çîragaraṃ, koshṇe 85
شیرین shîrîṇ, madhure 118
شیشه çîçâ, kâce 838
شیطان çaitâna, asura 8
صاحب sâhiva, prabhu 914
صاحبی sâhivî, vibhûti 11, râjya 577
صبح suvaha, prabhâte 30
صحبة sohavati, rate 527
صحن suhana, gṛihâṃgaṇe 302
صدف sadapha, çukti 215
صفت siphata, stava 141
صلاح silâha, nikhilâyudha 645
صندل saṃtalaṃ, caṃdane 446
صواب savâva, puṇya 91
صورة sûrata, rûpe 112, putrikâ 885
صوف sûpha, râṃkava 419
صیاد saiyâda, vyâdha 872
*صیقه کنندہ sayagadakunanda, saṃçayâpanna° 899
ضد jidda, pratikûle 1019
ضرور jarûra, âvaçyake 585
طاق taka, kapâṭe 304 HTG (s. 18?)
طاؤس tâûsa, mayûre 335
طبق tavaka, bhuvana 4
طرف tarapha, diçâ 53
طفل tiphala, bâlaka 365
طفلی tiphalî, bâlya 364
طلا tilâ, svarṇe 832
طلوع tulua, udaya 532 T
طوبی tûvâ, kalpataru 13
طوطی tûtî, çuke 280
طول tûlaṃ, dairghya 421
ظاهر jâhira, pratyaksha 1011
ظرف jarpha, pâtre 709
ظلم julma, durnîti 581
*ظلمان julmâna, daṃḍa 582
ظن jana, saṃdehe 103
عارض ârija (jâ°), kapola 760
عالم âlama (jâ°), jagat 316
عام âma (yâ°), pâmare 875
عامل âmila (yâ°), tâpasa 519
— adhikârin 542
عبیر avîraṃ, paṭavâsake 448
عجب ajav, âçcarye 157
عدالة adâlati, nîti 580
عرس arça (ya°), vimâna 15
— ursa (yu°), çrâddhe 499[a]
عرض arja, pariṇâhe 422; u. vijnâpane 1050
عرق araka, gharme 187
عسل asalaṃ, kshaudre 847
عطسه atsaha (ya°), chikkâ 377
عقل کل akala(ya°)kulla, jnâne 108
علاج ilâja (yal°), cikitsâ 374
عَلَم النور alâmannûra, sûrya 2
عمردراز amaradarâja, âyushmant 902
عمل amal, 1. kârâ, 2. adhikâra 1058
عود ûda (yû°, jû°), aguru 445
عورت aurati (jau°), dharmapatnî 347
غار gâra, garta 242
غافلی gâphilî, pramâde 185

غبغب gavgava, tad(hanû)adhaḥ 762
*غدّى gaddî, tasya (meshasya) patnî 273
غرب gareva West G v. 23 (s. p. 78)
غرض garaja, manoratha 179
غرقاب garkâva, gambhîre 'ṃvuni 221
غروب gurûva, aste 533
غسل gusalaṃ, snâne 437
غضب gajav, rushi 175
غلام gulâma, dâsa 876
غم guma, çoke 173
غنچه guṃcâ, korake phulle 328
غوغا gauga, kolâhale 148
غوک gvauka, bheke 226
غيبة gîvati, niṃdâ 144
*فاعل pâyala, vegavant 598
فاقه phâka, upavâse 512
فاتحه phâtihâ, kâryâdau maṃtrapâṭhe 501
فائده phâyadâ, lâbhe 819
فاحشه phâhiçaha, veçyâ 351
فتح phataha, jaya 579
فتيل phatîla, daçâ 16
فراق pharâka, viçâla 986
فراموش pharâmoça, vismṛita 1024
فربه pharaveha, tuṃdila 372
— pharavaha, sthûlavastu 987
فرنگ pheraṃga, 1. kushṭha, 2. deçaviçesha 1048
— s. بادفرنگ
فروخت pharokta, vikraye 822
فروشنده pharoçaṃdaha, vikrayin 817
فسوس phasosa, paççâttâpe 174
فصل phasala, ṛitu 35
فلاح phalâha, mukti 109
فلفل philaphilaṃ, marice 458
فلک phalaka, âkâça G v. 21 (s. p. 78)
فلفل دراز philphiladarâja, pippalî 459. 713
فلقه phalakâ, nitaṃva 781
فيروزه phirojâ, haritamaṇau 830
فيل phîla, gaje 256. 593
فيلبان phîlavân, hastirohake 629
قبضه kavaja, tsarau 654
قبول kavûlaṃ, aṃgîkâre 106
قرض karjaṃ, ṛiṇe 683
قرضخواه karjakhâha, kusîdake 684
قرنفل karanphala, lavaṃge 440
قسم kasama, çapathe 138
قصبه kasavâ, madhyame pure 290
قطار katâr, çreṇi 325
قطب kutuva, dhruve 68
قطره kataraha, viṃdau 209
قفل kuphalaṃ, tad(= lohaveṇî)argale 309
قلم kalama, lekhanî 919
قلعه kilaa, gaḍhe 566
قمارباز kimâravâja, dyûtakare 888
قمر kamara, caṃdra 1060
قنات kanâtaṃ, pratisîrâ 434
قوچ koca, mesha 272 HTG
قوق kavaka, cakora 336
قياس kayâsa, tarka 102
قيامة kayâmataṃ, pralaye 89
قيمة kîmati, mûlye 813
كاتب kâtiva, lekhake 487. 557 G
كارخانه kârakhânaha, çilpaveçman 298
كارد kârada, çastre 656
كافر kâphira, ghanasâre 444
كام kâma, tâlu 756
كامل kâmila, mahânt 518
كان kâna, khani 323
كاندهى kâṃdhî, skaṃdhâṃvara 619
كاهل kâhala, alasa 877
كباب kavâvaṃ, bharjite 724
كبوتر kavûtara, kapote 285
كتف kâtipha, aṅsa(?) G v. 181 (s. p. 79)
كجى kaje, aṇrite 967
*كچيچ kacikâpujî, tad(pedâraka)yukta 615
كد خدا kadakhudâ, gṛihastha 558
كد خدائى kadakhudâî, vivâha 526
كر kara, vadhira 373
كرد karda, çastre 657
كرپاس karapâsa, sâmânye (vastre) 416
*كرنبا guraṃva, vacâ 467
كروه kiroha, kroçe 321
كژدم gajaduma, vṛiçcike 265
كسوف kusûpha, sûryaparvan 72

کس kusa, bhage 790
کشتن kuçtanaṃ, mâraṇe 676
کشتنی kustanî, vadhya 966
کشتی kiçtî, naukâ 219
کشف kaçapha, kachapa 223
کشنیج kiçnîja, kustuṃvaru 466
— — dhânyaka 716
کفّ kapha, tale 777
— — 1. phena, 2. tala. 3. kapha 1047
کفت kaphta, skaṃdha 766
کفش‌دوز kaphaçadoja, carmakâra 863
کلاغ kulâga, kâka 284
کلال kulâla, kuṃbhakâra 851
کلام kalamâ, mûlamaṃtre 495
کلان kalâna, agraja 368
کلهبان gallavân, câre 740
کلوخ kulokha, loshṭa 686
کلّه kallaha, çriṃge gireḥ 241
کلید kilîda, lohakuṃcî 311
کم kama, nyûne 1004
کمان kamânaṃ, çârṃge 646
کماندار kamândâra, dhanurdhara 638
کمر kamar, kaṭau 770. 1063
کمربند kamaravaṃda, (yat)kaṭau 431
کمر بسته kamarvaçta, desgl. 431 G
کن kûna, kona gude 793
کنار kinâra, kûle 210
کناره kinârâ, 1. skaṃdha, 2. kûla 1055
کنجد kuṃjeda, tila 693
کنجشک kuṃjiçka, caṭaka 286
کند kandaṃ, suguḍa 722
کوچه kûcâ, prasthâna 661
کور kora, aṃdhe 390
کوزه kûjâ, kuṃbhe 707
کوفته kophta, avacûrṇite 1031
کون (s. کن) kûna, kona, gude 791
کوه koha, giri 243
کهن kohana, purâṇa 1010
کیر kera, bhage 789
گازر gâjura, rajake 866
گاو gâvaṃ, gavi 270
گاومیش gâvameça, mahisha 279

گدا gadâ, yâcake 973
گدائی gadâyî, yâcnâ 502
گذشته gujaçta, atîta 40
گران girâ, mahârghe 804
گرانی girânî, durbhikshe 801
گربه gurvâ, viḍâla 282
گرد garda, dhûli 663
*گردکرده girdakarda, veshṭite 1027
گردن gardani, grîvâ 763
گردفلفل gardaphilphila, marice 712
گرده girdâ, vartule 996
گردیدن gardîdanaṃ, aṭâṭyâ 507
گرسنگی gurasanagî, kshudhâ 805
گرسنه gursaṉ, kshudhita 935
گرفتار giriphtâra, paratamtra 930
گرم garaṃ, ushṇe 83
گرما garmâ, ushṇamâtra 49
گرنده girimdaha, gṛihayâlu 945
گریج gureja, palâyane 668
گریه giriyaha, rudite 190
گژ guja, kumte 659
گژدم gajaduna, vṛiçcike 265
— gacaduma, âkâça G v. 21 (s. p. 78)
گل gila, kardame 212
— gulaṃ, pushpe 247, nâgakesare 470
گلو gulû, kaṃṭhe 764
گم gum, antardhi 59
گناه gunâha, pâpe 90, aparâdhe 588
گندم gandum, godhûme 691
گنگ guṃga, mûke 916
گوسال gausâla, vatsa 742
گوسفند gospanda, puchopalakshita (mesha) 274
گوش goça, karṇa 752
گوشت goçtaṃ, mâṅse 396. 725
گوشواره goçavâra, kuṃḍale 408
گوشه koçâ, koṭi 647
گوگرد gogirda, gaṃdhake 842
گوه guha, male 401
گویا goyâ, vaktar 948
گوینده goyaṃdaha, gâyane 870

لاچی lâcî, elâ 450 HT
لاغر lâgara, durvale 370, kṛiçe 988
لاکه lâkha, lâkshâ 439
لالچ lâlûja, lolupa 937
لامسه lâmasaha, sparçe 116
لب lava, oshṭhe 757
لذه lajjati, rase 115
لرزه larjaha, kaṃpe 191
لشکر laçkara, vale 569, sekâ 633
لغام lagâma, khalîna 602
لقمة lukmâ, grâse 734
لنگی luṃgî, adhovastre 428
مادر mâdara, mâtar 356
ماده mâdâ, strî 278
مار mâra, sarpe 196
مارگیر mârgîra, vyâlagrâhin 199
ماه mâha, mâsa 34. 1042
— — caṃdra 60. 1042
ماهی mâhî, matsya 222
مایه mâya, mûladhana 816
مجلس majlisa, sabhâ 497
مجلسی majlisî, sabhya 498
مجنون majnûna, unmatta 388
محبوب mahavûva, suṃdare 978
محرم maharrama, aṃtaracâraka 555
محک mahakaṃ, nikashe 887
محل mahala, harmya 299
محمول mohamîla, saṃnaddhe 636 G
مخدوم makhadûma, karmopadeshṭar 550
مرجان marjâna, vidrume 831
مرد marda, puṅsi 344
مردان mardâna, çûra 631
مردانگی mardânagî, çaurye 667
مرده murdâ, mṛiti 671
مرض maraja, vyâdhi 376
مرغ murga, khage 267
مرگ marga, mṛiti 392
مروارید maravârîda, muktâ 829
مریخ mirîkha, maṃgale 79
مرید murîda, maṃtraçishye 492
مزدور majdûra, bhṛitibhuj 873
مژگان mijagâ, netrapakshati 759
مس misaṃ, tâmre 834
مسافر musâphira, pathike 562
مساوی masâvî, tulye 1005
مست masta, matte 941
مستعد mustaada, saṃnaddhe 636
مسکه maskâ, navanîtake 732
مسگر misagara, tâmrakuṭṭaka 863
مشاوره maçvarataṃ, maṃtre 578 G
مشرق muçarrak, pûrvadiç G v. 22 s. p. 78
مشتری muçtarî, vṛihaspatau 76
— — 1. gurau, 2. krayiṇi 1043
مشک mushka, mṛigamade 444
مشکل muçkilaṃ, âpadi 643
مشعل mashmalaka, râṃkave 420
مشوره mashûrahi, maṃtre 578 G
مشهور maçahûra, khyâte 912
مصراع misarah, pade 928
مصلحة maslahataṃ, maṃtre 578
معمار mejamâra, taṃtuvâyaka 853 HT
مغرب magareva, Westen G v. 23 (s. p. 78)
مفلس muphlisa, daridre 972
مقام mukâma, saṃveçane 662
مکر makara, kapaṭe 184
مگس magasa, makshikâ 333
مگسدان magasadân, netrâvaraṇasûtra 620
ملحد mulhida, pâshaṇḍe 524
ملک mulakaṃ, râshṭra 567
منسل mançila, çilâ 850
مو moya, keça 794
*موثه mudha, maṇivaṃdhe 774
موج mauja, taraṃga 208
موجود maujûda, siddhavastu 43
موجه mavajjahaṃ, yukte 586
*مور mora, pâçake 889
موزه mojaha, anupadînâ 884
موش mûça, mûshake 283
*موقوت mukutaha, mâtrâ 923
مولانا mulânâ, âcârya 485, çâstravettar 905
موم moma, sikthake 848
مهتاب mahatâva, caṃdrikâ 63
مهر mehara, karuṇâ 153, u. arka 1047
— mohara, çaṃkha 216, mudrâ 413
*— — pâçake 889 HT
مهربان meharavân, dayâlu 917

مهمان mihamâna, atithi 503
میان miyân, tad-aṃtara 235
— — kaṭau 770 G
*میبره mevarâ, âdhâvane 557
میر mîra, mukhyaMudgale 543
میرزا mirajâ, mîrâtmaja 544
میرعدل mîreadla, prâḍvivâka 540
میش mesha, meshe 273
— — , kîlaka 743
— meshâ, kîla 624
میمون maimûn, vânare 281
میوه mevâ, phale 248
*مُبین mîyân, Yavanottame 548
ناپاینده nâpâyaṃdaha, naçvara 1001 T
ناخن nâkhuna, nakha 779
نادان nâdâna, ajne 951
نادانی nâdânî, ajnâne 110
ناجونده nâjuviṃdaha, sthiratara 1002
ناز nâja mâne 160
ناف nâpha, nâbhi 769
نام nâma, nâmni 136
نامرد nâmarda, napuṅsaka 362, kâtare 944
نای nâya, kaṃṭhe 758
نباب navâva, Yavanânâṃ prabhu 547
نبات navâta, matsyaṃḍikâ 721
— u. نباتی n. u. navâdî, bhûruha 975
نخود nakhuda, caṇake 692
نر nara, nar 278
نرم narama, komala 1008
نزدیک najdîka, nikaṭe 993
نشان niçânâ, lakshye 649
نشیمن niçîmanaṃ, âsane 433
نطف nutphâ, çukre 395
نظر najara, saṃkalpe 101
نظم najam, chaṃdovaddha 929
نظمی najûmî, tâṃtrike 559
نعل nâla pâdatrâṇe 621
نفیر naphîra, bherî 150
نقاره nakkâra, paṭahe 149
نقره nukraha, rûpye 833
*نقطه, نکته nukutaha, mâtrâ 923
نماز nimâja (na°), saṃdhyâ 493
نمد namadam, ûrṇâḍhyaṃ 476
نمک namaka, lavaṇe 119. 719
*نورانی nûrânî, devatâ 6
نیا naya, nûtana 1007
نیازمند niyâjmaṃda, abhivâdake 954
نیازمندی nyâjavaṃdî, abhivâdane 517
نیرو nairû, kurvataḥ 675
نیّر اعظم naiyara âjama, sûrye 3
نیز naijâ, çalye 658
*نیک عقل neka akla, sumatau 964
نیکنامی nekanâmî, yaçasi 142
نیکیکار nekîkâra, sukṛtin 894
نیلوفر nîlopharam, padme 232
*وافق vâphika, tad(=pratikûla)viparyaye 1020
وزک bajaka (vujaka), bheke 226 HTG
وزیر vajîra, maṃtrin 537
وصل ulçam (çl), phelâ 736
وکال vakkâla vaṇigjana 680
وکالة vakâlataṃ, (dû)tasya karma 561
وکیل vakîla, dûte 560
*ولاء vâlai, âçlesha 799
ولایه vilâyata, deçe 318, râshṭre 568
هاله hâlâh, paridhau 74
هاون havanaṃ, ulûkhale 891
*هتهی haçthî, çilye(?) 622
هفت hapht, saptarshi 81
هلال hilâla, kalâ 61
هلیله halelâ, harîtakî 461
هم hama, nikhile 991
همجولی hamajolî, vayasye 553
همرو hamrava, sarvaga 1018
همزبان hamajavâ, amâtya 571
هموار hamvâra same 240
همیشه hameçaha, saṃtate 27
هیزم hejima (°juma), iṃdhane 326 HTG
هیمه hema, iṃdhane 326
هنر hunara, vijnâne 107
یاوه yâvaha, pralâpe 145 (947)
یازی yâjî, pattau 637
یاقوت yâkûta, padmarâge 827
یاوه گو yâvahago, mukhare 947 (145)
یخ yakhaṃ, himasaṃtati 67
یقین yakînaṃ, niçcaye 104

Index III.

açvâroba, savârikâ سواری 626
asâravastu, vemarata بی‌مرؤة 985
— vemagja بی‌مغز 985 T
asura, ivlîsa ابلیس 7
— deva دیو 7ᵃ HTG
— çaitâna شیطان 8
asûyâ, hasad حسد 167
asta, gurûva غروب 533
asthi, ustukhâm استخوان 795
asthiviçesha, çânâ شانه 1052
âkâça, gacaduma کژدم G v. 21 (s. p. 78)
— phalaka فلک G ibid.
ahamkâra, khudî خودی 159
âcârya, maulânâ مولانا 485
âtatâyin, vadaphaila بدفعال 965
âdara, tâjîma تعظیم 162
âdi, aüvala (avv°) اوّل 1013
âdhâra (tad°), vâjû بازو 339
âdhâvana, mevarâ میبره 557
ânanda, khuçahâlî خوش‌حالی 92
âpaṇa, dukâna دکان 291
âpad, muçkilam مشکل 643
âpanna, vadahâla بدحال 959
âpannâça, âsâna اسان 644
âyudha, silâha سلاح 645
âyushmant, umaradarâja عمردراز 902
ârambha, çurû شروع 45
ârâma, vâga باغ 324
ârohin, asavâra اسوار 627
ârdraka, adaraka ادرک 714
âvaçyaka, jarûra ضرور 585
âçcarya, ajav عجب 157
âçraya, panâha پناه 573
âçlesha, vâlaî * ولاء oder بالائی 799
âsana, niçîmana نشیمن 433
âsyûta, pevamda پیوند 1025
âhâra, khurdanî خوردنی 735
âhvâna, talavam طلب 134
indrajâla(ka), vâjî بازی 869
indhana, hema هیمه 326
— hejima هیزم 326 HTG
ucca, vilamd بلند 239
utkaṇṭhâ, tavajjaham توجع 183

uttara, pâsakha پاسخ 140
— çamâla شمال G v. 22 (p. 78)
utsâha, çâdî شادی 182
udaya, khurûj * خروج 532
— tulua طلوع 532 T
udâra, juâmmarda جوانمرد 910
udghâṭa, vâya باز 1061
udghâṭana (lohakumçî), kilîda کلید 311
udyamam kartâ, purataradduda پرتردد 898
unmatta, majnûna مجنون 388
— , devâna دیوان 940
— , tasya bhâva, junun جنون 389
unmanas, câka چاک 908
upajâpa, vadarâ(hi) بدراه 584
upadishṭa, âmokhta آموخته 1040
upadeshṭar, imâma امام 494
upadhâna, vâliçtam بالشت 473
upari, vâlâ بالا 233
— , var بر 1059
upavâsa, phâka فاقه 512
upâdhyâya, âkhonda اخوند 486
upânah, pâpoça پاپوش 885
upâyana, tuhaphâ تحفه 593
uras, sînâ سینه 772
ulûkhala, havanam هاون 891
ushṭra, çuturam شتر 812
ushṭrâroha, çuturavân شتربان 628
ushṇa, garam گرم 83
ushṇakâla, tâvistâna تابستان 38
ushṇîsha, dastâram دستار 430
ûru, rânâ ران 782
*ûrṇâdhya, namadam نمد 476
ûrdhvam (kâshṭhadvayam), saradara سردر 306
ûrmikâ, amguçtarî انگشتری 412
ṛiksha, khirsa خرس 331
ṛiju, râsta راست 999
ṛiṇa, karjam قرض 683
ṛitu, phasala فصل 35
ekâkin, tanaha تنها 1017
elâ, lâycî الایچی 450
oshṭha, lava لب 757
oshṭhakeça, varûtam بروت 794

aushadha, dârû دارو 375
kaksha, vagala بغل 785
kachapa, kaçapha كشف 223
— saṃgapuçta سنگپشت 224
kañcuka, jâmâ جامه 429
— dânacînî دانهچینی(?) 442
— jiraha زره 635
— peçavâj پیشباز 1051
kañcula (kiñc°), kharâtîn خراطین 198
kaṭa, voriyâ بوریا 698
kaṭi, kamar كمر 770. 1060
— miyâna میان 770 G
—, yat kaṭau, kamaravaṃda كمربند 431
kaṭu, teja تیز 120
kaṭhora, durusta درشت 1009
kaṇṭha, gulû گلو 764
— -praṇâlaka, nâya نای 758
kaṃḍû, cula جل 380
— (plur.) khârishaṃ خارش 385
kadaṃvaka, aṃvohâ انبوهی 341
kadarya, vadakaula بدقول 971
kadvada, vadasakhuna بد سخن 949
kaṃdu, tanûra تنور 706
kapaṭa, makara مكر 184
kapâṭa, takhtâ تخته 304
— taka طاق 304 HTG
kapota, kavûtara كبوتر 285
kapola, ârija عارض 760
kapha, kapha كف 1047
kampa, larjaha لرزه 191
kara, saugâta سوغات 591
— peçkaçaṃ پیشكش 592
karuṇâ, mehara مهر 153. 1045
karcûra, yaraṃvâda زرنباد 455
karṇa, goça گوش 752
kardama, gila گل 212
karman, amal عمل 1057
karmopadeshtar, makhadûma مخدوم 550
karsha, tolâ توله 824
kalaṃka, tâsa تاش 64
kalâ, hilâla هلال 61
kalusha, cirkina چرکین 220
kalpataru, tûvâ طوبی 13

kavaca, vakhtar بختر 634
kavi, çâira شاعر 924
kavitâ, çâirî شاعری 925
kaçâ, câvukaṃ چابک 625
— *taṃga تنگ 625 G
— tâjîyânaha تازیانه 886
kashâya, jumukhta زمخت 117
kâṅsya, royî روی 838, rûya 1046
kâka, kulâga كلاغ 284
kâca, çîçâ شیشه 838
kâtara, nâmarda نامرد 944
kâraṇa, aslaṃ اصل 93
kârâ, jindân زندان 673
kârmaṇa, jâdû جادو 186
kâryâdau mantrapâṭha, phâtihâ فاتحه 501
kârye kâma, khâhiçi خواهش 181
kâshṭha, cova چوب 327 (308)
kâsa, çurpha سرفه 379
kâsaka s. jayanâdhâra
kiṃvadaṃtî, khavara خبر 130
kiñcula, kharâtîn خراطین 198 H
kîla, meshâ میشی 624
*kîlaka, mesha میش 743
kukshiṃbhari, çikamprasta شكمپرست 936
kuṭṭinî, dallaha داله 352
kuṇḍala, goçavâra گوشواره 408
— (nṛiṇâṃ), halkâ حلقه 409
kunta, guja گز 659
kumbha, kûjâ كوزه 707
kumbhakâra, kulâla كلال 851
kumbhasaṃbhava, sohela سهیل 69
kurpara, âraṃjaṃ آرنج 776
kurvataḥ, nairû نیرو 675
kulîna, asîla اصیل 483
kushṭha, vâdphiraṃga بادفرنگ 383
— pheraṃga فرنگ 1048
kusîdaka, karjakhâha قرضخواه 684
kusuma, çaguptâ شگفته 329
kustuṃvaru, kiçnîja كشنیج 466
kûpa, câha چاه 228
kûla, kinâra كنار 210
— kinârâ كناره 1055
kṛiça, lâgara لاغر 988
kṛishi, jirâyata زراعت 682

kṛishîvala, varjagara برزگر 685
ketu, janava ذنب 71
keça, moya مو 794
keçaprasâdhanî, çânâ شانه 1052 (480)
koṭi, koçâ گوشه 647
*komṭâ (!veṇînivaṃdhaº), halaka حلكاء 312
komala, narama نرم 1008
koraka(phulla), gumcâ غنچه 328
kolâhala, gauga غوغاء 148
koçasaṃcaya, khayâna خزانه 565
koshṭha, çikaṃ شکم 768
koshṇa, çîragaraṃ شیرگرم 85
kautuka, vâjî بازی 188
kraya, kharîda خرید 821
krayin, kharîdâra خریدار 818
— muçtarî مشتری 1042
krodhana, khasmanâka خشمناک 953
kroça, kiroha کروه 321
kshatavrata, khârajî خارجی 528
kshamâ, varadâsta برداشت 164
kshîra, çîraṃ شیر 726
kshudhâ, gurasanagî گرسنگی 805
kshudhita, gurasan گرسن 935
kshaudra, asalaṃ عسل 847
khaga, murga مرغ 267
— parimdâ پرنده 268
khaḍga, çamaçera شمشیر 655
khaṃḍa, parca پرچه 62
khani, kâna کان 323
khala, kharamaṇa خرمن 687
— vadâmoja بدآموز 968
khalîna, lagâma لغام 602
khura, suṃbha سنف 603
khyâta, maçahûra مشهور 912
gaja, phîla فیل 256. 593
*gaḍha, kilaa قلعه 566
gandha, voya بوی 114
gandhaka, gogirda گوگرد 842
gambhîra (aṃbu), garkâva غرقاب 221
garta, gâra غار 242
gardabha, khara خر 260
garbha, *âviçtana آبشتن 361
garbhiṇî, dupuçtaṃ دوپشت 353
gavâksha, jharokhâ جهروکها 299
gavâksha, paṃjara پنجر 299 HTG
gâyana, goyaṃdaha گوینده 870
giri, koha کوه 243
giridhâtu, jamâda جماد 974
guṃjâ, surakhadânaha سرخدانه 823
guḍatvac, dâracînî دارچینی 441
guda, kûna, kôna کن 791
*guphâ, hujarâ حجره 295
guru, saṃginaṃ سنگین 170
— muçtarî مشتری 1044 (76)
gulpha, sitâliṃga ستالنگ 811
gṛiha, khâna خان 296
gṛihayâlu, giriṃdaha گیرنده 945
gṛihastha, kadakhudâ کدخدا 558
gṛihâṃgaṇa, suhana صحن 302
gṛiheçvarî (des Manu), haivâ حوّی 745
go, gâvaṃ گاو 270
godhûma, gaṃduma گندم 691
grâsa, lukmâ لقمة 734
grîvâ, gardani گردن 763
ghanasâra, kâphira كافر 444
gharma, araka عرک 187
ghasmara, aklaha اكل 934
ghâtaka, khûnî خونی 969
ghrâta, voîda بوئيده 1026
cakoraka, kavaka قوق 336
caṭaka, kuṃjiçka کنجشک 286
caṇaka, nakhuda نخود 692
catushṭaya (kâshṭhaº), cahâracova چهارچوب 308
candana, saṃtalaṃ صندل 446
candra, mâha ماه 60. 1042
— kamara قمر 1060
candraparvan, khasûpha خسوف 73
candrikâ, mahatâva مهتاب 63
— roçanî mâhî روشنی ماهی 63 G
capeṭaka, tamâcâ تماچا 403
cara (vijna), jâsûsa جاسوس 556
— juviṃdaha دونده 1003
caraṇa, pâ پا 788
carmakâra, kaphaçadoja کفشدوز 860
carman, carma چرم 525
— (hṛidi), peçvaṃda پیشبند 613

cala, harakatam حركة 47
câra, gallavân گلدبان 740
cikitsâ, ilâja علاج 374
câlanî, elaka الكى 893
cittavibhrama, vedilî بيدلى 177
cintâ, amdeçâ انديشه 180
*Cînajâta, dânacînî دانهچينى 442
cumvana, vosaha بوسه 799
cullî, degadâna ديگدان 705
cola, tilakâ تلك 425
caura, dujada دزد 879
chamdovaddha, najam نظم 929
châga, vuja بج 271
châyâ, sâyâ سايه 253
chikkâ, atsaha عطسه 377
jagat, âlama عالم 316
jañghâ, sâka ساق 784
janaka, padara پدر 359
janman, tavalluda تولد 95
jaya, phataha فتح 579
jayanâdhâra, khvagîra خوگير 606
— , tatkâsaka, hanâ حناء 607
— , tatpakshati, janâkha جناح 608
— , tallagna, darma(yugmakan) درم 609
jayanâmvara, jînapoça زينپوش 617
jarâ, pîrî پيرى 363
jala, âva آب 1062
jaladâgama, varsâtam برسات 39
jalaukâ, *jallu زلو 225
jâti, jâta زاده 97
jâtipatrî, vajvâjam بزباز 449
jâtiphala, jauja جوز 447. 451
jânudeça, jânû زانو 783
jâla, dâma دام 213
jigîshu, jâdala جادل 564
— *çilâvamda(?) 564 G
jihvâ, javâm زبان 754
jîraka, jîra زيره 711
jîvana, jimdagî زندگى 677
jîvâtman, jâna جان 94
jrimbhâ, khamayâjaha خمياره 189
jnâna, akalakulla عقلكل 108
jnânayukta, dânâ دانا 521
jyâ, cillâ چله 648
jyeshtha, akâvira اكابر 900
jvara, tapa تپ 387
tandula, viramja برنج 702
tat am Beginn von Compositen s. 235. 275. 276. 338. 539. 607–9. 612. 679. 1020
tanu, vadana بدن 807
tantu, ristâ رشته 858
— târa تار 880
tantuvâyaka, jolâhâ جولاهه 854
— vâphanda بافنده 854 T
taramga, mauja موج 208
tarka, kayâsa قياس 102
tala, taha ته 172
— kapha كف 777. 1047
tântrika, najûmî نجومى 559
tâpasa, âmila عامل 519
tâmra, misam مس 834
tâmrakuttaka, misagara مسگر 863
târâ, sitârâ ستاره 75
tâla, jaranîka زرنيخ 843
tâlu, kâma كام 756
tikta, talakh تلخ 121
tiryakkâshthadvayam, vâjû بازو 305
tiryac(= paçu), hevâna حيوان 976
tila, kumjeda كنجد 693
tilitsa, ajdar اژدر 264
tîkshna, teja تيز 87
tumdila, pharaveha فربه 372
tunnavâya, darajî درزى 855
turamga, aspa اسپ 596
tulya, masâvî مساوى 1005
tusha, vuçam بوس 696
tushâra, varpham برف 66
tûna, tarakaçam تركش 652
tûla, pumvai پنبه 846
tûlikâ, vâlâpoça بالاپوش 478
tûshnîm, khâmoça خاموش 955
tripti, serî سيرى 737
trishnâ, tishnagî تشنگى 806
tejita, teja تيز 1028
tokma, dulamula دلمل 690

trâsa, tarasaṃ ترس 161
trikaṭu, setalakha سەتلخ 460
tvac, dârasâra دارسار 469
— postaṃ پوست 798
tsaru, kavaja قبضه 654
dakshiṇa, râsta راست 404
— , janûva جنوب G v. 22 (p. 78)
dakshiṇîyaka, râsta راست 901
daṇḍa, julmânâ *ظلمانه 582
— *jarmamâ T ibid., *urjayat G ibid.
dadhi, jagharâtaṃ جغرات 733
dayâlu, meharavân مهربان 917
daridra, muphlisa مفلس 972
darpaṇa, âînâ آينه 481
darvî, *yaṃgalâgu, *yagalâju 892
daçâ, phatîla فتيل 16
dânaṃ, sakhâvataṃ سخاوة 499
dâsa, gulâma غلام 876
dâsî, dâya دايه 350
digaṃbara, verahanâ بیرهنه 956
divasa, roja روز 29
diç(= sthiti)jâniva, soya جانب u. سوى G v. 23 (s. p. 78)
diçâ, tarapha طرف 53
dîpa, cirâga چراغ 17
*dîpalaya, tâka تاک(?) 18
dîrghasûtra, pukhta پخته 932
duḥkha, alama الم 203
dundubhi, damâna دمامه 666
durgandha, vadavoî بدبوی 124
durnâman, vavâsîra بواسير 386
durnîti, julma ظلم 581
durvala, lâgara لاغر 370
durbhiksha, garânî گرانی 801
durmanas, dilâgira دلگير 909
dushṭavuddhi, vada akla بد عقل 963
dûta, vakîla وكيل 560
— tasya karman, vakâlata وكالة 561
dûra, dûra دور 995
dṛishṭarajas, vâligaha بالغ 348
dṛishṭânta, dalîla دليل 514
devatâ, ilâhî الاهى 5
— nûrânî نورانی (?) 6

devadâru, covanâya چوبنای 452
deça, vilâyata ولاية 318
deçaviçesha, pheraṃga فرنگ 1048
deha, tarkîba ترکيب 808
dairghya, tûlaṃ طول 421
dyûtakâra, kimâravâja قمارباز 888
dravya, dirama درم 825
dvâra, daravâja درواز 303
— daravâra دربار 303 HTG
dvârapâlaka, daravân دربان 541
dhanin, jardâra زردار 913
dhanurdhara, tîraṃdâja تيرانداز 639
— , kamândâra کماندار 638
dharmapatnî, aurati عورت 347
dhâtrî, âmalaha آمله 463
dhânya, çâlî شالى 695
dhânyaka, kisnîjaṃ کشنيج 716
dhâvana, çustanaṃ شستن 436
— (Laufen), davîdanaṃ دويدن 600
dhâvita (Wäsche), çusta شست 423
dhûma, dûda دود 19 G
dhûrta, riṃda رند 970
dhûli, garda گرد 663
dhṛishṭa, veadava بی ادب 942
dhruva, kutuva قطب 68
dhvaja, togâ توغ 664
nakha, nâkhuna ناخن 779
nagara, çahara شهر 288
napuṅsaka, nâmarda نامرد 362
namaṃda, nammada (namata), khogîra خوگير 606 HTG
nar, nara نر 277
naraka, dojakhaṃ دوزخ 200
narapati, çâha شاه 538
— , tadâtmaja, çâhajâda شاهزاده 539
nartaka, rakkâsa رقاص 152
nartana, shurî شرى (!) 601
navanîta, maskâ مسکه 732
naçvara, nâpâyaṃdaha ناپاينده 1001
nâgakesara, gulaṃ گل 470
nâgara, jaṃjavîla زنجبيل 456
nâpita, hajjâma حجام 864
nâbhi, nâpha ناف 769
nâman, isma اسم 135

nâman, nâma نام 136
nâraka, dojakhî دوزخی 202
nâsâ, vînî بینی 752
nikaṭa, najdîka نزدیک 993
nikasha, mahakaṃ محک 887
nikhila, hama هم 992
nikhilâyudha, silâha صلاح 645
nicola, câdarî چادر 424
nitaṃva, phalakâ فلقة 781
— surîna سرین 781 T
nideça, sar سر 1061
nidrâ, khvâva, khâva خواب 192
nidrâlu, purkhvâva پرخواب 952
nindâ, gîvati غيبة 144
nipuṇa, dânâ دانا 897
*nimâjâgrasara, îmâma امام 1053
nimna, pastî پستی 238
nirmala, pâkîjaha پاکیزه 983
nivâpa, ravâha رواح 500
nivâsa (E), câdarî چادر 424
nivṛitta, vâj باز 1061
niçcaya, yakînaṃ یقین 104
nîti, adâlati عدالة 586
nûtana, naya نیا 1007
nṛitya, raksa رقص 151
nṛipa, pâtaçâha پادشاه 534
— , tato 'dhika, sulatâna سلطان 535
nṛipâdhîça, çâhaṇçâha شاهنشاه 536
netrapakshati, mijagâ مژگان 759
netrâvaraṇasûtra, magasadân مگسدان 620
nepathya, ârâiça آرایش 410
naukâ, kiçtî کشتی 219
nyâsa, amânata امانة 820
nyûna, kama کم 1004
pakva, pokhta پخته 1029
paksha, vâla بال 337
— , tadâdhâra, vâjû بازو 338
pakshati (netra°), mijagâ مژگان 759
— (des jayanâdhâra), janâkha جناح 608
paṅkti, satara سطر 922
paṭavâsaka, avîraṃ عبیر 448
paṭaha, nakkâra نقاره 149
paṭṭaja (vastra), âvareçamî ابریشمی 415
paṃḍita, dâniçmaṃda دانشمند 484
paṇyâjîva, dukândâra دکان‌دار 815
pattana, gaṃja گنج 290
patti, yâjî یازی 637
pattraka, varag برگ 246
— tamâlavarga تمالبرگ 468
patnî s. dharmapatnî
pathika, musâphira مسافر 562
pada, misaraha مصراع 928
padma, nîlopharaṃ نیلوفر 232
padmarâga, yâkûta یاقوت 827
padya, vayata بیت 927
paratantra, giriphtâra گرفتار 930
parameçvara, khudâya خدای 9
parikhâ, khaṃdaka خندک 230
paricâraka, khâdima خادم 488
paricita, sanâkhta شناخته 1041
pariṇâha, arja عرض 422. 1050
paridhi, hâlah هاله 74
parîkshaka, çanâsiṃdâ شناسنده 906
parîdhâna, poçîdanî پوشیدنی 432
paryâṇa, jîna زین 605
paryâya, vârî باری 511
palâyana, gurejâ گریز 668
palâçaka, ekâṃgî (?) 296
palvala, cakara چکره 217
pavitra, pâka پاک 982
paçu, haivân حیوان 266
paçucâraka, caupâna چوپان 741
paçcât, pasa پس 407
paçcâttâpa, phasosa فسوس 174
pâkagṛiha, vâvarcikhâna باورچیخان 701
pâkâdhyaksha, vakâvula بکاول 700
pâtâla, *asphala اسفل 193
pâtra, jarpha ظرف 709
pâdatrâṇa (lohakṛita), nâla نعل 621
pâdâdhâra, rakeva رقیب 610
pânapâtra, piyâla پیاله 708
pâpa, gunâha گناه 90
pâmara, âma عام 875
pârada, sîmâva سیماب 840
*pârohaṇa, jîna زین 313

pârçva, pahalû پہلو 775
pârshṇî, pâsnâ پاشنه 787
pâçaka, *mora مور 889
— , *mohara مہر 889 HT
pâshaṇḍa, mulhida ملحد 524
pâshâṇa, saṃga سنگ 322
pippalî, philphiladarâja فلفلدراز 459. 713
pîta, jarda زرد 127
pîyûsha, âvahayâta آبحیات 12
pîtadâru, covakâ چوبک 454
puṅs, marda مرد 344
pucha, dum دم 257
puchopalakshita (mesha), gospaṃda گوسفند 274
puṃja, tûdâ توده 342
puṇya, savâva صواب 91
putra, pisara پسر 354
putrikâ, sûrata صورة 883
pura (madhyama), kasava قصبه 289
puraḥsara, peçarava پیشرو 640
purâṇa, kohana کہن 1010
pushkariṇî, hauja حوض 227
pushpa, gulaṃ گل 247
pûjâ, parasti پرسته 505
—, *pojiçaṃ پوجش 505 HTG
pûrvadiç, muççaraka مشرق G v. 22 (s. p. 78)
— , çaraka شرق G v. 22 (s. p. 78)
*pûvâ, çipusaṃ سپوس 728
— , saṃpusaṃ سنپوسه 728 G

pṛithagâtman, judâî جدائی 99
pṛishṭa, purasîdanaṃ پرسیدن 139
pṛishṭha, puçtaṃ پشت 767
*pedâraka, taṃga تنگ 614
— , tadyukta, *kacikâpujî کچیچ 615

peshaṇa, halla حل 1044

pragalbha, darrâka درّاک 943
pracura, visiyâra بسیار 990
pratâpa, çikoha شکوه 143
— , jalâla جلال 143 G
pratikûla, jidda ضد 1019
— , tadviparyaya, vâphika وافق 1020
pratishṭhâ, âva آب 1062
pratisîrâ, kanâta قنات 434
pratîcî, magareva, gareva مغرب, غرب G v. 23 (s. p. 78)
pratyaksha, jâhira زاهر (ظاهر) 1011
pratyudgama, peçavâj پیشباز 1051
pranâlaka s. kaṇṭha°
prabhâta, suvaha صبح 30
prabhu, sâhiva صاحب 914
pramâda, gâphilî غافلی 185
prayata, pâka پاک 523
pralaya, kayâmata قیامة 89
pralâpa, yâvaha یاوه 145
prasâdhanî, çânâ شانه 480. 1052
prasthâna, kûca کوچه 661
prahara, pâsha پاس 32
prahâra, jadanaṃ زدن 670
prâḍvivâka, mîre adla میر عدل 540
prâṇin, jâṃdâra جاندار 96
prâpta, rasîdâ رسیده 1035
priya, rucâyaṃdâ رچهاینده (?) 980
procca, vusaṃdâ بسنده 997
— vilaṃdaha بلند 997 T
prota, vâphtâ بافته 1032
phala, mevâ میوه 248
— , vâra بار 249
— , var بر 1059
phalaka, sipara سپر 655
phena, kapha کف 1047
phelâ, ulça وصل 736
vaddha, vaṃdi بندی 672
— , vastâ بسته 958
badhira, kara کر 373
baṃdhana, vastanaṃ بستن 590
bala, laçkara لشکر 569
—, jora زور 674
balin, jorâvara زوراور 371
bâlaka, tiphala طفل 365
bâlya, tiphalî طفلی 364
bila, sûrâkha سوراخ 194
bîja, tukhma تخم 250
bîbhatsa, jiçta زشت 156
buddhi, khirada خرد 100
bṛihaspati, muçtarî مشتری 76 (1044)

bhakta, khushkapulâva جشکپلاو 729
bhaga (pudendum), kusa کوس 790
— (—), kera کیر 789
bhaginî, khvâhara خواهر 357
bhayânaka, vîmaṃ بیم 158
bharjita, kavâvaṃ کباب 724
bhavishyant, âyaṃda آینده 41
bhasman, sukhata سوخت 133
— , sokhata سوخت 132
bhâ, husnaṃ حسن 65
bhâravâha, hammâla حمال 874
bhitti, dîvâra دیوار 294
bhuvana, tabaka طبق 4
bhûcara, ravimdâ رونده 269
bhûmi, jamînaṃ زمین 237
bhûruha, navâdi نباتی 975
bhṛitibhuj, majdûra مزدور 873
bheka, gvauka غوک 226
— , bajaka (bujaka) وزک 226 HTG
bherî, naphîra نفیر 150
bhoginî, harama حرم 346
bhramara, jaṃvura زنبور 334
bhrâtar, virâdara برادر 367
bhrû, vrû, avrû ابرو, برو 749
makshikâ, magasa مگس 333
mañgala (Mars), mirîkha مریخ 79
mañca, cahârapâî چهارپای 475
maṇivaṃdha, mudha موته 774
maṇḍa, çorvâ شوربا 730
maṇḍala, dâyara دائره 54
— , s. mukha°
matta, masta مست 941
matsya, mâhî ماهی 222
matsyaṇḍikâ, navâta نبات 721
madhura, shîrîn شیرین 118
madhyama pura, kasava قصبه 289
Manu, âdama آدم 744
— , tadgriheçvarî, haivâ حوی 745
manuja, inasâna انسان 977
manushya, âdamî آدمی 746
manoratha, garaja غرض 179
— , ârajû آرزو 179 HTG
mantra, maslahataṃ مصلحة 578
mantra, maçvarataṃ مشاوره 578 T
— , mashûrahi مشوره 578 G
mantradâtar, pîra پیر 491
mantrapâṭha (kâryâdau), phâtihâ فاتحه 501
mantraçishya, murîda مرید 492
mantrin, vajîra وزیر 537
mayûra, tâûsa طاؤس 335
marica, philaphilaṃ فلفل 458
— , girdaphilphila گردفلفل 712
mala, valagami بلغم 400
— , saragîna سرگین 400 HTG
— , guha گوه 401
malahârin, *haçthî هتهی 622
malina, cirakina چرکین 981 (220)
mashîpâtra, doyâtaṃ دوات 920
masî, syâhî سیاهی 918
mastaka, sar سر 1058
mahânt, kâmila کامل 518
mahârgha, girâ گران 804
mahâçaya, vujurga بزرگ 895
mahisha, gâvameça گاومیش 279
mâṅsa, goçtaṃ گوشت 396. 725
mâtar, mâdara مادر 356
mâtrâ, *mukutaha موقوت 923
— , *nukataha (nuku°) نکته, نقته 923 HT
mâna, nâja ناز 160
mânava s. vyutpanna°
mânasa, dilaṃ دل 98
— , s. saṃçayâpanna° hṛishṭâ°
mâyika, vâjîgara بازیگر 868
mâraṇa, kuçtanaṃ کشتن 676
mârjanî, jârova جاروب 314
mâlâ, tasvî تسبیح 411
mâlâkâra, vâgavân باغبان 852
mâsa, mâha ماه 34. 1042
mitra, dostaṃ دوست 552
mithyâ, daroga دروغ 147
miçrita, âmikhta آمیخته 123
mîrâtmaja, mirajâ میرزا 544
mukta, khalâsa خلاص 531
muktâ, maravârîda مروارید 829
mukti, khalâsî خلاصی 530
— , phalâha فلاح 109

mukha, dahana دهن 753
— , rûya روی 1046
mukhamaṇḍala, rûya روی 809
mukhara, yâvahago یاوه‌کو 947
mukhya, vujurga بزرک 516
— , umarâ امراء 570
— , saradâra سردار 984
— , (nimâjâgrasara), îmâma امام 1053
mukhya-Mudgala, mîra میر 543
muṇḍita, tarâçîdaha تراشیده 1022
Mudgala s. mukhya°, sâdhu° 543. 545
mudrâ, mohara مهر 413
muni, khâmoça خامش 520
muçala, dastaha دسته 890
muhûrta, sâyataṃ ساعت 33
mûka, guṃga کنک 916
mûtra, peçâva پیشاب 400
— , çâçaha شاشه 398
mûrchâ, vehosî بیهوشی 394
mûrchita, vehosa بیهوش 393
mûla, vekha بیخ 251
mûladhana, mâya مایه 816
mûlamantra, kalamâ کلام 495
mûlya, kîmati قیمة 813
— , vahâ بها 814
mûshaka, mûça موش 283
mṛiga, âhû اهو 255
mṛigatṛishṇâ, surâva سراب 86
mṛigamada, mushkâ مشک 444
mṛigayâ, çikâra شکار 878
mṛiti, marga مرک 392
— , murdâ مرده 671
mṛid, khâka خاک 317

*meṭhikâ, *umacîlama امچلم 611
— , tatstaba, sikâravaṃda شکاربند 612
mesha, mesha میش 272 (cf. 743)
— , koca قوچ 272 HTG
— , tasya patnî, gaddî غدی 273
— (puchopalakshitaḥ), gospaṃda کوسفند 274
— , (tatsuta, çiçu), baraha بره 275
— , (tadvarṇa), *vahava بهو 276
maithuna, *parâgaṃdâ پراکنده 641

mogha, vephâyadâ بی‌فایده 1014
mauna, khâmoçî خاموشی 509
yakṛitpiṇḍa, jigara جکر 797
yati, daraveça درویش 522

Yama, yavraîla جبرئیل 22
yava, jeva جو 688
Yavana (prabhu der), khâna خان 546
— (—), navâva نباب 547

Yavanottama, *mîyân میّن 548
yaças, nekanâmî نیکنامی 142
yâcaka, gadâ کدا 973

yâcnâ, gadâyî کدائی 502
yâtanâ, syâsati سیاسة 201

yukta, mavajjaha موجّه 586
— s. pedâraka
yuga, juphta جفت 343
yuvatî, javâna جوان 349
yogya, çâyada شاید 1054
rakta, surkha سرخ 129
raktâñga, surkhâv سرخابی 332
rañgâjîva, raṃgareja رنکریز 859
rajaka, gâjura کازر 866
rajju, rasan رسن 214
— , resmâ ریشمان 214 HTG
rata, sohavati صحبة 527
ratna, javâhira جواهر 826
rada, daṃdân دندان 755
*rallaka, sakalîta سقلات 477
rasa, lajjati لزة 115
*rasaka, khârisha خارشه 385
râkshasa, âdamîkhâr آدمی‌خوار 24
râñkava, çâla شال 418
— , sûpha صوف 419
— , mashmalaka مشمل 420
râjya, saltanati سلطانة 575
— , daulati دولة 576
— , sâhivî صاحبی 577
râjyârambhâbhisheke, kutba خطبه 660
râtri, çava شب 28
râçi, vurjaṃ برج 55 T
râshṭra, mulakaṃ ملک 567

râshṭra, vilâyatam ولايۃ 568
râhu, râça راس 70
ripu, duçmana دشمن 554
rîti, viramjam برنج 835
rudita, giriyaha گريه 190
rush, gajav غضب 175
rûpa, sûrata صورة 112
rûpya, nukraha نقره 833
roman, paçma پشم 258
romottha (çilya), *haçthî ھشتی 622
lakshya, niçânâ نشان 649
lagna, vurjam برج 55
— , tallagna s. 609
laghu, suvukam سبک 169
lajjâ, hayâ حياء 165
—, çaram شرم 166
lajjita, çarmindâ شرمنده 1030
lalâṭa, peçânî پيشانی 748
lavamga, karanphala قرنفل 440
lavaṇa, namaka نمک 119. 719
laçuna, çîram سير 727
lâkshâ, lâkha لاکھ 439
lâbha, phâyadâ فائده 819
*liñgaka, juvanakamjiçka جوان کنجشک 464
lekha, paravâna پروانه 490
lekhaka, kâtiva کاتب 489. 557 G
lekhanî, kalama قلم 919
leça, jarâ جره 997
lobhavant, harîpha حريف 938
— , harîsa حريش 938 HT
lolupa, lâlûja لالچ 937
loshṭa, kulokha کلوخ 686
loha, âhanam آھن 837
— (açvakaṇḍûyana), kharakharâ خرخرا 623
lohakrita (pâdatrâṇa), nâla نعل 621
lohakuñcî, kilîda کليد 311
lohakâraka, âhangara آھنگر 861
lohaveṇî, jamjîra زنجير 309
— , tadargala, kuphalam قفل 310
vaktar, goyâ گويا 948
vañga, arjîjam ارزيز 844
vacana, sakhunam سخن 131
vacâ, gurumvâ کرنبا 467

vaṇigjana, vakkâla وکال 680
vatsa, gausâla گوسال 742
vadânya, sakhî سخی 903
vadhya, kustanî کشتنی 966
vana, jamgala جنگل 244
vandana, vâjî باج 587
vapra, câra dîvârî چارديواری 293
vayasya, hamajolî ھمجولی 553
varada, arjûdeh ارزوده 906
vartana, rojagâra روزگار 681
vartamâna, hâla حال 42
vartula, girda گرده 996
vardhaki, darûdagara درودگر 865
varshaṇa, vârîdana باريدن 50
vasti, jahârâ زھار 780
vastra, pâracâ پارچه 414
— (paṭṭaja), âvareçamî ابريشمی 415
— (sadhâtu), jarkaçî زرکش 417
— (sâmânya), karapâsa کرپاس 416
vastraparinâha, arja عرض 1050
vastraveçman, tamvû تمبو 427
vâcâla, purasakhuna پرسخن 950
vâṇî, vâphtanam بافتن 882
vâta, vâda باد 23
vâdaka, sâjamdaha سازنده 871
vânara, maimûn ميمون 281
vâpî, vâulî باولی 229
vâma, capa چپ 405
vâmana, pasta پست 998
vâri(vishaye), *ard(*dard) 1056
vâlapat(t)tra, khoyîda خويد 689
vikraya, pharokta فروخت 822
vikrayin, pharoçamdaha فروشنده 817
vigraha, jamga جنگ 574
vicâra, taammula تأمل 515
vijna (cara), jâsûsa جاسوس 556
vijnâna, hunara ھنر 107
vijnâpana, arja عرض 1050
viḍâlaka, gurvâ گربه 282
vitasti, vilista بلست 402
vitâna, çamiyâna شميانه 426
videça, saphara سفر 563

çuçrûshâ, khijmati خدمة 506
çushka, khuçka خشک 1038
çûra, mardânâ مردان 631
çûla, darda درد 19
çûlamâṅsa, çîkhaṃ سيخ 723
çṛigâla, çigâla شغال 262
çṛiñga (paçoḥ), çâkha شاخ 1049
— (gireḥ), kullaha کلّه 241
çṛiñgavera, âdaraka آدرک 457
çaivala, jaṃgalaṃ جنگل 218
çoka, guma غم 173
çoṇita, khûna خون 397
çotha, âmâsa اماسا 381
çauṇḍika, khamâra خمار 867
çaurya, mardânagî مردانگی 662
çmaçru, rîça ريش 793
çyâma, syâha سياه 126
çyâla, *vura G v. 95 (s. p. 78)
— khvasura خوسره G v. 95 (s. p. 79)
çraddhâlu, purahausala پرحوصل 946
çrâddha, ursa عرس 499[a]
çreṇi, katâr قطار 325
*çroto'ñjana, surmaha سرمه 841
çloka, ruvâî رباعی 926
çvan, saga سگ 261
çvaçura, khusura خسر G v. 95 (s. p. 78)
çveta, sapeda سپيد 125
[çvaçrû],*shaṇei(?) u. khoçadâmana خوشدامن G v. 95 (s. p. 78. 79)
shaṃḍha, khojasarâya خواجهسرای 551
saṃvatsara, sâla سال 88
saṃçayâpannamânasa, sayagada (oder sayasaka) kunaṃda کننده (oder سی شک) صيقة 899
saṃsmṛita, dâçuda داشته 1023
saṃkalpa, najara نظر 101
saṃkîrṇa, taṃga تنگ 1021
satṛipti, sera سير 738
satya, râsta راست 146
sadâtana, pâdâra پادار 1000 (669)
— , pâyaṃdaha پاينده 1000 T
sadhâtu (vastra), jarkaçî زرکشی 417
satata, hameçaha هميشه 27
saṃdeha, jana ظن 103
saṃdhi, âstî آشتی 572
saṃdhyâ, nimâja نماز 493
saṃnaddha, mustaada مستعد 636
— , mohamîla محمول 636 G
saṃniveça, mukâma مقام 662
saptarshi, hapht هفت 81
sabhâ, majlisa مجلس 497
sabhya, majlisî مجلسی 498
sama, hamvâra هموار 240
samagra, tamâma تمام 992. (44)
samaya, jamâna زمان 26
samargha, arjâ ارزان 803
samasta, tamâma تمام 44 (992)
samûha, jamâyata جماعة 340
samudra, dariyâ دريا 205
samṛiddha, avâdâna ابادان 915
saṃpatti, sâmân سامان 642
saṃpuṭa, hukkâ حقه 479
sarpa, mâra مار 196
sarvaga, hamrava همرو 1018
sarvaguṇasampanna, hajarata حضرة 549
sasya, khoça خوشه 694
sâdhuMudgala, açrâpha اشراف 545
— âgaha آغا 545 TG
sâmânye vastre, karapâsa کرپاس 416
sâyaṃ, çâma شام 31
sâvadhâna, saṃjîdâ سنجيده 933
sâhasa, ajî ازی 583
— , *hima (?) G 583
sikthaka, moma موم 848
siddhavastu, maujûda موجود 43
siddhânta, hallam حلّ 105. 1044
sidhman, *vaivaphâ بيوفا 378
sîman, hadda حدّ 315
sîsaka, surava سرب 845
sukala, purakâra پرکار 911
sukṛitin, nekîkâra نيکی کار 894
sukha, râhata راحة 204
suguḍa, kandaṃ کند 722
sugupta, poçîdaha پوشيده 1016
sutâ, dukhtara دختر 355

sutâdhava, dâmâda داماد 358
sundara, mahavûva محبوب 978
subhaṭa, tarakaçvaṃda ترکش‌بند 632
subhikshaka, arjânî ارزانی 802
sumati, neka akla نیک عقل 964
surabhi (Frühling), vahâra بهار 37
suhṛidaya, dilâvara دلاور 896
sûkara, khûka خوک 330
sûkshma, vârîkaṃ باریک 171
sûcî, soyana سوزن 857
sûtrapada(°paṭa?)jeravaṃda زیربند 616
sûda, vâvarcî باورچی 699
sûrya, âphtâva افتاب 1
— , alâmannûra علم لنور 2
— , naiyara âjama نیر اعظم 3
sûryaparvan, kusûpha کسوف 72
setu, pula پل 319
senâ, laçkara لشکر 633
sainika, saradâra سردار 630
saudâminî, varakaṃ برق 58
skandha, dosha دوش 765
— , kaphta کفت 766
— , kinârâ کناره 1055
*skandhakeça, ayâla ایال 604
skandhâmvara, kâṃdhî کاندهی 619
stana (strîṇâṃ), pistâ پستان 771
staba, sikâravaṃda شکاربند 612
stava, siphata صفت 141
— , sitâyiça, ستایش 141 HTG
steyakarman, dujdî دزدی 881
strî, jana زن 345
— , mâdâ ماده 278
sthapati, râja راز 853
— , mejamâra معمار 853 HT
sthala, jâya جای 236
sthâlî, dega دیگ 706
sthiti, istâdanaṃ استادن 508 (s. G v. 23 p. 78)
sthira, sakûnat سکونت 46
— , pâyaṃdâra پایدار 669
sthiratara, nâjuviṃdaha نادونده 1002
sthûlavastu, pharavaha فربه 987
snâna, gusalaṃ غسل 437
sneha, ekhalâsa اخلاص 178
— , roganaṃ روغن 731
sparça, lâmasaha لامسه 116
smârta, îmâma امام 1053
smita, tavassumaṃ تبسم 155
syûta, dokhta دوخت 1037
— khurjîna خرجین 697; s. âsyûta
svatantra, âjâdâ ازاده 931
svarga, vihiçta بهشت 82
svarṇa, tilâ لطلا (تله) 832
svarṇakâra, jaragara زرگر 862
haṭṭa, vâjâra بازار 292
hanu, janakha زنخ 761
— , tadadhaḥ, gavgava غبغب 762
haritamaṇi, phiroja فیروز 830
haridrâ, jardacova زردچوب 453. 717
haridvarṇa, savjaṃ سبز 128
harîtakî, halelâ هلیله 461
harmya, mahala محل 300
hasantî, inkalaṃ (ank°) 705
hasta, dasta دست 775
hastirohaka, phîlavân فیلبان 629
hâsa, khaṃda خند 154
hiṅgu, aṃgojâ انگوژه 718
hiṅgula, çaṃgarapham شنگرف 849
himasaṃhati, yakhaṃ یخ 67
hîraka, ilmâsa الماس 828
hṛidi carman, peçvaṃda پیش‌بند 613
hṛishṭa, çukuphta شکفت 1034
hṛishṭamânasa, saguphtah شکفته 907

Nachtrag.

Pag. 37, 13. 14 lies: 305 und 306, sowie: 307. 308. — Auch sind hie und da die zu den einzelnen Wörtern gehörigen Zahlen zu ergänzen (so 101. 161), oder zu verbessern (so bei 279. 318. 728. 869. 908); — bei 433 lies: niçîmanaṃ, bei 668: كُزِير, bei 893: الكك, bei 1025: پيوند: — es ist ferner zu lesen: pag. 81, Col. [1]: *urjayat, daṇḍe; — 82 Col. [2] und 98 Col. [2]: khâva, khvâva; — 92 Col. [2]: hajara حضره.

Am 1. August, als bereits der Satz der Indices begonnen hatte, erhielt ich durch G. Thibaut aus Benares einen zweiten Pârasîprakâça desselben Autors (37 foll.), der aber nicht lexikalischen, sondern grammatischen Inhalts ist, resp. eine nach indischem Schema abgefafste persische Grammatik enthält. Indem ich mir Näheres darüber für eine andere Gelegenheit vorbehalte, bemerke ich hier nur, dafs das, was ich oben p. 75 über das Renommiren des Autors mit Pâṇinischer Terminologie gesagt habe, durch dieses sein weiteres Werk nicht beeinträchtigt wird. Denn auch in ihm bedient er sich derselben in sehr sonderbarlicher Weise. Immerhin aber ergiebt sich, dafs er doch wirklich auf dem Gebiete der grammatischen Wissenschaft gewisse Kenntnisse besafs, da er sich ja eben sogar zu selbständigem Schaffen darauf emporgeschwungen hat!

4. 10. 1887. A. W.

Die Ghassânischen Fürsten aus dem Hause Gafna's.

Von

Hrn. TH. NÖLDEKE.

Gelesen in der Sitzung der philos.-histor. Classe am 17. Februar 1887
[Sitzungsberichte St. IX S. 109].
Zum Druck eingereicht am 24. Februar 1887, ausgegeben am 25. April 1887.

Vorbemerkungen.

Durch die seit 35 Jahren zu Tage geförderten syrischen Quellen ist unsere Kunde von den Ghassânischen Phylarchen erheblich vermehrt. Dazu können wir viele arabische Werke, die noch vor Kurzem blofs handschriftlich zu lesen waren, jetzt bequem in gedruckten Ausgaben benutzen und besser ausbeuten. Auch wissen wir allmählich etwas mehr von den Ländern, in welchen die Kinder Gafna's einst lebten. Eine neue Untersuchung ihrer Geschichte war also wohl an der Zeit. Um so mehr, als das naïve Vertrauen auf die arabischen Angaben, das noch Caussin[1]) hatte, jetzt wohl bei keinem Fachmann mehr zu finden ist. Wir sehn die schönen Erzählungen der Araber nicht mehr als zuverlässige Historie an und betrachten die Constructionen der muslimischen Gelehrten als das, was sie sind. Ist doch das ausgearbeitete System der Ghassânischen Geschichte, dem man in Europa am liebsten gefolgt ist, erst spät und steht noch stärker im Widerspruch mit sicheren Daten als andere, einfachere Darstellungen.

---

[1]) A. P. Caussin de Perceval, Essai sur l'histoire des Arabes avant l'islamisme 2, 189 ff. — Mein Artikel „Ghassaniden" im Ersch und Gruber hängt ganz von Caussin ab. Ich bitte zu berücksichtigen, dafs ich denselben als 20jähriger Student geschrieben habe. Ps. 25, 7!

Freilich können meine Ergebnisse zum grofsen Theil nur negativ sein, und sie nehmen sich gegenüber dem, was Caussin zu bieten scheint, recht ärmlich aus. Von arabischer Seite ist für unser Thema kaum noch Neues von geschichtlichem Werth zu erhoffen. Dagegen bringen uns möglicherweise Inschriften oder syrische Werke noch unerwartete Aufklärungen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um den Freunden und Fachgenossen bestens zu danken, welche mir bei dieser Arbeit behülflich gewesen sind. Prof. Wright, Prof. Guidi, Dr. Pertsch, Dr. Zotenberg, Dr. Kleyn, Dr. Bezold, Dr. Jensen, Dr. Geyer, Dr. Gottheil haben mir Mittheilungen aus Handschriften gemacht. Prof. Rud. Schöll hat mir einige Fragen über Puncte byzantinischer Rangordnung beantwortet, und mit Prof. v. Gutschmid habe ich wieder über allerlei Dinge meines Themas eine Correspondenz geführt, die für die Bearbeitung hoffentlich recht nützlich geworden ist[1]).

---

[1]) Eben trifft mich die erschütternde Nachricht vom Tode Gutschmid's!

Das Fürstenhaus, welches im 6ten Jahrhundert an der Spitze der dem römischen Reiche unterthänigen Araber Syriens stand, war mit andern Genossen des Stammes, dem es angehörte, den *Ghassân*, aus dem fernen Süden gekommen. Die schwer zu lösende Frage nach dem Ursprung und der eigentlichen Heimath dieses Stammes können wir hier unerörtert lassen. Die arabischen Genealogen leiten das Fürstengeschlecht von den etwas mythischen ʿAmr b. ʿÂmir ab[1]. Dies entspricht wahrscheinlich alter Überlieferung; denn die Bewohner von Jathrib (Medîna), welche auch zu den Ghassân gehörten[2], sahen nach dem Zeugnifs des Dichters Ḥassân b. Thâbit[3] wirklich den ʿAmr b. ʿÂmir als ihren Stammvater an. Zwischen ihm und dem ersten ganz sicher beglaubigten Herrscher aus diesem Hause alḤârith b. Gabala[4] hat Ibn alKelbî[5] und nach ihm die übliche Tradition nur wenige Mittelglieder. Das Stemma ist alḤârith b. Gabala b. alḤârith b. Thaʿlaba b. ʿAmr b. Gafna b. ʿAmr Muzaiqijâ b. ʿÂmir. *Gafna* gilt als Ahnherr des Fürstenhauses nicht nur in der historischen Überlieferung (z. B. Ibn Hišâm 8), sondern schon bei den jenem gleichzeitigen Dichtern. „AlḤârith den Gafniden" nennt anNâbigha einen früheren Fürsten dieser Dynastie (Ahlwardt 1, 7); ebenso Ḥassân S. 13 ein anderes Mitglied derselben. „Die Kinder Gafna's" heifst

[1]) Den Namen *Muzaiqijâ* hat derselbe wohl erst aus Sûra 34, 18 erhalten; vgl. Hamza 116, 7 ff.

[2]) Darüber, dafs diese Verwandtschaft allgemein angenommen wurde, vrgl. ZDMG 40, 178 Anm. 4.

[3]) Dîwân (ed. Tûnis) 67, 13, 18.

[4]) Aus naheliegenden Gründen gebe ich das ج in dieser Abhandlung einfach mit *g* wieder.

[5]) Hišâm b. Muḥammed; starb 819/20 oder 821/2. Er stützt sich hauptsächlich auf die Forschungen und Combinationen seines Vaters Muḥammed b. asSâib alKelbî, welcher 763/4 ziemlich bejahrt starb. Ich verdanke die Mittheilung der Stelle aus der Londoner Handschrift der Gamhara (Add. 22, 376) über das Ghassânische Fürstenhaus und andre verwandte Geschlechter der oft erprobten Gefälligkeit Wright's.

die Familie bei ihm S. 72, „das Haus Gafna's" S. 100. Noch in einem späteren Gedicht nennt er Gafna als einen Mann der Vorzeit, auf den die, gleichfalls Ghassânischen, Medînenser stolz sind[1]). Auch von ʿAlqama 3, 4 und in dem Gedichte Ṭabarî 1, 850, 20 wird einer dieser Fürsten „Sohn Gafna's" genannt, was man freilich zur Noth auch so auslegen könnte, dafs hier der wirkliche Vater des Fürsten, also ein späterer Gafna, gemeint sei. Jener Gafna kann sehr wohl eine historische Person sein, und wir nennen die Dynastie am einfachsten die der „Gafniden". Doch ist zu bedenken, dafs nicht Alle, die sich von Gafna ableiteten, zu dem Herrscherhause gezählt wurden, denn auch ein zum gröfsten Theil in Medîna lebendes Geschlecht, die Abkömmlinge der alAchtham b. Thaʿlaba, leitet Ibn alKelbî von Gafna ab[2]).

Thaʿlaba ist vermuthlich auch oft als Ahnherr des Fürsten genannt. Wenigstens liegt es sehr nahe, die Mutter des Kinda-Fürsten Ἀρέθας ὁ Θαλαβάνης Theophanes (Bonn) 218, die Grofsmutter des Dichterkönigs Amraalqais — um 500 —, als Tochter dieses Hauses anzusehn. Und ebenso zieht man „die römischen Araber, welche ʿdie vom Hause des Thaʿlabâ[3])' heifsen" und welche 503 einen Zug gegen Ḥîra unternehmen, Josua Stylites c. 57, am einfachsten hierher. Bei der Beliebtheit des Namens Thaʿlaba „Fuchs" ist dieser Schlufs freilich durchaus nicht bindend[4]). Natürlich stände nichts der Vermuthung entgegen, dafs zwischen Thaʿlaba und Gafna einerseits und ihren historisch gesicherten Abkommen anderseits in Wirklichkeit noch mehrere Glieder zu ergänzen wären.

Hamza von Ispâhân (schrieb 961) weifs uns freilich von den frü-

---

[1]) Die Dichter der Medînenser prahlen viel mit ihren verschiedenen königlichen Vettern und sagen deshalb sogar, sie, die Medînenser, seien immer „Könige" gewesen — Ḥassân 67, 15. 77, 12. 87, 7, 12. 91, 15; Ibn Hišâm 660, 14 f. u. s. w.

[2]) Vrgl. die Genealogie *a* im Anhang.

[3]) Syrer und Griechen jener Zeit geben die arabische Endung ـَةٌ einfach durch *â* wieder. Dies lag um so näher, als die meisten Stämme, mit denen sie in Berührung kamen, wohl überhaupt kein Iʿrâb mehr hatten. In früherer Zeit wurde die Endung bekanntlich durch ת άθης, άθη ausgedrückt.

[4]) Aber schwerlich meint Josua, wie Wright zur englischen Übersetzung vermuthet, die Thaʿlaba, welche den Haupttheil der Bekr b. Wâil bildeten; denn diese waren gewifs nicht unter den „römischen Arabern".

heren Ghassânischen Königen, als deren ersten er den Gafna selbst ansieht, Manches zu berichten und kennt genau die Regierungsdauer jedes Einzelnen. Aber ich mufs gleich hier aussprechen, dafs seine imponierende Liste sehr wenig Werth hat. Vorläufig mag genügen, dafs er dem alḤârith b. Gabala, der 40 Jahr regiert hat, nur 10 Jahre giebt und dafs er nach ihm noch eine lange Reihe von Königen fast 5 Jahrhunderte herrschen läfst, während die Dynastie nach alḤârith höchstens 65, wahrscheinlich aber nur noch ungefähr 45 Jahre bestanden hat.

Ibn Qotaiba 314 bezeichnet als ersten König der Familie den Abû Šamir alḤârith b. ʿAmr, genannt *Muḥarriq*. Dieser Name ist wahrscheinaus den Gedichten des Ḥassân b. Thâbit geflossen, der „die beiden Söhne Muḥarriq's" unter den Männern der Vorzeit nennt, auf welche die Medînenser stolz sind (67, 18. 87 ult.)[1]. So hat schon Ibn alKelbî Muḥarriq als Beinamen des alḤârith b. ʿAmr, also eines Bruders des Gafna, leitet davon aber sogar ein in Medîna ansäfsiges Geschlecht ab. In Wirklichkeit haben wir jedoch kaum nöthig, den Muḥarriq des Ḥassân für einen Anderen zu halten als den, nach welchem sonst wohl auch das Königsgeschlecht der Lachmiten in Ḥîra „das Haus Muḥarriq's" heifst. Denn der Dichter führt in dem einen Liede auch den letzten König von Ḥîra Abû Qâbûs (anNuʿmân b. alMundhir) auf, der ja ebenfalls für einen Verwandten der Medînenser gelten konnte, wenn auch nur für einen sehr weitläufigen[2].

Rein erfunden scheint zu sein der Ghassânische König *Abû Gubaila*,

---

[1]) Auch *alʿAnqâʾ* als Beiname eines andern Bruders des Gafna (Ibn Doraid 259, 4; Ibn Chaldûn 2, 279 auch nach Ibn alKelbî) stammt aus diesen beiden Liedern.

[2]) Ein Lachmite wird als „Sohn Muḥarriq's" angeredet von dem Dichter im ʿIqd (Caïro) 1, 181, 4. Die Lachmiten meint, wie Ṣiḥâḥ s. v. حرق mit Recht sagt, alAswad b. Jaʿfur in einem oft angeführten Verse mit „dem Hause Muḥarriq's" und ebenso Mutammim in den Mufaḍḍalijat 8, 40; vrgl. alFarazdaq im ʿIqd 2, 54, 6 v. u. Ungewifs ist es aber, in welche Zeit und Gegend der Dichter Ḥamâsa 188 v. 3 den Muḥarriq setzt, von dem die guten Schwerter stammen. Im Grunde wufsten die Späteren nicht, wer Muḥarriq war. — Die Erklärungen des Namens bei den Schriftstellern, z. B. Kâmil 97 (vrgl. unten), sind willkürlich. Muḥarriq ist wahrscheinlich ein Hauptname (*ism*), kein Beiname (*laqab*); sonst hätte es wohl den Artikel. Dieser steht zwar in der Ausgabe Hamza 118, 15, aber die Leydner Handschrift hat ihn da nicht, und so wird er auch im ʿIqd 1, 181, 4 zu tilgen sein.

welcher den Aus und Chazrag bei der Unterwerfung der Juden geholfen haben soll[1]), wie denn die Vorgeschichte Medîna's von haltlosen Erdichtungen voll ist. Der Name ist mit dem Diminutiv des in der Dynastie mehrfach vorkommenden Gabala gebildet.

Nach den arabischen Nachrichten kamen die Gafniden zur Macht im Kampf mit den *Ḍagâʿima*, einem Geschlecht aus dem Stamme Salîḥ, Ibn Qotaiba 313; Jaʿqûbî 1, 235; Hamza 115. Das ist an sich nicht unwahrscheinlich. Gutschmid nimmt (in einer brieflichen Mittheilung) an, dafs diese *Ḍagâʿima* die Nachkommen des Ζόκομος waren, welcher nach Sozomenus 6, 38 gegen Ende des 4ten Jahrhunderts Christ und Phylarch unter römischer Hoheit wurde. Mir selbst war schon vorher die Vermuthung gekommen, dafs Ζώγομος Theophylact 2, 2 (im Jahre 586) = *Ḍogʿom* ضُجْعُم sein möge. Die Vocale würden keine Schwierigkeit machen, denn wenn auch meistens *Ḍagʿam* ضَجْعَم punctiert wird (s. Ibn Doraid 319), so führt der Qâmûs doch auch *Ḍogʿom* an. Aber allerdings ζ für *ḍ* ض (statt τ oder höchstens δ), und zwar in beiden Fällen, ist bedenklich; k für *g* ج wenigstens auch eine Schwierigkeit. Sonst pafste Alles gut. Die 4te Generation nach *Ḍogʿom* (excl.)[2]) wird als letzte der Dynastie angegeben Ibn Chaldûn 2, 279; vrgl. Hamza 115. Und zwar bezeichnet der Name Dâûd alLathiq[3]), von dem das David's-Kloster دير داود stammt, deutlich einen Christen — was sich freilich für einen römischen Phylarchen dieser Zeit von selbst versteht. Die 5 Männer, die wir uns grade nicht nach der Anordnung der Genealogen in regelmäfsiger Geschlechtsfolge denken müssen, brauchen kaum 100 Jahre auszufüllen. Ein Bruder oder Vetter des letzten Ḍogʿomî, Zijâd (oder Dhijâd?) b. Habûla kämpft

---

[1]) Ibn Athîr 1, 493. Dafs dies fabelhaft sei, erkennt auch dieser verständige Historiker. Seine Aushülfe, er sei der Feldherr eines Ghassânischen Fürsten gewesen, bedarf freilich erst recht keiner Widerlegung. Da man den Abû Gubaila nicht unter den sonst genannten Gafniden fand, gab man ihm einen andern Stammbaum Ibn Athîr l. c.; Ibn Chaldûn 1, 493. Vrgl. Wüstenfeld, Gesch. der Stadt Medina 34 f.

[2]) Ibn Qot. sagt, es seien nur 3 Könige von den Salîḥ gewesen, und nennt ganz andre Namen, Masʿûdî 3, 215 hat diese als eine andre Dynastie vom Stamme Tanûch. Beide Reihen können richtig sein.

[3]) Bei Jaʿqûbî 1, 235 ist داود اللثق in دجان بن العمق entstellt.

mit dem Kinditen Ḥogr Âkil-almurâr, dem Grofsvater des oben genannten alḤârith, s. Ibn Doraid 319; Ibn Athîr 1, 372 ff.; Ibn Chaldûn 2, 278 u. A. m.[1]). Die Voraussetzung dieser Erzählung ist, dafs die Gafniden damals noch nicht die Herrschaft besafsen[2]). Nun hat Hamza die zu jenem chronologischen Ansatz sehr wohl stimmende Notiz, dafs Gafna vom römischen Kaiser نسطورس[3]) als König eingesetzt sei; wir können dies um so zuversichtlicher als die Einsetzung des ersten Gafniden durch Kaiser Anastasius (491—518) erklären, als diese vereinzelte Angabe zu Hamza's künstlichem System gar nicht stimmt und sie auch durch den sonst ganz abweichenden Jaʿqûbî bestätigt wird, bei dem der Name allerdings noch stärker entstellt ist zu نويشر[4]).

Hamza nennt als Ersten, der die Ghassânier nach Syrien geführt habe, den oben genannten *Thaʿlaba* b. ʿAmr; ebenso Ibn Qotaiba. Also wohl alte Tradition. Wenn die Familie wirklich auch nach diesem Thaʿlaba benannt wurde, wie wir oben vermutheten, so war die Annahme ganz natürlich, aber historisch braucht sie doch nicht zu sein, und noch

---

[1]) Bei Ibn Hišâm 953 heifst der Mann ʿAmr b. alHabûla alGhassânî. Dies ist nach der Annahme, dafs die von Ibn alKelbî zu den Qoḍâʿa gerechneten (Bekrî 17f.) Salîḥ zu den Ghassân gehörten Ibn Qot. 313, also Stammgenossen der Gafniden waren.

[2]) Das Geschlecht der Ḍagâʿima existierte übrigens noch weit später. Ein Dichter (angeblich anNâbigha) besucht einen Mann desselben in Bostra oder einem Nachbarorte Jâqût 1, 588, 16, und noch gegen Châlid fochten Leute aus diesem Hause in Dûmat algandal Ṭabarî (Kosegarten) 2, 64 ult.

[3]) Die Leydener Handschrift hat نسطورس mit ausdrücklicher Bezeichnung der beiden س und des ر als nicht punctiert. Im Mugmil attawârîh, das bekanntlich ganz dem Hamza folgt, steht بسطورس (Pariser Handschrift fol. 113; gefällige Mittheilung von Zotenberg).

[4]) نسطورس ist, wohl weil man an den auch den Muslimen bekannteren Nestorius dachte (der so erscheint bei Masʿûdî 2, 328; Ibn Athîr 1, 237, 8; Abulf., Hist. anteisl. 112, 12 und auch bei Eutychius), leicht entstellt aus نسطوس = der syrischen Form ܐܢܣܛܣ. So, نسطوس, wird der Name geschrieben Tab. (Kosegarten) 2, 92, 7. 117, 4. Der Kaiser heifst in der Liste bei Masʿûdî 2, 331, bei Hamza 74 f. und bei Ibn Athîr 1, 237 نسطاس, bei Tab. 1, 743, 15 vollständiger انسطاس, wie auch Eutychius 2, 130 ff. giebt und wie bei Barhebraeus, Chron. ar. 148 für اناسطس herzustellen sein dürfte; aber diese Listen gehn auf fremde schriftliche Quellen zurück. Bei Jaʿqûbî 1, 175 und Abulf., Hist. ant. 112 (vrgl. Anm. 222) haben wir Entstellungen aus dem vollständigen انسطسيوس. — نويشر ist vielleicht zunächst aus نوس und dieses aus نسطوس verdorben.

weniger müssen wir diesen Thaʿlaba schon als regelmäſsigen römischen Vasallenfürsten ansehn. Übrigens unterschied Hamza den Mann wohl von dem Gafniden gleichen Namens, wie denn bei Ibn Chaldûn 2, 279 f. nach alter Quelle jener Thaʿlaba gar nicht zu den Kindern Gafna's gehört, sondern ein entfernter Vetter derselben ist. Für uns hat das natürlich keine Bedeutung. Bei Ibn Qotaiba 313 führt der Gafnide Thaʿlaba die Leute nach Syrien; nur ist bei ihm die Darstellung durch mekkanische Erdichtungen verwirrt.

Nicht unwahrscheinlich ist es mir, daſs der Γαβάλας[1]), welcher nach Theophanes (Bonn) 218 gegen 500 — auf das specielle Jahr $4\frac{97}{98}$ ist allerdings kein Verlaſs — in Palästina Einfälle gemacht hat[2]), diesem Hause angehörte und eben der Vater des alḤârith b. Gabala war. Es wäre ganz natürlich, wenn die Römer, wie in ähnlichen Fällen, hier einen halb gezähmten Wilden zum Gränzhüter gegen dessen ganz wilde Brüder genommen hätten. Der Name Gabala ist sonst nicht häufig. Zwar heiſst so auch ein Kinda-Häuptling (Wüstenfeld, Stammtafeln 4, 24), aber dieser ist ein Vorfahr des im äuſsersten Süden, in Ḥaḍramaut ansäſsigen alAšʿath b. Qais, dessen nähere Verwandtschaft mit den im Norden auftretenden Kinda-Fürsten wohl erst nachträgliche Fiction ist[3]). Nichts deutet aber darauf, daſs jener Γάμαλος mit den Kinditen Ḥogr Ἄγαρος u. s. w., mit welchen die Römer damals viel zu thun hatten, blutsverwandt war[4]).

Wie dem nun aber auch sei, der erste ganz sichre Fürst dieser Dynastie ist der, welcher auch der bedeutendste ist, *alḤârith b. Gabala*

---

[1]) So die besten Handschriften nach de Boor. Vulgo Γάμαλος. (In der Accentuation der griechischen Schreibung arabischer Namen erlaube ich mir einige Abweichungen von der Überlieferung, ohne übrigens auf meine Schreibweise selbst viel Werth zu legen.)

[2]) Kurz spricht über die Verwüstungen der Saracenen in Palästina Euagrius 3, 36.

[3]) S. Ibn Ḥagar 1, 97. Bei Ibn Hišâm 953 wird die Abkunft des alAšʿath von dem damals schon sagenberühmten König Ḥogr nicht anerkannt und höchstens von weiblicher Seite her zugegeben.

[4]) Romanus hat bei Theophanes drei verschiedene Erfolge: 1) er besiegt den Gabalas, 2) erobert die Insel Iotabe zurück, welche 473 vom Phylarchen der Petraea Ἀμορκέσος τοῦ Νοκαλίου γένους genommen war (Malchus, Dindorf 385), 3) besiegt den Agaros.

Ἀρέθας τοῦ Γαβάλα ܚܪܬ ܒܪ ܓܒܠܐ[1]). Der bei Malalas (ed. Oxon.) 2, 166 auf römischer Seite genannte Phylarch Ἀρέθας kann nicht gut ein Andrer sein. Natürlich ist er von dem andern dort 165 genannten Ἀρέθας streng zu unterscheiden. Dieser ist nach Gutschmid's glücklicher Entdeckung eben der schon erwähnte Kinda-Fürst alḤârith b. ʿAmr[2]).

Arethas (Sohn des Gabala) siegte nach Malalas 2, 166 über Alamundaros (von Ḥîra) im April 528[3]). Die neben dem Phylarchen genannten Γνούφας und Ναάμάν mögen nahe Verwandte desselben Hauses sein. Denn aus Γνούφας, das nicht richtig sein kann, da der Anlaut mit Doppelconsonanz nicht arabisch ist, stellt man am einfachsten Γούφνας her; *Gufna* als Nebenform von *Gafna* ist sehr wohl denkbar, und dafs ein Mitglied der Familie den Namen des Ahnen geführt habe, ebenfalls[4]). Der Name anNuʿmân, der von den Griechen immer Νααμάν[5]) geschrieben wird, ist in dem Hause später zweimal sicher zu belegen.

Der Phylarch von Palästina[6]), welcher sich stark bei der Unterdrückung des Aufstandes der Samaritaner im Jahre 529 betheiligte (Malalas 2, 180 f.)[7]), wird unser alḤârith gewesen sein. Dagegen spricht

---

[1]) Mit orthographischen Schwankungen ܚܐܪܬ u. s. w.

[2]) Vrgl. meine Ṭabarî-Übersetzung S. 171. Sicher hat alMundhir von Ḥîra den Kinditen gründlich geschlagen, aber getödtet haben nach der arabischen Überlieferung, welche die Angabe des Malalas mehr erläutert als eigentlich berichtigt, den flüchtigen König die Beduinen des Stammes Kelb Agh. 8, 64. Hierauf möchte ich jetzt die Stelle des Dichters Tab. 1, 853, 1 (in meiner Übersetzung 83, 1) beziehn. Den Kinditen alḤârith meint auch ein dem Labîd zugeschriebener, freilich kaum echter, Vers in der Ḥamâsa des Buḥturî (Leydner Handschrift S. 126), wo es heifst, auch alḤârith habe seinen Wohnsitz ʿÂqil verlassen müssen (s. dazu Jâqût s. v. عاقل).

[3]) Die Handschrift hat (nach der Collation meines Collegen Neumann) ausdrücklich das Datum April Ind. VI, welches in der Ausgabe (und natürlich dem Bonner Abdruck) fehlt. Bei Theophanes 275 ist dies in falschen Zusammenhang gebracht.

[4]) Schon Caussin de Perceval stellt Γνούφας zu جفنة (2, 231).

[5]) Auf die sehr schwierige Frage, wie und warum die Vocalaussprache in der griechischen Schreibung arabischer Namen von der arabischen Überlieferung abweicht, kann ich hier nicht eingehn.

[6]) D. h. Palaestina secunda (oder tertia?), denn in Palaestina prima war schwerlich Platz für einen arabischen Phylarchen.

[7]) Bei Theophanes 274 kürzer. Die Zeit des Aufstandes bestimmt M. Appel in der sorgfältigen Schrift „Quaestiones de rebus Samaritanorum sub imperio Romanorum

nicht, dafs es bei Land, Anecd. 3, 362 ult. heifst, gegen die Samaritaner habe sich gesammelt ein Heer von den Römern und den Saracenen (ܛܝܝܐ) in (der Provinz) Arabia (ܒܐܪܒܝܐ), denn der Machtbereich der Phylarchen fiel nicht mit den Gränzen der Provinzen zusammen; s. unten.

Diesen Arethas machte nun nach Procop, Pers. 1, 17 Justinian zum König und setzte ihn über viele Araberstämme, um ein Gegengewicht gegen Alamundaros, den König der persischen Saracenen, zu bilden. Es ist wirklich sehr wahrscheinlich, dafs es bis dahin keinen arabischen Ober-Phylarchen auf römischer Seite gegeben hat und dafs weder die Ḍagâʿima, noch diejenigen Kinditen, welche zeitweilig unter römischer Hoheit standen, noch andre solche Fürsten[1]) eine Macht besafsen wie später die Gafniden. Das Jahr dieser Erhebung erhellt aus Procop nicht sicher, aber der Zusammenhang spricht für 529. Eben im März 529 hatte alMundhir von Ḥîra seine argen Verheerungen ungestraft ausgeübt Theophanes 273.

Obgleich nun aber Procop ausdrücklich sagt, Arethas habe ἀξίωμα βασιλέως erhalten, so ist es doch nicht richtig, dafs er oder seine Nach-

---

peractis" (Göttingen 1874) S. 84 ganz fest durch Combination von Stellen der Vita des Sabas (Cotelerius 3, 339 und 353 sq.). Der Aufstand ward noch im selben Jahre niedergeschlagen, denn im April 530 ging Sabas nach Constantinopel, um für die Kirchen, welche von jenem gelitten hatten, Entschädigung zu erwirken.

[1]) Wie z. B. der Τερεβών, dessen Sohn Petrus und dessen Enkel Terebon, über die wir in der Vita des Euthymius (Cotelerius Bd. 2) interessante Mittheilungen erhalten. Der ältere Terebon safs eine Zeit lang zu Bostra im Kerker, weil ihn ein andrer Phylarch verklagt hatte; Euthymius († 20. Januar 473) verschaffte ihm die Freiheit. Sein Vater war als Flüchtling aus dem persischen Reich gekommen, angeblich, weil er die Christen gegen die Verfolgung des Königs Jezdegerd (438—457) unterstützt hatte. Sein Name Ἀσπέβετος ist in Wirklichkeit der persische Titel *(A)spehbet* = στρατηλάτης. Dafs hervorragende Leute fremder Herkunft an die Spitze arabischer Stämme treten, scheint öfter vorzukommen. — Der Name Τερεβών ist wohl als ظَرِبان zu deuten. Stände die Endung ων nicht ganz fest, so würde ich ihn mit ظَرِب identificieren, welcher nach der arabischen Überlieferung zum palmyrenischen Königshaus gehörte; eine Verwirrung von Dingen, die über 200 Jahr aus einander liegen, wäre da gar nicht so befremdlich. — Ein Phylarch Ταφάρας ܛܦܪܐ (ظَفَر, vielleicht أَظْفَر) fiel im Sommer 526 in Mesopotamien, wo er unter Belisar mit Auszeichnung gegen die Perser kämpfte Malalas 2, 175; Land 3, 257, vrgl. 259, 2.

folger officiell den Titel *βασιλεύς* hätten führen dürfen, welcher schlechterdings nur dem Kaiser zukam. Die griech. Schriftsteller, welche sich mehr oder weniger einer correcten Sprache befleifsigen, wenden *βασιλεύς* nach classischer Weise auch für Vasallenfürsten an[1]) und vermeiden dagegen das wirklich für solche Araberhäupter übliche *φύλαρχος*, wohl weil das Wort einst in Athen eine andre Bedeutung gehabt hatte![2]) Dafs die Syrer jene Fürsten oft „König" ܡܠܟܐ nennen (z. B. Wright Catal. 468*b*; Johannes von Ephesus S. 274, 15. 344, 3 v. u.; 349 ult. 383, 4), entscheidet Nichts, und noch weniger bedeutet natürlich, dafs die arabischen Dichter sie als „Könige" anreden. Denn die Documente, welche den officiellen Sprachgebrauch ausdrücken, geben dem Arethas und seinem Nachfolger nur den Titel *Patricius*[3]) und *Phylarch*, ev. mit einem zum Titel gehörenden Epitheton. Der vollständige Titel lautet auf einer vom Sohne und Nachfolger des Arethas selbst veranlafsten Inschrift Φλ(άβιος) Ἀλαμούνδαρος ὁ πανεύφημος πατρίκ(ιος) καὶ φύλαρχος Wetzstein 173 (Waddington 2562*c*). Entsprechend auf einer andern vom Sommer 578 ἐπὶ τοῦ πανευφ(ήμου) Ἀλαμουνδάρου πατρ(ικίου) Waddington 2110. So heifst es im officiellen Ton Theophanes 371 (November 561) Ἀρέθας ὁ πατρίκιος καὶ φύλαρχος. Ganz so in den Documenten über die Verhandlungen der Geistlichen, welche unter dem speciellen Schutz des Arethas und seines Nachfolgers beriethen, und die uns in einer syrischen Übersetzung vorliegen, welche bald oder gar unmittelbar nach der Abfassung von einem völlig sachkundigen Manne gemacht ist[4]). Da findet sich einmal ܚܒܝܒ ܟܠܗ ܦܛܪܝܩܝܘܣ ܚܪܬ (fol. 58*b*)

---

[1]) So hat schon Sozomenus 6,38 *βασιλίσσα* von der Mâwîja.

[2]) S. z. B. Procop a. a. O. ... ἡγούμενος, οἱ φύλαρχοι ἐπικαλοῦνται, als handelte es sich um ein fremdes oder vulgäres Wort. Ἡγούμενος steht öfter für φύλαρχος bei ihm und Andern z. B. Euagrius 6, 2; Menander Prot. c. 11 am Schlufs; Theophylact 3, 17. Φύλαρχος in diesem Sinne finde ich nach der Mitte des 4ten Jahrhunderts bei Ammian 24, 2, 4 und Sozomenus a. a. O. — Im 2ten Jahrhundert treffen wir dafür einen Ἀδριανὸς ὁ καὶ Σοαῖδος Μαλέχου (سُعَيْد بن مالك) ἐθνάρχης στρατηγὸς νομάδων Wetzstein, Ausgew. Inschriften nr. 10 = Waddington nr. 2196.

[3]) Zum Patricius war schon einmal ein arabischer Häuptling vom Stamme Kinda ernannt, Malchus (Dindorf 1, 386).

[4]) S. Wright, Catal. 701 ff. Die Stellen, welche Wright giebt, und die, welche ich mir selbst früher einmal notiert hatte, sind mir durch die Liebenswürdigkeit des

d. i. ὁ πανεύφημος πατρίκιος Ἀρέθας. Patrikios fehlt nie vor dem Namen ܚܪܬ und ܡܢܕܪ (Wright 713*b*). Das Epitheton ist gewöhnlich ܡܫܒܚܐ = ὁ ἐνδοξότατος[1]); einmal ܡܫܒܚܐ ܘܪܚܡ ܠܡܫܝܚܐ (fol. 85*a*) ὁ ἐνδοξότατος καὶ φιλόχριστος (πατρ. Ἀρ.) und umgekehrt ܪ̈ܚ ܠܡܫ̈ ܘܡܫ (fol. 76*a*) einmal ܡܫܒܚܐ ܘܡܗܝܡܢܐ (fol. 79*a*) ὁ ἐνδοξότατος καὶ εὐσεβέστατος (?). Das einmal vorkommende ܦܛܪ ܩ̈ܘܠܣܛܐ ܦ' ܚܪܬ (79*b*) ist wohl in ὁ μεγαλοπρεπέστατος πατρ. zurückzuübersetzen[2]). — Johannes Eph. sagt selbst einmal ܡܫܬܒܚܐ ܡܢܕܪ ܦܛܪܝܩܝܘܣ (265, 2)[3]) d.: „ὁ ἐνδοξότατος πατρίκιος Ἀλαμούνδαρος“, und der römische Groſswürdenträger redet den Alamundaros (und zwar nachdem er schon die eigentliche „Krone“ erhalten hat) officiell an „Herr Patricius“ Joh. Eph. 3, 41.

Den Titel βασιλεύς führte damals, wie gesagt, im römischen Reich eben nur der Kaiser[4]). Das Patriciat war aber eine sehr hohe Würde, welche zu erlangen auch unabhängige Barbarenkönige erfreut waren. Die Patricii bildeten unbedingt die höchste Rangklasse[5]); sie waren vorneh-

---

Hrn. Dr. Kleyn in Wijngaard (Holland) vollständig ergänzt. Derselbe hat sich alle diese Urkunden abgeschrieben.

[1]) Gewöhnlich steht allerdings das andre, synonyme, Particip desselben Verbums ܡܫܬܒܚ, ܡܫܬܒܚܐ für ἔνδοξος; s. schon Pesch. und Hrql. Luc. 7, 25. Eph. 5, 27; Hrql. 1 Cor. 4, 10, und so als Übersetzung des officiellen ὁ ἐνδοξότατος Πατρίκιος ܡܫܬܒܚܐ ܦܛܪܝܩܝܘܣ Joh. Eph. 342, 5. 414 ult.; Land 2, 88, 5. 267, 3 v. u., vrgl. ܡܫܬܒܚܐ bei einem Patricius ohne Nennung dieser Würde Joh. Eph. 343, 4 und bei einem Consularen Joh. Eph. 87, 6 sq. BB setzt ܡܫܬܒܚܐ gradezu = ἔνδοξος, s. Payne-Smith 255.

[2]) Rud. Schöll möchte es lieber für eine andre Übersetzung von πανεύφημος halten, was ich früher auch angenommen habe; doch scheint der Übersetzer in diesen Dingen ganz consequent zu sein.

[3]) An andern Stellen hat er bloſs ܡܫܬܒܚܐ ܡܢܕܪ = ὁ ἐνδοξότατος Ἀλ. 271, 12, 17 oder ܛܒܐ ܡܢ „der treffliche Mundhir“ 266 f.

[4]) *Rex* wird auch von Barbarenfürsten gesagt, die wenigstens theoretisch zum Reich gerechnet wurden. Theoderich ist auch wohl officiell vom Kaiser lateinisch als *rex* angeredet, aber sicher nie als βασιλεύς. Ob ῥήξ zu jener Zeit schon im rein officiellen Sprachgebrauch vorkommt, weiſs ich nicht; schwerlich das synonyme βασιλίσκος (syrisch ܒܣܝܠܝܩܐ).

[5]) Vrgl. Codex Iustin. 12, 3, 3. 12, 3, 5; Novella 81 (ed. Zachariae Bd. 2, 30); Joh. Eph. 3, 33 u. s. w. Sie werden sogar vom Kaiser als „seine Väter“ bezeichnet Novella l. c. Codex l. c. Vrgl. Menander Prot. cap. 8. 39. 49; andre Stellen bei Ducange s. v. *Patriciatus*.

nehmer als die Consularen und standen zum Kaiser in einem Verhältnifs, das einigermafsen mit dem der Cardinäle zum Pabst verglichen werden kann. Der Patricius führt wie Leute anderer hoher Rangklassen das Praedicat ὁ ἐνδοξότατος[1]) *vir illustris* (ἰλλούστριος). Dies Prädicat fanden wir eben in syrischer Übersetzung auf den Ghassânischen Patricius angewandt ܫܒܝܚܐ oder ܡܫܒܚܐ, und von seinen Kindern heifst es in einer der erwähnten Inschriften (Wetzst. 173) ἐνδοξ(οτάτων) αὐτοῦ τέκνων. Πανεύφημος, das specielle Praedicat dieser Phylarchen, kommt viel seltner vor, steht aber an Werth dem ἐνδοξότατος wesentlich gleich; aufser dem, was Waddington zur Inschrift 2110 anführt, vergl. den Eid hinter Nov. 8 (Zachariae 1, 123) und besonders Nov. 29 (Zachariae 1, 204), wo einer der allerhöchsten Beamten, der Quaestor Palatii, (sonst ἐνδοξότατος) πανεύφημος heifst. Auch ὁ μεγαλοπρεπέστατος *vir magnificus*, wenn ich dies richtig mit ܪܒ ܬܫ̈ܒܚܐ gleichsetze, wird den „Illustres" als Bezeichnung gegeben, s. Nov. 13, 3 (Zachariae 1, 226); Nov. 114 (Zachariae 2, 175); doch kommt es mir vor, als habe dies Epitheton keine so strenge Abgränzung wie die andern[2]).

Als durch kaiserliche Gnade ertheilt haben wir gewifs auch den Vornamen *Flavius* anzusehn, den Kaiser Iustinian wie seine Vorgänger führte. Es ist mir leider nicht gelungen, zu ermitteln, wer das Recht hatte, sich Flavius zu nennen[3]). Den Namen trägt z. B. Belisarius Novella 47 (Zachariae 1, 413), aber auch bei vornehmen Leuten nicht pa-

---

[1]) Beachtenswerth ist es, dafs der Positv ἔνδοξος noch viel höher steht, denn er gehört zum Kaisertitel ... εὐσεβὴς εὐτυχὴς ἔνδοξος νικητὴς τροπαιοῦχος ..., lateinisch ... pius felix *inclitus* victor ac triumphator.

[2]) Auf ὁ ἐνδοξότατος *vir illustris* folgt ὁ λαμπρότατος *vir clarissimus* und dann ὁ περίβλεπτος *spectabilis*, beide noch recht vornehme Leute.

[3]) Es wäre sehr zu wünschen, dafs ein competenter Gelehrter einmal das ganze Staatswesen der Iustinianischen Zeit mit der nun einmal für dasselbe hochbedeutenden Rang- und Titelordnung übersichtlich darstellte. An Quellen fehlt es nicht, aber es ist für Unsereinen recht unbequem, sich die Daten selbst zusammenzusuchen mit dem Bewufstsein, gewifs manchmal das Wichtigste zu übersehn. — Über *Flavius* hat Ducange s. v. zwar Vielerlei, aber unsre Frage entscheidet er nicht. Rud. Schöll schreibt mir, er glaube, mit dem Patriciat sei die Ertheilung des Namens Flavius verbunden gewesen, aber sicher sei er nicht.

tricischen Standes[1]) und selbst solchen in bescheidenen Lebensstellungen kommt er vor[2]).

Wie dem nun auch sei, man erkennt, dafs der Ghassânische Häuptling in der kaiserlichen Rangliste eine überaus hohe Stelle einnahm; aber man begreift auch, dafs die einfachen Leute im Orient sich nicht an dies trübselige Titelwesen kehrten und den Mann fürstlicher Macht und fürstlichen Ansehns einfach „König“ nannten[3]).

„Der Phylarch“ erscheint in der kaiserlichen Verordnung vom Jahre 536 als regelmäfsiger Machthaber in der Provinz Arabia[4]), dessen Competenz von der des Civil- und des Militär-Gouverneurs abgegränzt ist (Nov. 102; Zachariae 1, 357). Damit ist hier sicher unser alḤârith gemeint. Aber in der entsprechenden Verordnung über Phoenicia ad Libanum[5]) ist von τοῖς λαμπροτάτοις φυλάρχοις die Rede (Ed. 4; Zachariae 1, 366). Das geht auf Phylarchen geringeren Ranges — sie sind nur *viri clarissimi*, nicht *illustres* —, für welche in dieser, viel Wüstengebiet enthaltenden, Provinz genug Raum war. Dieselben unterstanden allerdings im Kriege und in gewissen Puncten auch schon im Frieden dem Oberphylarchen aus Gafna's Hause. Wir werden schon gleich sehn, dafs dieser auch bis Palmyra und weiter hin anerkannt wurde. Wir finden übrigens wirklich auf der merkwürdigen griechisch-arabischen Inschrift in Ḥarrân östlich von Damascus, also in der Provinz Phoenicia ad Libanum, im Jahre 568 einen Phylarchen Šaraḥîl b. Ẓâlim, Waddington nr. 2464 (der arabische Theil noch ein ganz wenig genauer ZDMG 38, 530). Die Namen weisen auf die Kinda-Dynastie, in der wir beide finden. Dafs sich Abkömmlinge

---

[1]) Waddington 1913. 2110, wo ein Beamter des Alamundaros so heifst, vielleicht eben als Client dieses Flavius.

[2]) Wadd. 2477. Aus früherer Zeit, nämlich von der Gründung durch Constantin her, der sich auch Flavius nannte, heifsen alle Einwohner des Fleckens Brâq Flavius, Waddington 2537*a b* und wohl Burton and Drake, Unexplored Syria 2, Taf. 4 nr. 57 (lies Φλ. Ζονῆμος τρίβουνος).

[3]) Sogar jener Ẓafar, der doch viel weniger Macht hatte, wird Land 3, 257, 10 „König der Saracenen“ genannt (l. 2 „Häuptling).

[4]) Das ist ungefähr das Ḥaurângebiet und die Belqâ.

[5]) Das ist die Provinz, worin u. A. Damascus, Emisa, Palmyra, Heliopolis (Ba'albek) lagen.

älterer Dynastien in einiger Macht erhalten hätten, wäre an sich ganz natürlich und entspräche namentlich auch dem Mistrauen, das die Römer immer gegen den Ober-Phylarchen fühlten[1]). Wie weit die Macht des Letzteren über die kleineren Häupter ging, war wohl weniger durch Gesetze als durch die thatsächlichen Umstände bestimmt. Wenn uns im Leben des h. Euthymius erzählt wird, daſs sich — etwa um die Mitte des 6ten Jahrhunderts — in jenen Gegenden zwei den Römern unterworfene Phylarchen Arethas und Asuados bekämpften und dabei groſse Verheerungen anrichteten (Cotelerius 2, 323), so sehn wir, daſs sich diese Verhältnisse nicht immer bloſs friedlich ordneten. Wir dürfen in jenem Arethas wohl unsern Ghassânier sehn und dürfen auch annehmen, daſs er den, sonst nicht bekannten, alAswad[2]) gründlich zu Paaren getrieben hat. Die Römer muſsten also selbst dann wohl einmal ein Auge zudrücken, wenn sich solche Streitigkeiten aus dem eigentlichen Gebiet der Nomadenhäupter auf das Land der Ackerbauer hinüberspielten.

Arethas kämpfte am Sonnabend vor Ostern, den 19. April 531, unter Belisar gegen die Perser Procop 1, 18; Malalas 2, 199 ff., vrgl. Land 3, 258. Die Schlacht ward gänzlich verloren. Über den damals von den Siegern gefangen genommenen Dux[3]) ʿAmr (Ἄβρος) Mal. 2, 202 können wir um so weniger etwas bestimmen, als ʿAmr wohl der allerhäufigste altarabische Name ist.

Gegen Ende der dreissiger Jahre hatte alḤârith einen Streit mit alMundhir von Ḥîra über die s. g. *Strata*, nach Procop das Wüstenland südlich von Palmyra (Procop, Pers. 2, 1), genauer wohl die Gegend zu beiden Seiten der Militär-Straſse von Damascus nach Palmyra und weiter bis Sergiopolis oder Circesium. Der Fürst von Ḥîra behauptete, die dor-

---

[1]) So wird der Kindite Qais (um 530 — vielleicht der in der Moʿallaqa des alḤârith v. 50 erwähnte) Phylarch in Palaestina (tertia) Nonnosus bei Photius nr. 3, und so Abûkarib, Fürst der Datteloase auf der Sinaihalbinsel Procop, Pers. 1, 19. Von Letzterem könnte vielleicht der kleine Fürst Joḥanna b. Ruʾba in Aila abstammen, mit dem Muḥammed einen Vertrag abschloſs Ibn Hišâm 302; Belâdhorî 59.

[2]) Auch ein alAswad kommt bei den Kinda vor (Wüstenfeld 4, 25), aber der Name ist allerdings recht häufig.

[3]) Δοὐξ ist hier aber kaum streng als Titel zu nehmen, sondern etwa „Häuptling“ oder „Heerführer“.

tigen Beduinenstämme seien ihm tributpflichtig; der Ghassânier beanspruchte die Autorität über sie für sich. Dieser Streitigkeiten, welche eine der Ursachen waren, dafs der kaum beendete Krieg der beiden Reiche wieder ausbrach, gedenkt eben aus diesem Grunde auch die persische Überlieferung, s. meine Ṭabarî-Übersetzung 238 f.

541 kämpfte alḤârith unter Belisar in Mesopotamien Procop 2, 16, 18. Er überschritt dann den Tigris und kehrte, ohne grofse Erfolge errungen zu haben, auf einem andern Wege heim als das Hauptheer; dadurch zog er sich den Verdacht zu, er habe es mit des Kaisers Sache nicht ehrlich gemeint eb. 19 und Hist. arcana 2. Vermuthlich hatte man in Constantinopel übertriebene Vorstellungen davon, was die zum Plündern, zum Verfolgen und zum Beunruhigen vortrefflichen und dabei höchst prahlerischen Araber im wirklichen Kampfe leisten könnten[1]).

Einige Jahre später (etwa 544) kämpften die beiden Araberfürsten wieder allein mit einander; dabei gerieth ein Sohn alḤârith's dem alMundhir in die Hände und wurde von diesem Heiden der Göttinn „Aphrodite“, d. i. al'Uzzâ, geopfert Procop. 2, 28. Auch während des Waffenstillstandes (von 546 an) setzten die beiden Gegner ihre Kämpfe fort Procop, Goth. 4, 11. Endlich gewann alḤârith im Juni 554 im Gebiet von Qinnesrîn (Chalcis) einen entscheidenden Sieg. Zwar fiel einer seiner Söhne, aber auch alMundhir selbst, s. Land 1, 13; Barh. 85 sq. (wohl, wenn auch indirect, aus Joh. Eph.). Die Schlacht war wahrscheinlich bei alḤijâr, denn an diesen Ort, dessen Lage in jener Gegend sich annähernd bestimmen läfst[2]), setzt eine arabische Tradition die Schlacht, worin alMundhir von Ḥîra gegen alḤârith fiel; wenigstens haben wir keinen Grund, Dhât-alḤijâr, das Ibn Athîr 1, 398 nennt, von jenem alḤijâr zu unterscheiden. Auch mit „dem Tag von alḤijârain“ in der Mo'allaqa des alḤârith v. 82 ist gewifs dieselbe Schlacht gemeint. Die Araber lassen

---

1) Vrgl. Malalas 2, 203.

2) AlḤijâr liegt in der Wüste (der Provinz) von Qinnesrîn Jâqût 2, 373; „alḤijâr und die benachbarten Gegenden von Qinnesrîn“ Ja'qûbî 2, 541, 4. Noch genauer erhellt die Lage aus Mutanabbî (Dieterici) 569; Bekrî 411 in Verbindung mit Jâqût 1, 527 (s. v. البدية); der Ort mufs sich in einiger Entfernung nördlich oder nordöstlich von Ḥamât befunden haben.

in der Schlacht, worin al Mundhir erschlagen ward, vorher sogar zwei Söhne des Siegers fallen Ibn Athîr l. c. Die arabischen Berichte verwirren eine oder gar zwei andre Niederlagen der Lachmiten gegen die Ghassânier mit dieser. Sie schwanken sogar darüber, welcher alMundhir von welchem alḤârith getödtet sei[1]). Natürlich haben wir mit dem besonnenen Ibn Athîr (1, 404), welcher diese „Verwirrung der Tage“ selbst hervorhebt, daran festzuhalten, dafs nur der uns aus Procop und Andern bekannte alMundhir (b. Mâ' assamâ') so gefallen ist. Damit ist entschieden, dafs diese Schlacht von der bei ʿAin Ubâgh verschieden ist, denn dieser Ort lag nahe bei Ḥîra[2]). Dagegen ist immerhin möglich, dafs der auch sehr berühmte „Tag von Ḥalîma“ derselbe ist wie der von alḤijâr, s. z. B. Ibn Athîr 1, 400 f. Wahrscheinlich ist auch Ḥalîma ein Ortsname[3]); die Araber erklären es freilich meist für eine Frau. Dafs anNâbigha „den Tag von Ḥalîma“ als einen Ruhmestag der Ghassânier aus früheren Generationen feiert, pafst gut zu der Identität mit dem von Ḥijâr, seit welchem damals reichlich 50 Jahre vergangen sein mochten, während der nächste grofse Sieg eines Gafniden um 25 Jahr näher lag. Was die Araber im Einzelnen von diesen Schlachten erzählen, ist sehr schön und characteristisch, kann aber natürlich nicht als geschichtlich gelten.

Der Dichter alḤârith b. Hilliza zählt unter andern Grofsthaten seines Stammes, der Jaškur (von den Bekr b. Wâil), dem König ʿAmr von Ḥîra (554 — etwa 568), dem Sohn und Nachfolger alMundhir's auf, dafs sie den Tod jenes Königs durch das Blut „des Herrn der Ghassân“ ge-

---

1) S. z. B. Abu ʿObaida im ʿIqd (Cairo) 3, 115; Bekrî 64, wo der Gefallne alMundhir b. alMundhir, d. i. der gleichnamige Sohn des berühmten Alamundaros ist. So auch Andre. — Ibn Qot. 314 läfst den Dichter Labîd als Knaben bei der Tödtung des alMundhir zugegen sein. Derselbe wäre dann beinahe 90 Jahre alt zu Muḥammed gekommen und weit über 100 Jahre alt geworden!

2) Die, welche ʿAin Ubâgh nach Syrien setzten (Bekrî 64), thaten das wohl nur, weil sie da den Ort unsrer Schlacht suchten. Dafs es nicht weit von Ḥîra war, sehn wir aus Jâqût 1, 74; Bekrî 46, 3; Ibn ʾAthîr 1, 245 und 1, 371 in Verbindung mit Jâqût 1, 552, 14. Ich hatte das früher nicht erwogen, als ich die Schlacht von alḤijâr mit der bei ʿAin Ubâgh identificierte (Ṭabarî-Übersetzung 170).

3) S. Bekrî 282 unten; Jâqût 2, 325, 13. Auch die Bezeichnungen مرج حليمة und وادى حليمة Ibn Athîr 1, 400 f. sprechen dafür.

rächt hätten (Moʿallaqa v. 61)[1]). Das mag irgend ein naher Blutsverwandter des Fürsten oder doch ein Mitglied aus Gafna's Hause sein; freilich könnte es immerhin auch auf einen andern angesehnen Mann des Stammes Ghassân gehn.

Im November 563 erschien alḤârith in Constantinopel, um dort mit der kaiserlichen Regierung zu verabreden, wer von seinen Söhnen sein Nachfolger werden solle und welche Maſsregeln gegen ʿAmr von Ḥîra zu treffen seien Theophanes 371. Wenn dem Araberfürsten das Leben und die Pracht der Kaiserstadt imponiert haben wird, so machte seine Person wiederum auf deren Bewohner einen gewaltigen Eindruck. Vor Allem auf den Neffen des Kaisers, Justinus, damals Kuropalates, später Nachfolger jenes. Als Justinus einige Jahre nach seiner Thronbesteigung kindisch wurde, da schreckten ihn, wenn er zu toben begann, die Kämmerlinge mit dem Ruf zur Ruhe: „still! Arethas Sohn Gabala's kommt über dich!“ Joh. Eph. 3, 2.

Diesem und jenem am Hofe war der Araber noch dadurch besonders unheimlich, daſs er der mächtige Beschützer der monophysitischen Irrlehre war, für deren Rettung er wohl eben so viel gethan hat wie die tugendhafte Kaiserinn Theodora. Die erste, durch Wunder ausgeschmückte, Berührung alḤârith's mit dem Stifter der syrisch-monophysitischen (jacobitischen) Kirche, Jacobus Baradaeus (Land 2, 361f.) ist allerdings wohl ganz ungeschichtlich; vrgl. Kleyn, Jacobus Baradaeus (Leiden 1882) S. 41f. Aber 542/3 setzte er es bei der Kaiserinn durch, daſs Jacobus Baradaeus und Theodorus als Bischöfe für die syrisch-arabischen Länder eingesetzt und dadurch die auf's Äuſserste bedrohte Existenz der monophysitischen Kirche gesichert wurde Land 2, 254; s. Kleyn a. a. O. 47f.[2]). Wie er sich seiner Glaubensgenossen annahm, das sehn wir aus Johannes von Ephesus und aus der schon oben S. 13 erwähnten Sammlung von Docu-

---

[1]) = Agh. 9, 18, 16. Der folgende Vers kann ursprünglich nicht in diesem Zusammenhange gestanden haben, da er von einem weit früheren Ereigniſs handelt. Es ist sehr zu bedauern, daſs schon die alten Erklärer über viele der in diesem Gedichte erwähnten geschichtlichen Ereignisse nichts Sicheres mehr wuſsten, wie namentlich Agh. zeigt.

[2]) Nach der auf Grund der Vita, die Joh. Eph. geschrieben, von einem Späteren durch Erweiterung hergestellten hat alḤârith dies persönlich in Constantinopel bewirkt Land 2, 368f.; doch ist das nicht eben wahrscheinlich.

menten, über welche Kleyn ausführlich handelt. Aus jenem erfahren wir aber auch, dafs er sich eifrig, wenngleich ohne Erfolg, bemühte, die ewigen dogmatischen und persönlichen Zänkereien zu schlichten, wodurch die monophysitischen Kleriker ihren Gegnern nach Kräften in die Hände arbeiteten. Freilich ist kaum anzunehmen, dafs der Gafnide von den Spitzfindigkeiten viel verstand, welche seine Kirche von der Staatskirche, und gar denen, welche die monophysitischen Parteien unter einander trennten. Allein schon politisch war es gewifs zweckmäfsig, die Confession zu unterstützen, an welcher in jenen Ländern die grofse Mehrheit des Volkes hing, innerhalb dieser Confession aber für Ruh und Frieden zu sorgen[1]).

Auch im Angedenken der Araber steht dieser Fürst grofs da. Sie nennen den alḤârith b. Gabala auch alḤârith b. Abî Šamir; Gabala's Kunja war also *Abû Šamir* gewesen. Denn dafs der Ghassânier alḤârith b. Abî Šamir wirklich unser Arethas ist, sheint sich aus Folgendem zu ergeben: Der Dichter ʿAmr b. Kulthûm redet einen Häuptling an, welcher unglücklich mit seinem Stamme, den Taghlib, gekämpft hatte, und den die Überlieferung gewifs mit Recht für einen Gafniden hält: „o Sohn des Abû Šamir“ Ibn Athîr 1, 398. Da nun eben dieser ʿAmr b. Kulthûm ungefähr um die Zeit, wo Arethas starb, den König ʿAmr von Ḥîra erschlug[2]), so ist nicht anzunehmen, dafs er noch später im Interesse der Könige von Ḥîra gegen die Ghassânier gekämpft und gedichtet hat; mithin wird der Sohn Abû Šamir's unser Arethas sein. So wird denn alḤârith b. Abî Šamir auch als der genannt, welcher den alMundhir von Ḥîra umgebracht habe Ibn Qotaiba 314; Ḥamâsa 402 u. A. m. Auch die, freilich nichts weniger als zuverlässige, Geschichte, welche alḤârith b. Abî Šamir wegen der Harnische des Amraalqais mit Samuel (asSamaual) b. ʿÂdijâ von Taimâ in Conflict bringt oder ihn wenigstens als dessen Zeitgenossen ansieht (Agh. 19, 99), träfe auf alḤârith b. Gabala, da das Ereignifs ungefähr 550 geschehn sein müfste. Da nun unser Arethas weit-

---

[1]) An sich ist es freilich für die Syrer (und Kopten) kein Glück gewesen, dafs die Unterdrückung des Monophysitismus nicht durchgeführt und sie damit auf die Dauer Europa entfremdet wurden.

[2]) S. meine Ṭabarî-Übersetzung 172.

aus der Hervorragendste seines Geschlechts war, so erklärt es sich leicht, dafs irgend ein wirklicher oder angeblicher Ghassânischer Fürst, dessen Namen man nicht weifs, gern ohne Weiteres alḤârith b. Šamir genannt wird, zuweilen mit den stärksten Verstöfsen gegen die Zeitfolge. So soll alḤârith b. Abî Šamir einerseits den Kinditen Ḥogr Âkil almurâr, den Urgrofsvater des Dichters Amraalqais, getödtet haben Agh. 8, 25, was so etwa um 450 geschehn sein müfste[1]); anderseits wird er wieder als Zeitgenosse der letzten Jahre Muḥammed's genannt. Er soll der Ghassânier sein, an welchen der Prophet im Jahre 628 schreibt Ibn Hišâm 971 — wo Ibn Hišâm selbst nach seiner genaueren Kenntnifs glaubt Gabala b. alAiham verbessern zu müssen. Wieder im folgenden Jahr wird er genannt zugleich mit dem damals auch längst todten anNuʿmân von Ḥîra Ibn Hišâm 77 = Wellhausen's Wâqidî 377 = Ibn Doraid 267 ult. etc. Er (oder Gabala b. alAiham, wie wieder corrigiert wird) regiert noch 630 Wellhausen's Wâqidî 413[2]). Selbst der kritische Belâdhorî setzt deshalb voraus, dafs alḤârith b. Abî Šamir unmittelbar vor dem letzten Gafniden Gabala b. alAiham regiert habe (S. 136). So kommt es denn, dafs der Genealoge Ibn al Kelbî, welcher die Prophetentradition stark berücksichtigt, dem Grundstock der Genealogie, der nur bis zu den Kindern des Arethas geht, noch einen alḤârith b. Gabala und einen alḤârith b. Abi Šamir anreiht, die nun (als ihre eignen Urenkel!) bis in Muḥammed's Zeit reichen. — Für einen beliebigen Ghassânier steht alḤârith b. Abî Šamir noch Ibn Athîr 2, 218, 3 = Jâqût 3, 913, 8. 4, 653, 18.

Nicht sehr wahrscheinlich ist es, dafs unser Arethas auch „der Sohn der *Mârija*“ [3]) ist, wie Ibn Qotaiba 314; Hamza 117; Ibn Doraid

---

[1]) Eine ähnliche Verwirrung der Zeiten finden wir Agh. 9, 167 oben, wo die Frau des alḤârith b. Abî Šamir Schwester der Frau des Kinditen Âkil almurâr ist. — Bei Ibn Athîr 1, 401 wirbt alḤârith b. Abî Šamir Gabala, Enkel des alAʿrag! (s. unten), um die Tochter des Lachmiten alMundhir b. alMundhir, der erst nach des Arethas Tode (569) regiert hat (in der 2. Hälfte der siebziger Jahre). — Ähnliche Anachronismen kommen noch mehr vor.

[2]) In derselben Tradition Ibn Hišâm 911 und Buchârî 3, 180 (Krehl) steht nur „der König der Ghassân“ ohne Namen.

[3]) Darüber, dafs dieser Name „Herrinn“ bedeutet und nichts mit *Maria* zu thun hat, s. meine Mandäische Grammatik 112.

259, 9[1]) annehmen. Der Ausdruck stammt aus einem Verse des Ḥassân „die Kinder Gafna's um das Grab ihres Vaters herum, das Grab des Sohns der Mârija, des Edlen, Freigebigen“ (Dîwân S. 70, 14 und sonst öfter angeführt). Für die Späteren lag es nahe, auch hier den Berühmtesten des Geschlechts zu sehn, aber allem Anschein nach handelt es sich um einen zur Zeit des Dichters — etwa im 2ten Jahrzehnt des 7ten Jahrhunderts — erst kürzlich verstorbenen Mann. Andere verwenden den Namen „Sohn der Mârija“ für einen andern Gafniden (Ja'qûbî 1, 236; Mas'ûdî 3, 217; vrgl. noch Agh. 9, 167); das Alles ist bloſs errathen[2]). — Für einen beliebigen Gafniden steht „alḤârith b. Mârija der Ghassânier“ Tab. 1, 851, 17.

AlḤârith b. Gabala muſs 569 oder Anfang 570 gestorben sein, hat also wenigstens 40 Jahr als Ober-Phylarch regiert. In den kirchlichen Documenten aus den Jahren 568 und 569 — s. das Nähere bei Kleyn — wird er noch genannt, während im Frühling 570 schon sein Sohn regiert.

Dieser, *alMundhir* (*Alamundaros*) b. alḤârith hatte sich nämlich sofort nach seinem Regierungsantritt mit den persischen Arabern herumzuschlagen, welche nach dem Tode des gefürchteten Kriegers in sein Gebiet eindrangen, und besiegte am Himmelfahrtstage (20. Mai) 570 den neuen König von Ḥîra Qâbûs Land 1, 13 f. Dann gewann er eine zweite Schlacht Joh. Eph. 6, 3, wo Genaueres. Die erstere ist wahrscheinlich die Schlacht von 'Ain Ubâgh, wovon die Araber viel singen und sagen, da ihr Schauplatz weit im Osten lag und der Sieger nachher bis auf drei Stationen (mansiones) Ḥira nahe kam, was ganz zu der Lage von 'Ain

---

1) Wo جبلة بن الحارث für الحارث بن جبلة verschrieben ist, vergl. Z. 10.

2) Mârija hieſs auch eine Frau alMundhir's von Ḥîra, die Mutter des alAswad (Ṭabarî-Übersetzung 513). Einen andern Sohn der Mârija von fürstlichem Ansehen preist alḤârith b. Hilliza Mufaḍḍalîjât nr. 26 und Agh. 9, 178 ult. (sind beide Stellen wirklich von demselben Dichter, so wird allerdings der Besungene in beiden derselbe sein; sonst läge es nahe, bei dem Helden der Muf. an den Lachmiten oder auch an den Ghassânier zu denken). — Der Name Mârija kommt auch sonst noch öfter vor. Die mythische „Mârija mit den Ohrgehängen“ (Freytag, Prov. 1, 422 und sonst) wird zwar von den Arabern mit der Mutter des Ghassâniers identificiert, aber das ist mehr als unsicher. — Selbst für Caussin ist es ein starkes Stück, daſs er die *Μαυία* des Sozomenus (6, 38) mit der Mârija, der Mutter des Gafniden gleichsetzt; „quelque ancien erreur de copiste“ soll die Verschiedenheit bewirkt haben (2, 220f.)! *Mâwîja* und *Mârija* sind sogar prosodisch von verschiedenem Gewicht.

Ubâgh (S. 19 Anm. 2) zu stimmen scheint. Übrigens hatte alMundhir schon bei Lebzeiten seines Vaters an der Spitze der römischen Araber glücklich gegen die persischen gekämpft Menander Prot. c. 17 am Schlufs.

In die erste Zeit seiner Herrschaft fällt eine unter seinem Schutz gehaltene kirchliche Versammlung[1]), welche die Ketzerei der Tritheiten verdammte. Die Versammlung bezieht sich nämlich auf Dinge, welche 568 und 569 geschehn sind, aber unter den Unterschriften findet sich auch die eines „Priesters des preiswürdigen (ἐνδοξότατος) und christusliebenden Patricius Mundhir"; d. i. wohl eine Art Hofcaplan des regierenden Phylarchen, was damals also schon alMundhir war.

Kaiser Justinus (somit vor dem 7. Dec. 574, wo Tiberius Mitregent war) bewilligte dem arabischen Fürsten nicht nur nicht das von diesem zu weiteren Unternehmungen geforderte Geld, sondern er beauftragte sogar den Patricius Marcianus, alMundhir mit List umzubringen Joh. Eph. 6, 3 f. Der Anschlag[2]) ward vereitelt, aber nun empörte sich alMundhir und blieb ungefähr 3 Jahre im Aufstand. Die persischen Araber konnten jetzt ungestraft das römische Gebiet plündern. Wohl oder übel mufste man den Gafniden begütigen. Nach mehren vergeblichen Verhandlungen liefs sich dieser endlich darauf ein. An der von allen Bewohnern Syriens überaus heilig gehaltenen Grabstätte des heiligen Sergius in Ruṣâfa (Sergiopolis), wo er sich auch byzantinischer Tücke gegenüber sicher glauben durfte, traf er mit dem von Constantinopel gesandten Patricius Justinianus zusammen, und die Versöhnung kam zu Stande. Dies geschah noch bei Lebzeiten des Kaisers Justin († 6. Oct. 578), s. Joh. Eph. 6, 4 (S. 351). Wahrscheinlich hatte alMundhir auch schon im Sommer 578 seinen Frieden mit dem Kaiser gemacht, als die oben erwähnte Inschrift Waddington 2110 gesetzt wurde; denn wenn deren Ort Ḥaijât (östlich von der Leǵa, nördlich vom Ḥaurân-Gebirge, etwa 10 deutsche Meilen SSO. von Damascus) auch sehr abgelegen ist, so wäre doch wohl selbst da die

[1]) Sie ist für uns namentlich wegen der vielen in den Unterschriften vorkommenden Ortsnamen interessant; s. den Text der Unterschriften in Wright's syr. Catalog 709 ff. und meinen Aufsatz ZDMG. 29, 419.

[2]) Wir sind für diese Ereignisse ganz auf Joh. Eph. angewiesen, der für die Gafniden, die Beschützer seines Glaubens, stark eingenommen ist. Aber es scheint wirklich, dafs das Verfahren des Hofes ebenso schlecht wie thöricht war.

Anerkennung des Fürsten mit seinen ganz officiellen Titeln auf einer Inschrift kaum denkbar, so lange er sich nicht wieder unterworfen hatte.

Am 8. Februar 580 kam alMundhir mit zwei Söhnen nach Constantinopel, wo er höchst ehrenvoll empfangen wurde. Kaiser Tiberius ertheilte ihm die wirkliche Krone (*tâghâ*), während früher Araberfürsten höchstens den Reif (*klîlâ*) hatten tragen dürfen Joh. Eph. 4, 39, 42[1]). Die Kunde von diesem Ereignifs drang bis nach Iberien; der Abt Johannes von Biclar schreibt davon, wie „Aramundarus Saracenorum rex" vom Kaiser Tiberius in Constantinopel gnädig aufgenommen sei; freilich setzt er das Ereignifs in ein ganz falsches Jahr[2]).

AlMundhir benutzte die Gelegenheit, um seinen Glaubensgenossen Schonung zu erwirken und unter ihnen Frieden zu stiften. Am 2. März 580 hielt er eine Versammlung derselben ab Joh. Eph. 4, 40. Überhaupt nahm er sich der Monophysiten so kräftig an wie sein Vater Joh. Eph. passim[3]).

---

[1]) Rud. Schöll schreibt mir, die *tâghâ* könne nur das διάδημα sein, der Reif der στέφανος ἀπὸ χρυσοῦ *corona aurea*. Für die Ertheilung des Diadems wie für die Anwendung des goldnen Reifs führt er verschiedene Beispiele an, allerdings aus früherer Zeit.

[2]) Er hat die Reise beim 9. Jahr Justin's (November 573—74), während Tiberius, den er als Caesar nennt, erst am 7. Dec. 574 Caesar und Mitregent geworden ist. Gutschmid schreibt mir, auf die Kaiserjahre sei bei Johannes Biclarensis kein Verlafs, die Datierung nach dem Westgothenkönig ergebe 575 für den Ansatz des Abtes. Gutschmid möchte darum eine zweimalige Reise des Arabers nach der Kaiserstadt annehmen. Aber Johannes von Ephesus hätte jene erste Reise nicht verschweigen können, wenn sie jemals stattgefunden und noch dazu so viel Aufsehn gemacht hätte, dafs man im fernen Westen davon hörte. Dazu wäre es schwer, diese Reise im Jahr 575 vor den Machinationen gegen alMundhir's Leben und seinen 3jährigen, 578 schon beendeten Aufstand unterzubringen. Die Worte des Barh. 92, welche man auf eine Reise gleich nach Antreten der Mitregentschaft durch Tiberius deuten könnte, gehn auf die bekannte Reise (allerdings über ein Jahr) nach dessen wirklichem Regierungsantritt (6. Oct. 578); das erhellt deutlich aus den Worten des Michael Syrus, den Barh. hier nur verkürzt (s. die Übersetzung des armenischen Textes von Dulaurier journ. as. 1848, 2, 298; Langlois 211). Und Michael hatte, wie die Vergleichung lehrt, nichts weiter vor sich als Joh. Eph. und giebt nur eigne Einfälle und Ansichten hinzu. — Vermuthlich hat hier also der Abt von Biclar wirklich den Antritt der Mitregentschaft und der Alleinherrschaft durch Tiberius verwechselt und den Besuch so in den Anfang jener statt dieser verlegt.

[3]) Nach Joh. Eph. 4, 21, 36 (auch Barh. 93 stützt sich auf Joh. Eph.) waren die Araberstämme eifrige Monophysiten. Das ist natürlich nicht all zu ernst zu nehmen.

Dieser Fürst ist denn wohl auch der König *Abû Karib*, auf welchen die Beischrift eines syrischen Codex (Wright's Catalog 468) den himmlischen Segen erfleht. Dieselbe ist geschrieben in der Umgegend von Palmyra[1]) „in den Tagen der heiligen wahren Bischöfe Jacob und Theodorus". So häufig grade diese Namen sind, so können die Beiden in dieser Verbindung im 6ten Jahrhundert, wohin die Schrift aus paläographischen Gründen gehört, nach Allem, was wir wissen, doch nur die schon oben S. 20 erwähnten Jacobus (Baradaeus) und Theodorus sein, die zusammen ernannt waren und in einer ganzen Reihe monophysitischer Documente aus jenen Gegenden entweder allein als Vertreter ihrer Kirche oder doch an der Spitze ihrer Geistlichkeit erscheinen, s. Wright's Catalog 703[a] (nr. 11). 705[b] (nr. 25). 706[b] (nr. 30. 31). 708[a] (nr. 33). 709 (nr. 38. 39); Land 3, 314, 11. Da nun Jacobus Baradaeus 578 gestorben ist, so kommen für jenen Königsnamen nur alḤârith b. Gabala oder sein Sohn alMundhir in Frage. Für Letzteren spricht, dafs hier auch „für alle seine gläubigen Brüder" gebetet wird. Dafs alMundhir eine Anzahl Brüder gehabt hat, betont die arabische Tradition von Ibn alKelbî an, und auch Johannes von Ephesus (4, 3, 42, 63. 6, 4) spricht von alMundhir's Brüdern als in Gemeinschaft mit ihm handelnd. Ist aber dieser Abû Karib nicht alMundhir, so könnte es nur sein Vater sein. Wenn Hamza einem spätern anNu'mân die Kunja Abû Karib giebt, so hat das für uns keine Bedeutung. Dafs die arabische Tradition diese Kunja in naher Verbindung mit alḤârith kannte, sehn wir übrigens daraus, dafs bei Ibn Athîr 1, 399 ein

---

Freilich konnte ein im Geruch der Heiligkeit stehnder Mann wie Jacobus Baradaeus bei ihnen abergläubischer Verehrung sicher sein, und Reliquien und Bilder werden in hohem Ansehn gestanden haben. Aber das hinderte die Mehrzahl dieser Stämme nicht, 50—60 Jahr später ohne Widerstand zum Islâm überzugehn.

[1]) Die beiden andern Beischriften 468*b* beziehn sich aber nicht auf ganz dieselbe Gegend. Dafs sie zum Theil schwer lesbar sind, bezeugt auch Wright durch die Verbesserung S. xxxv. Nun hat mir Hr. Dr. Gottheil nach genauer Untersuchung der Stelle in der Handschrift mitgetheilt, dafs, wie ich vermuthet hatte, auch der beschädigte Ortsname der ersteren Beischrift eher ܢܒܟ̈ zu lesen sei als ܢܒܠ̈, also wie in der zweiten. Das ist nun sicher der Ort, welchen die Araber *Nabk* nennen, auf dem nördlicheren Wege von Damascus nach Palmyra. Dazu pafst, dafs der Ort zum Bisthum Damascus gehören soll, während grade hier das Bisthum Palmyra daneben ausdrücklich erwähnt wird.

andrer in der Entscheidungsschlacht gegen alMundhir von Ḥîra gefallner Sohn desselben so genannt wird.

Sehr merkwürdig ist es nun aber, dafs jene Bemerkung nach dem Segen noch hinzufügt: „und die Irrenden unter ihnen [seinen Brüdern] führe zur wahren Erkenntnifs zurück (o Gott)“. Hier kann nur von leiblichen Brüdern des Königs die Rede sein, welche irrgläubig waren. Es gab also unter den Söhnen des Arethas solche, die nicht correct monophysitisch gesinnt waren. Das dürfte nun mit dem Sturze dieses Fürsten in Verbindung stehn.

Als nämlich noch im Jahre 580[1]) der κόμης Ἀνατολῆς Mauricius mit alMundhir zusammen einen Einfall in die persische Königsprovinz machen wollte, fand er die grofse Brücke (über den Euphrat) abgebrochen, und der ganze Feldzug mislang Joh. Eph. 3, 40. 6, 16[2]); Euagrius 5, 20; Theophylact 3, 1. Man schob dies auf ein verrätherisches Einverständnifs alMundhir's mit dem Feinde[3]). Mauricius zankte sich heftig mit ihm und verklagte ihn in Constantinopel[4]). Grade damals machte aber alMundhir einen glücklichen Einfall in das Gebiet seines speciellen arabischen Gegners, steckte dessen Stadt Ḥîra in Brand und brachte reiche Beute heim Joh. Eph. 6, 18. Dieses Ereignisses gedenkt ein Zeitgenosse, der christliche arabische Dichter ʿAdî b. Zaid aus Ḥîra[5]), und auch die arabische Tradition weifs darum, ohne jedoch den Namen des Gafni-

---

[1]) Die Darstellung bei Theophylact 3, 1 ist chronologisch klar geordnet, und man darf sich nicht durch die höchst wirre Anordnung des Zeitgenossen Joh. Eph. verleiten lassen, ein früheres Datum anzunehmen. Beiläufig bemerkt, ist Theophylact überhaupt, wenn man von seiner unbeschreiblich geschmacklosen Form absieht, ein sehr ehrenwerther und zuverlässiger Historiker.

[2]) Der Bericht im 6. Buche stimmt nicht in allen Dingen mit dem im dritten.

[3]) Wenn wir hier auch nicht viel auf den für den Gafniden eifrig eintretenden Joh. Eph. geben können, so ist der Verdacht doch an sich nicht wahrscheinlich. Die Aussicht, da einen grofsen Erfolg zu erringen, wo einst Julian gescheitert war, konnte von vorn herein nicht bedeutend sein.

[4]) Barh. 92, 3 v. u. ist die Lesart des cod. Vat. 167 ܡܘܪܝܩܝܣ (Mittheilung Guidi's) einzusetzen; so hatte schon Roediger vermuthet (handschriftlich in seinem Exemplar der lat. Übersetzung, jetzt auf unserer Bibliothek).

[5]) Agh. 2, 27; Tab. 1, 1021, vergl. Hamza 118; Jâqût 3, 612; Bekrî 223 (einzelne Verse noch sonst zerstreut). Diese Verse müssen lange vor ʿAdî's Gefangennahme liegen.

den zu kennen[1]). Gewiſs gelang, wie schon ʿAdî ziemlich klar sagt, der Anschlag nur, weil der König von Ḥîra[2]) grade abwesend war. Dieser Erfolg des Arabers, in dessen Genossenschaft die kaiserlichen Truppen eben noch so kläglich gefahren waren, mag das Übelwolleu gegen ihn grade noch gesteigert haben. Wahrscheinlich trug auch der kirchliche Gegensatz wie zu dem Mistrauen gegen die Gafniden überhaupt, so besonders zu der damaligen Erbitterung gegen alMundhir bei. Freilich sah man im Nothfall bei der Ertheilung der höchsten Würden an barbarische Machthaber von dem Erforderniſs der Rechtgläubigkeit ab, das man dem gefangenen Gelimer gegenüber aufrecht erhalten konnte (Procop, Vand. 2, 9 am Ende). Der Arrianer Theoderich war Consul und Patricius gewesen; alḤârith b. Gabala war das Patriciat gelassen, auch nachdem er sich als Schirmherr der Monophysiten heraus stellte, und sein Nachfolger war gar vom Kaiser persönlich ausgezeichnet: aber der beschränkte Confessionalismus lieſs das nur mit höchster Entrüstung geschehn, und sicher gab es in Constantinopel manche einfluſsreiche Leute geistlichen und weltlichen Standes, die den dringenden Wunsch hegten, der syrischen Kirche ihren Beschützer zu entreiſsen, und wäre es auch wider Treu und Glauben. Die galten ja dort überhaupt nicht viel, am wenigsten gegen Ketzer.

So erhielt denn der Syrer Magnus den Auftrag, sich des Fürsten zu bemächtigen, dessen „Patron" und Freund er war. Er lud ihn ein nach dem jüngst zur Stadt erhobenen[3]) Örtchen Ḥewârîn (im Wüstenge-

[1]) Die alte Erzählung sagt nur „ein Mann von den Ghassân" Agh. und Tab. Die Vermuthungen bei Tab., Hamza, Ibn Athîr 1, 401 sind ohne Werth. Billige Weisheit ist es, wenn Hamza von diesem Ereigniſs den Beinamen Muḥarriq „Verbrenner" (s. oben S. 7) herleitet.

[2]) Nach den Arabern anNuʿmân b. alMundhir, aber dessen Name ergab sich für die Späteren durch den Dichter ʿAdî b. Zaid von selbst (s. meine Ṭabari-Übersetzung S. 312ff.); es ist aber die Frage, ob dieser damals schon regierte.

[3]) Nach Joh. Eph. war das erst durch Magnus geschehn; Stadtgerechtigkeit hatte der Ort aber wohl schon von Justinian erhalten, denn er heiſst in der Bischofsliste Εὐάριος [sc. κάστρον] ἤτοι Ἰουστινιανούπολις (Not. episc. ed. Parthey 91); oder ist dafür Ἰουστινούπολις zu setzen? — Die unbequeme Form ܚܘܪܝܢ, حُوَّارِين ist von Römern und Griechen sehr bald so, bald so wiedergegeben.

gebiet zwischen Damascus und Palmyra), zur Einweihung einer von ihm erbauten Kirche, einer Feierlichkeit, bei der selbst der Patriarch von Antiochia zugegen sein sollte. Als der arglose Araber nun aber in den befestigten Ort kam, nahm sein Vertrauensmann ihn gefangen und führte ihn nach Constantinopel, wo er in freier Gefangenschaft gehalten wurde mit einer Frau[1]), zwei Söhnen und einer Tochter Joh. Eph. 3, 41.

Dies geschah noch unter Tiberius († 14. Aug. 582), also wohl 581 oder eher im Anfang 582. Sein Nachfolger Mauricius verbannte den Gafniden, dessen persönlicher Feind er war, nach Sicilien Joh. Eph. S. 147 (Register)[2]); Euagrius 6, 2. Auch einer seiner Grofsen, Namens Sergius (Sergîs), wurde verbannt Joh. Eph. eb.[2]).

AlMundhir hatte also ungefähr 13 Jahr regiert. Wenn nun Hamza einem Doppelgänger alMundhir b. alHârith wirklich 13 Jahr giebt, so mag das allerdings eine vereinzelte echte Überlieferung sein; der wahre alMundhir hat bei ihm allerdings nur 3 Jahre.

Zugleich mit der Wegführung alMundhir's wurden auch die Lieferungen (*annonae*) an seine Familie eingestellt. Ein Grund mehr, nicht ruhig zu bleiben! Seine vier Söhne standen auf unter Führung ihres ältesten Bruders *anNu'mân*, zogen sich in die Wüste zurück und plünderten von dort aus nicht blofs kaiserliches Gut, sondern verheerten weithin die Länder, nach Johannes Eph. allerdings ohne Mord und Brand; doch dürfen wir das gewifs nicht so genau nehmen. Auch er giebt zu, dafs sie sehr grofse Beute machten. Sie schüchterten sogar die Besatzung von Bostra, der wichtigsten Festung jener Länder nach Damascus, so weit ein, dafs sie ihnen das dort liegende Kriegsgeräth[3]) und die sonstige Habe

[1]) Der Ausdruck ܥܡ ܐܢ̈ܬܬܗ ist bei Joh. Eph. 217, 1 so gefafst, dafs man daraus schliefsen darf und fast schliefsen mufs, er habe mehrere Frauen gehabt. Und auch bei den Worten, „die persischen Araber möchten meine Frauen und meine Kinder ܢܫ̈ܝ ܘܒܢ̈ܝ gefangen nehmen" 216, 11 denkt man doch am einfachsten an seine eigenen Frauen. Wie anNu'mân von Ḥîra auch nach seiner Taufe in Polygamie lebte, so mag das bei den Gafniden ebenfalls vorgekommen sein. Die Kirche übersah so etwas bei dem frommen Fürsten, zumal ihm gewifs höchstens eine Frau kirchlich angetraut war.

[2]) Leider fehlen jetzt die betreffenden Capitel selbst in der Handschrift.

[3]) Wir können hieraus schliefsen, dafs man dem Phylarchen bei einem grofsen Heereszuge allerlei Kriegsgeräth stellte, sich dies aber zur Vermeidung gefährlichen Gebrauchs nachher wieder abliefern liefs und in der Festung aufbewahrte.

ihres Vaters auslieferte. So trieben sie's „lange Zeit“ Joh. Eph. 3, 42; Euagrius 6, 2.

Kaiser Tiberius sandte nun den oben genannten Magnus gegen sie ab mit einem Bruder alMundhir's — wohl einem der von jenem monophysitischen Schreiber (oben S. 27) als irrgläubig bezeichneten — als seinem Nachfolger, aber derselbe starb schon nach 10 Tagen Joh. Eph. 3, 43[1]). Allein nach einiger Zeit gelang es byzantinischer Arglist, auch anNuʿmân in's Garn zu locken. Er liefs sich auf eine Unterredung mit jenem Magnus ein und ward dabei ebenfalls gefangen genommen. Michael Syrus (Dulaurier 300; Langlois 213), der aus der uns verlornen Stelle des Johannes Eph. schöpft[2]) und dem wieder Barhebraeus 93 folgt, giebt ausdrücklich an, dafs dabei die monophysitische Bekenntnistreue anNuʿmân's eine Rolle gespielt habe; doch können wir nicht wissen, wie viel hier Michael willkürlich oder vielleicht schon Johannes gutgläubig übertreibt. Der Gefangene ward dann auch nach Constantinopel geführt und dort auf des Kaisers Anordnung „in freier Haft“ gehalten, obgleich ihn Alle zum Tode verurtheilt hatten Joh. Eph. S. 147 (Register zu 3, 56); Euagrius 6, 2[3]). Aus den Worten des Euagrius geht ziemlich sicher hervor, dafs Mauricius schon regierte, als er nach der Hauptstadt kam; auf der andern Seite geschah dies nach dem Register zu Joh. Eph. 6, 44, vrgl. 41 (S. 340), ehe noch Ind. III begann[4]): also zwischen dem 14. Aug. 582 und dem 1. Sept. 584. Wahrscheinlich aber war es dem letzteren Termine näher[5]). AnNuʿmân lebte noch, als Euagrius schrieb (593/4; s. 6, 24). Die Regierungszeit anNuʿmân's, wenn derselbe überhaupt in eignem Namen als Fürst aufgetreten ist, läfst sich nicht bestimmen. Doch mag immerhin das eine Jahr, welches Hamza den anNuʿmân b.

---

1) Hier beginnt leider die grofse Lücke der Handschrift.

2) Dionysius von Telmaḥrê hat leider von dem Allen nichts, wie ich von Guidi erfahre.

3) Vorgänge wie die hier erzählten haben sich im Orient bis in unsere Zeit nur zu oft wiederholt. Die grofsen Reiche späterer Zeit konnten es mit den Byzantinern fast immer an Falschheit aufnehmen, wo es sich wirklich oder angeblich um die Staatsraison gegenüber halbwilden Stämmen handelte.

4) Hierauf hat mich erst Gutschmid aufmerksam gemacht.

5) Bei Barh. 93, 12 ist mit cod. Vat. 167 zu lesen ܒܬܪ ܫܢܩܐ statt ܒܬܪ ܫܢܝ̈ܐ. Es geschah also nicht „nach einigen Jahren“, sondern „nachdem er gefoltert worden“.

alMundhir[1]) regieren läfst, auf Überlieferung beruhn, sei es nun als wirkliche Zahlangabe, sei es als blofser Ausdruck einer kurzen Zeit.

Johannes von Ephesus hatte in seinem Werke noch eine Übersicht über die Geschichte des Fürstenthums der Gafniden gegeben und dann erzählt, was auf dessen Sturz folgte. Es ist überaus bedauerlich, dafs in der Handschrift davon nur noch die kurzen Inhaltsanzeigen übrig sind: „über die Erhebung und darauf den Sturz der Herrschaft der römischen Araber“ (6, 41) und „welche von den Häuptlingen der Araber hingingen und sich mit den Persern vertrugen“ (6, 42). Von jener Übersicht ist uns nichts erhalten, und das Andre ist von Michael Syrus gewifs stark verkürzt und entstellt. Ich gebe hier dessen Worte nach Dulaurier's Übersetzung des armenischen Textes, womit die von Langlois (S. 213) in allem Wesentlichen übereinstimmt[2]): „Ces tristes nouvelles ayant été connues dans le pays des Arabes[3]), ils en eurent le coeur tout troublé et navré. Ils se séparèrent les uns des autres, en se divisant en quinze troupes qui se donnèrent chacune un chef. Les uns se soumirent aux Perses, séduits par leur présents, les autres allèrent au secours du pays de Kemir[4]) et un petit nombre d'entre eux se donna aux Grecs. Ce fut ainsi que la perverse hérésie de Chalcédoine causa la ruine d'un beau royaume.“ Unmittelbar in diese Zeit gehört, dafs sich die Araber in 15 Theile spalteten, je mit einem eignen Führer, und dafs, wie wir noch aus Johannes Ephesus wissen, einige Führer zu den Persern übergingen. Die Übersiedelung nach Cappadocien scheint sich auf ein weit späteres Ereignifs zu beziehn, nämlich die Auswanderung vieler christlicher Araber von den Stämmen Ghassân, Ijâd u. a. m. nach Kleinasien, als Syrien muslimisch geworden war. Die Ergebung an die Griechen fafst, wie es scheint, Michael wesentlich kirchlich: den Abfall vom monophysitischen Bekenntnifs zum katholischen (Chalcedonischen).

---

[1]) An der richtigen Stelle, aber mit falscher Regierungszahl für den Vater, s. oben S. 29.

[2]) Hoffentlich bestätigt sich die Kunde, dafs eine arabische Übersetzung des Michael im Orient aufgefunden ist; dieselbe dürfte treuer sein als die armenische Bearbeitung, welche theils vermehrt, theils verkürzt zu haben scheint.

[3]) Langlois: „Dans des états de Mentour“.

[4]) Gamir, Kappadocien.

Die betreffenden Worte des Barhebraeus (S. 93) lauten folgendermafsen: „und das Reich der Araber theilte sich in 15[1]) Häupter, und die meisten derselben schlossen sich den Persern an, einige von ihnen aber den Chalcedoniern. Andre warfen die Waffen weg und wohnten in den Städten und Dörfern im Lande Sinear [ʿIrâq] und Assyrien [Gebiet von Mosul] und in Syrien und hielten sich bis heute in [monophysitischer] Rechtgläubigkeit wie die in Ḥadîtha, Hît, Bâ ʿArbâjâ, Qarjatain im Lande von Emisa, Nabk und an andern Orten"[2]). Man sieht, bis zu den Worten „den Chalcedoniern" excerpiert Barhebraeus nur den Michael; was er dann giebt, hat mit der alten Zeit gar nichts zu thun, sondern es ist blofs eine Übersicht von Orten, an welchen sich noch im 13ten Jahrhundert, als er schrieb, arabische Monophysiten in erheblicher Anzahl befanden.

Wir haben also als positiv nur anzusehn, dafs sich 583 oder 584 nach Wegführung alMundhir's bei den römischen Arabern zunächst Alles auflöste, dafs sich die einzelnen Stämme eigne Fürsten setzten — in Wirklichkeit wohl durchweg die alten Häupter, die unter Arethas und Alamundaros allmählich an Bedeutung stark mochten verloren haben — und dafs sich einige derselben den Persern anschlossen. Letzteres setzt voraus, dafs sie entweder inmitten der Wüste lebten, wo es keine Staatsgränzen giebt, oder dafs sie mit ihren Stämmen auf persisches Gebiet hinüberzogen.

Dieser Zustand mufste für die benachbarten Länder, die von sefshaften Leuten bewohnt waren, höchst unbehaglich werden, denn die wilden Araber, ihres Oberherrn ledig, werden bald in Fehden gerathen sein, die sich nicht auf die Wüste beschränkten, und werden dazu ohne Scheu den Bauern das Vieh weggetrieben und sonst geärntet haben, wo sie nicht gesät hatten. Es ist sehr wahrscheinlich, dafs die Römer bald ein-

---

1) Natürlich ist mit dem einen Cod. Vat. ܠܚܡܫܬܥܣܪ zu lesen statt des nichtsnutzigen ܠܚܡܫܬܥܣܪܝܢ (93, 4 v. u.), das allerdings in dem andern ursprünglich gestanden zu haben scheint (wohl als nicht deutlich ausgeführte Verbesserung eines zuerst geschriebenen ܠܥܣܪܝܢ).

2) Ḥadîtha und Hît am Euphrat, nicht weit von Baghdâd; BâʿArbâjâ ein Stück der nordöstlichen Mesopotamischen Wüste, nicht weit von Mosul; Qarjatain nahe bei dem oben (S. 28) genannten Ḥewârîn; Nabk hatten wir schon S. 26 in etwas andrer Form.

sahen, dafs hier wieder ein oberster Häuptling herrschen müsse, und zwar einer aus Gafna's Hause, das nun einmal bei allen Beduinen in höchstem Ansehn stand. Freilich könnte man die grofse Anzahl von Königen, welche Hamza nennt, so erklären, dafs seit anNu'mân's Wegführung eine Anzahl Gafnidischer Theilfürstenthümer neben einander bestanden habe, welche nur irrthümlich als rein successiv angesehn seien. Aber erstlich führt uns nichts positiv auf diese Annahme. Denn die 15 Führer, die allerdings gewifs schon Johannes von Ephesus erwähnt hat, waren von den Stämmen selbst erkoren, nicht von den Römern eingesetzt; ob darunter Gafniden waren, ist zweifelhaft, und sie gingen zum Theil zu den Persern über. Sie bezeichnen also die Anarchie, keine Neuordnung. Und dann finden wir später bei den arabischen Dichtern die deutlichen Zeichen dafür, dafs je nur ein oberster Phylarch von den Kindern Gafna's regierte.

Nach der Katastrophe hören leider alle Nachrichten von Syrern und Byzantinern über die Gafniden auf[1]). Dafür treten nun freilich die gelegentlichen Erwähnungen einiger derselben bei gleichzeitigen Dichtern ein, aber natürlich sind diese nicht immer deutlich und geben uns keine Sicherheit über die Zeitfolge. Die an die Gedichte geknüpfte Tradition dürfen wir nur mit gröfster Vorsicht gebrauchen, und noch weit mistrauischer müssen wir gegen die Angaben der systematischen Historiker sein.

Eine genealogische Folge wird uns in einem Versstück gegeben, das mit Recht oder Unrecht dem anNâbigha zugeschrieben wird[2]):

„Dies ist ein Knabe mit schönem Gesicht, dem das Gute bevorsteht, der schnell zur Vollendung reift,

„Von *alḤârith dem Älteren* und *alḤârith dem Jüngeren* und *alA'rag*, dem Besten der Menschen (abstammend),

„Dann von *Hind* und von *Hind*; wohl ist aus seinem Blut[3]) ein Wegweiser in allem Guten vorangeeilt,

---

[1]) Johannes von Ephesus kann nicht viel später geschrieben haben.

[2]) Dafs die Verse von einem gleichzeitigen Dichter sind, leidet keinen Zweifel. Ihre Herkunft von anNâbigha wird dadurch nicht widerlegt, dafs sie im Dîwân nicht vorkommen. Der Text u. A. in Ahlwardt's „Six poëts" ١٧٣; Agh. 9, 169 u. s. w.

[3]) Wörtlich „von ihm".

„Fünf Vorfahren, die sind[1]), wie sie sind: sie sind die Besten, so vom Erguſs der Wolken trinken.“

Hier werden also 3 Väter und 2 Mütter eines fürstlichen Knaben genannt; die beiden Mütter heiſsen Hind, zwei[2]) oder gar drei Väter al-Ḥârith. Leider wird nun aber grade der wichtige zweite Vers in sehr verschiedner Form angeführt. Ich habe übersetzt nach dem Text von Ibn Qotaiba's „Dichtern“ (Wiener Handschrift), welcher auch dem Schreiber der Gothaer Handschrift der Maʿârif bekannt war[3]). Die Einleitung zur Gamharat alʿArab hat nach allen 5 Handschriften[4]):

„Von alH. dem Älteren und alḤârith alAʿrag und dem Jüngeren“.

Davon weicht nicht wesentlich ab die Berliner Handschrift Cod. Sprenger 36 der Maʿârif[5]):

„Von alH. dem Älteren und alH. alAʿrag und alḤârith“.

Zwei verschiedene Lesarten sind zu einem das Versmaſs ruinierenden Ungethüm zusammengeflossen in der Wiener und der Leydner Handschrift[6]) der Maʿârif (und so in Wüstenfeld's Ausgabe S. 315):

„Von alH. dem Älteren und alH. dem Jüngeren und alH. alAʿrag“.

Dann haben Agh. 9, 169 und Masʿûdî 3, 221, sowie die Randlesart der Gothaer Handschrift der Maʿârif[7]):

„Von alH. dem Älteren und alH. dem Jüngeren und alḤârith“.

Und endlich Thaʿâlibî bei Caussin 2, 246:

„Von alH. dem Jüngeren und alH. dem Mittleren und dem Älteren“.

---

1) *Âbâin humû* ist allein richtig.

2) Man könnte hierin „die beiden alḤârith“ des Mutammim (Mufaḍḍalîjât 8, 41) wiederfinden; doch mag der Dichter mit diesem Ausdruck den berühmtesten Ghassâniden und den Kinditen Arethas zusammenfassen, und auch andre Erklärungen sind denkbar.

3) Die Handschrift hat nach Mittheilung von Pertsch: للحارث الاكبر والحارث الاصغر الاعرج خير الانام ⁝. Über الاعرج steht, aber durchstrichen, وسط also [و]الاوسط, am Rand والحارث, worauf das Zeichen ⁝ im Text hinweist. — Natürlich wäre für الاعرج zu lesen والاعرج.

4) Gütige Mittheilung von Prof. Hommel. Die Geschichte ist dieselbe wie die, bei der auch Agh. die Verse anbringt.

5) Collation von Dr. Jensen. — Daſs Ibn Qotaiba in diesem Buche wirklich so geschrieben hat, wird dadurch wahrscheinlich, daſs er die Genealogie so rechnet: alH. der Jüngere, Sohn des alH. alAʿrag, Sohnes des alH. des Älteren.

6) Mittheilung resp. von Dr. Geyer und von de Goeje. 7) Mittheilung von Pertsch.

Die letzte Lesart, welcher die übergeschriebne der Gothaer Handschrift dem Sinne nach gleichkommt, giebt sich am leichtesten als eine künstliche Verbesserung kund: zu dem Älteren und Jüngeren sollte der Mittlere nicht fehlen. Auch die andre Lesart, welche alA'rag gar nicht hat, ist zu verwerfen, denn nur aus diesem Verse stammt wahrscheinlich der von den Spätern viel genannte Name alA'rag[1]). Die Frage ist nun aber, ob alA'rag ein wirklicher Name ist, was die eine Form des Verses zu ergeben scheint, oder ob es ein blofser Beiname „der Lahme" für einen al-Hârith ist. Dafs die Spätern nur Letzteres annehmen, entscheidet nichts, denn sie konnten auch bei dem zuerst aufgeführten Text auf den Gedanken kommen, es handle sich um 3 alHârith wie um 2 Hind. Uns kann das nicht binden. Ich möchte im Grunde am liebsten annehmen, alA'rag sei ein wirklicher Name, das habe man jedoch misverstanden und alle die andern Texte seien aus dem Bestreben hervorgegangen, die 3 al-Hârith deutlicher ans Licht zu stellen.

Die Erzähler schwanken nun auch, ob alHârith alA'rag der berühmte alHârith b. Gabala sei[2]) oder ein Nachfolger desselben. Wir können aber kaum daran zweifeln, dafs alHârith b. Gabala hier als „älterer" alHârith bezeichnet wird; dessen Sohn ist dann der jüngere alHârith und dessen Sohn alA'rag des hier gepriesenen Knaben Vater, der vermuthlich deshalb „der Beste der Menschen" genannt wird, weil er noch am Leben ist. Da wir nun auch sonst von einem jüngeren Ghassânier alHârith wissen, so dürfen wir wohl annehmen, dafs derselbe ein Sohn des alten Arethas war, den die Römer endlich wieder in seines Vaters Stellung einsetzten. Dieser hatte dann wohl eine Frau Namens Hind und einen Sohn alA'rag, der gleichfalls eine Frau dieses, ziemlich häufigen, Namens hatte. Es ist nicht nöthig, dafs dieser alA'rag wirklich Phylarch war, und kaum recht wahrscheinlich ist es, dafs der fürstliche Knabe, dem die Verse gelten, eben der anNu'mân ist, auf dessen Tod, nachdem er die Herrschaft mit Ruhm geführt hatte, anNâbigha ein Trauerlied gemacht hat (Agh. u. A. m. — s. unten S. 38f.).

---

[1]) Hamza, der den Vers nicht kennt, hat auch den Namen nicht.

[2]) So z. B. Jâqût 2, 325; Ibn Athîr 1, 398. Im Kâmil werden sogar alHârith al-A'rag und alHârith der Ältere identificiert, während der Vers sie doch deutlich unterscheidet.

Den jüngeren alḤârith haben wir in „dem freigebigen alḤârith“[1]) zu sehn, an welchen ʿAlqama sein berühmtes Lied richtete (nr. 2 bei Ahlwardt; vrgl. auch nr. 3). Der Fürst hatte nach den Worten desselben eine Schlacht gegen verschiedene arabische Stämme gewonnen und viele Gefangene gemacht; unter diesen befand sich auch ein Bruder des Dichters. Es handelt sich deutlich nicht um einen grofsen Sieg über einen andern Fürsten, sondern blofs um die Überwindung von Beduinenstämmen. Die Erklärer (Ibn. Qot. 315; Kâmil 110, und so die Überschrift) ziehn daher mit Unrecht die Schlacht von ʿAin Ubâgh (s. oben S. 23) hierher. Und wenig wahrscheinlich ist es, dafs sie, was ihnen allerdings am nächsten lag, mit Recht in dem Besungenen den alten Arethas sehn. Denn ʿAlqama, der nach 2, 1 damals schon anfing, grau zu werden (also wohl grade die Vierzig überschritten hatte), erwähnt in einem andern Gedichte (12, 4) den Abû Qâbûs (anNuʿmân von Ḥîra, ungefähr 580—602) und in einem andern (8) den azZibriqân, der um 632 einer der angesehnsten Männer der Tamîm war, kann also doch wohl nicht allzulange vor 600 als Dichter thätig gewesen sein. Somit spricht Alles für einen jüngeren alḤârith[2]).

Dieser Fürst mag der gewesen sein, von welchem anNâbigha schon Wohlthaten erhalten zu haben bezeugt wie von seinem Sohne Nab. 1, 4. Die Tradition nennt nämlich den hier in einem der schönsten Erzeugnisse der altarabischen Poesie gefeierten Ghassânier einstimmig *ʿAmr b. alḤârith*[3]). Von diesem ʿAmr hören wir Nab. 20, 18, dafs er den Stamm ʿAuf b. Murra bedroht; dieser lebte im nördlichen Ḥigâz oder im nordwestlichen Negd, wohin auch sonst oft die Züge der spätern Ghassânier gehn[4]). Nur sehr mächtige Fürsten konnten aber so weite Kriegszüge

---

[1]) „Der Freigebige“ wird gelegentlich als fester Beiname eines Ghassâniers alḤârith gebraucht, während es doch nur ein ehrendes Epitheton vom Dichter ist.

[2]) Auf denselben alḤârith gehn vielleicht die Verse des Ṭâiten Zâmil (Jâqût 3, 241 f.), falls sie nämlich nicht erst vom Erzähler der Anecdote gemacht sind.

[3]) Denkbar wäre allerdings doch, dafs der Name nur daher käme, dafs man den im v. 7 genannten Ahnen des ʿAmr „alḤârith den Gafniden“ (d. i. der alte Arethas) für dessen leiblichen Vater genommen hätte.

[4]) Vermuthlich auch die der früheren, aber die Syrer und Griechen, von denen

unternehmen; denn es handelte sich hier immer doch um etwas mehr als um die gewöhnlichen Streifereien zum Kameelrauben.

Auf diesen ʿAmr bezieht eine Überlieferung auch das Gedicht Nab. 27. Die alte Streitfrage, ob das Lied einem König von Ḥîra oder einem Gafniden gelte[1]), ist im letzteren Sinne zu entscheiden. Man kam auf die erstere Annahme, weil der Fürst hier „Sohn der Hind" angeredet wird (v. 16) und diese Benennung aus zahlreichen Dichterstellen als die Lachmitischer Fürsten bekannt war. Und da von diesen ʿAmr b. Hind (= ʿAmr b. alMundhir b. Mâ'assamâ') am bekanntesten ist, so rieth man ohne Weiteres auf ihn. Wohl nur, um die chronologische Schwierigkeit zu mindern, bezog Ibn al Kelbî das Gedicht auf den letzten der Söhne Hind's, auf alMundhir b. alMundhir (Bekrî 388). Aber mit Recht nahm schon Abû ʿObaida Anstofs daran, dafs der Held dieses Gedichtes im ʿIrâq als Feind geschaltet hatte (v. 35), was für einen Lachmiten undenkbar war; s. Baṭlijûsî's Commentar zu der Stelle und Bekrî 388. Und so pafst auch alAtm, das v. 24 als Ziel eines seiner Züge genannt wird, eben so gut für einen Gafniden als schlecht für einen König von Ḥîra; denn dieser Ort liegt im Gebiet der Sulaim, nur 9 arabische Meilen von alMaslaḥ, der 4ten Station von Mekka nach Kûfa (s. Bekrî 66; Jâqût 1, 114, vrgl. dazu Bekrî 559)[2]). Und alḤismâ, das noch heute so heifst, damals das Gebiet der Gudhâm (v. 22. 31), liegt ausschliefslich im Machtbereich der Gafniden. Ob hier nun aber von dessen Geschlecht ʿAmr oder sein Bruder anNuʿman oder vielleicht doch noch ein Andrer besungen wird, steht nicht fest. Auf jenen ʿAmr kam man vielleicht nur, weil der andre ʿAmr, an den man zuerst gedacht hatte, nicht pafste. Auch können wir nicht entscheiden, ob unter seiner Mutter Hind die erste oder die zweite der oben S. 35 Besprochnen gemeint, ob der Gefeierte also als Bruder

---

wir allein Genaueres über sie wissen, kümmerten sich darum nicht, während sie für die Araber von höchstem Interesse waren.

[1]) S. Baṭlijûsî's Commentar und Derenbourg's Note zu dem Gedicht.

[2]) Wüstenfeld hat Atm eingetragen auf seiner Karte zu: „Das Gebiet von Medina". Dafs Atm im ʿIrâq liege (Bekrî 66), meinten Einige gewifs nur aus falscher Auffassung dieses und eines andern Verses: der in diesem genannte Stamm Ghifâr weist uns aber grade ebenfalls in's Ḥigâz oder dessen Nähe.

oder als Sohn des alA'rag anzusehn ist; doch ist Ersteres wahrscheinlicher[1]).

Mehrere Gedichte anNâbîgha's beziehn sich auf den Ghassânier *anNu'mân*. Dieser wird in der Tradition durchweg als Bruder des 'Amr und Sohn des alHârith bezeichnet, und wir dürfen ihr hier wohl folgen. Sein Vater ist wahrscheinlich der jüngere alHârith und Sohn des älteren (Arethas). Wir treffen diesen anNu'mân im Conflict mit des Dichters eignem Stamm. Er wird, meint dieser, die Fazâra überfallen, wie er schon die Asad gezüchtigt hat (nr. 2); also wieder Stämme der Gegend nördlich von Medîna. Zu nr. 2 gehört nr. 11. Wie mächtig der Ghassânische Fürst weit im Süden war, zeigt sich daran, dafs er hier bei den Ghatafân in Uqur einen Domanialbesitz (*himâ*) hatte (11, 1). Wie anNabigha hier seine Stammgenossen vor dem Könige warnt, so thun dasselbe zwei ihm beigelegte Verse Jâqût 1, 74. Da darin die berühmten Ghassânischen Siege von Halîma und 'Ain Ubâgh erwähnt werden, so ist der hier genannte „Sohn der Hind" ein Gafnide; es kann sehr wohl wieder anNu'mân sein. Derselbe Fürst hatte aber in diesem Lande gegen die 'Odhra im dattelreichen Wâdilqurâ, nördlich von Medîna, einen Miserfolg gehabt, wie ihm das der Dichter vorhergesagt hatte (nr. 13)[2]).

In nr. 18 redet anNâbigha davon, wie der abwesende anNu'mân durch Krankheit in schwerer Lebensgefahr ist[3]), und nr. 21 ist ein schö-

---

[1]) Die 3 gegen 'Amr b. Hind gerichteten Verse, welche dem anNâbigha zugeschrieben werden Ahlwardt ١٩٨f. oder wenigstens die ersten beiden sind sicher von einem andern Dichter. Sie sind nur aus Versehen zu einem Lied jenes (nr. 10) gezogen, zu dem sie gar nicht passen, s. Jâqût 1, 360. Die تغلب können nicht auf Seiten anNâbigha's stehn, und die Änderung in تَغْلَبَ für ثعلبة (s. Gauharî s. v. جفف) ist gezwungen. — Die angebliche Zusammenkunft des anNâbigha, 'Alqama und Hassân b. Thâbit, also der 3 berühmten Dichter, welche Gafniden besungen haben, bei 'Amr b. alHârith alA'rag Agh. 14, 2 ist natürlich unhistorisch. Andre lassen die Drei sogar bei Gabala b. alAiham zusammenkommen Agh. 14, 2, den jene beiden Älteren schwerlich noch als Mann gesehn haben. Mit den Namen gehn diese Poetengeschichten noch leichtsinniger um als mit den Sachen.

[2]) AnNâbigha wufste wohl, dafs die arabischen Oasenbewohner, die Haus und Pflanzung vertheidigen, im Allgemeinen tapferer sind als die Beduinen.

[3]) Die Worte: „Wenn anNu'mân zurückkehrt, freuen wir uns und frohlocken und kommt zu den Ma'add ihr Königthum und ihr Frühling, Und kehrt zu den Ghassân

nes Lied auf seinen Tod. Wir erfahren hier beiläufig seine Kunja *Abû Ḥogr.* Der Verstorbene hat die Stämme der Bekr und der Tamîm schwer betroffen, darum jauchzen sie über seinen Tod (v. 11. 13). Er war also weit in die Machtsphäre der Perser oder wenigstens der Fürsten von Ḥîra eingedrungen, wie er oder ein anderer Gafnide jener Periode das ʿIrâq durchzogen hatte (oben S. 37). Vielleicht darf man das Eine oder das Andre damit combinieren, dafs nach Theophylact 8, 1 um's Jahr 600 römische Saracenen mitten im Frieden in's persische Gebiet eingedrungen waren. Doch kann sich dergleichen auch später wiederholt haben. Der Conflict mit den Dhubjân scheint wenigstens in etwas spätere Zeit zu fallen. AnNâbigha nennt als deren Führer den Ḥiṣn b. Ḥudhaifa b. Badr. Nun war, als Muḥammed in Medîna war, dessen Sohn ʿOjaina unbestrittner Führer der Fazâra, ja der ganzen Ghatafân, und er lebte noch bis in ʿOthmân's Chalîfat hinein Ibn Ḥagar s. v. Ein Bruder von ihm, Châriga b. Ḥiṣn spielte im Aufstand nach des Propheten Tode eine Rolle und lebte später als angesehner Mann in Kûfa. Ferner treten in diesen Gedichten hervor Zabbân b. Saijâr und dessen Bruder Chuzaima (11. 12. 9). Ein Sohn jenes, Manẓûr b. Zabbân wurde vom Chalîfen ʿOmar gezwungen, sich von seiner Frau zu scheiden, die vorher seines verstorbenen Vaters Frau gewesen war Agh. 11, 55. Wir haben in den Gedichten also die Generation vor uns, welche dem siegreichen Auftreten des Islâm's unmittelbar vorherging. Zabbân mufs sogar erst nach Muḥammed gestorben sein, denn jene Heirath, nach dem früheren Brauch der Araber ganz gesetzmäfsig[1]), war für die Muslime ein Skandal, der nicht lange kann gedauert haben[2]). Wir können also die Regierungszeit anNuʿmân's in das erste Jahrzehnt des 7ten Jahrhunderts setzen, natürlich ohne dafs wir irgend eine Begränzung nach oben oder unten wagen

Königthum und Herrschaft zurück u. s. w." könnten darauf führen, dafs das Lied den ältern anNuʿmân b. alMundhir und die Hoffnung betreffe, dafs derselbe aus der römischen Gefangenschaft heimkehren möge. Aber — von chronologischen Schwierigkeiten abgesehn — der Gegensatz ist hier deutlich Tod und Leben.

1) Robertson Smith, Kinship and Marriage 86 ff.

2) Hierzu mag man halten, dafs anNâbigha in einem andern Gedicht (nr. 29) schon den ʿOjaina als Führer anredet und dafs die Tradition auch mit Recht nr. 26 in Beziehung zu ihm bringt. Also hat anNâbigha noch nahe bis zur Higra gelebt.

dürften. Mit diesem Ansatz steht wenigstens nicht in Widerspruch, dafs der mütterliche Oheim des Ḥassân b. Thâbit einst bei anNuʿmân war (Dîwân 89 = Ibn Hišâm 625), und zwar in Gâbija im Gôlân, ganz nahe dem Orte, wo jener Fürst nach anNâbigha begraben ist „zwischen Tubnâ[1]) und Gâsim" (21, 26).

Die Züge dieses wie andrer Gafniden, von denen die Dichter reden, gehn in so ferne Gegenden, und sie treten da so kräftig auf, dafs gar nicht daran zu denken ist, sie hätten blofs einen kleinen Theil von der Macht des Arethas behalten und eine Anzahl gleich mächtiger Rivalen neben sich gehabt.

Da anNâbigha (s. S. 36) von ʿAmr's Vater Wohlthaten erhalten hatte wie von ʿAmr und da er anNuʿmân's, doch kaum ganz kurze, Regierung bis zu seinem Tode, mithin auch dessen Nachfolger erlebte, so ist es im Grunde wahrscheinlicher, dafs anNuʿmân vor ʿAmr regiert hat, denn sonst müfste der Dichter bei vier auf einander folgenden Gafniden gewesen sein.

Da an Nuʿmân Abû Ḥogr ist, so ist der Fürst *Ḥogr*, welchen Ḥassân in einem wahrscheinlich kurz vor Muḥammed's Übersiedlung nach Medîna gemachten Gedichte nennt (S. 47 ult.)[2]), vielleicht der Sohn, nach welchem er jene Kunja führte. Der daneben erwähnte *ʿAmr* könnte dann der auch von anNâbigha gefeierte Mann sein. Ḥassân sagt von diesen Beiden: „sie beherrschten alle Sklaven und Freien vom Schneeberg (Hermon) bis nach den beiden Seiten von Aila; sie drangen in das Gebiet der Perser ein; dann riefen sie: „o ihr Ghassân, haltet Stand!"" Er braucht hier so durchgängig den Dual[3]), dafs man fast an eine gemeinschaftliche Regierung denken mufs[4]). Doch beachte man, wie schon

---

[1]) So die wahre Lesart Jâqût 1, 824; Agh. 16, 13 (wo die Verse aus Versehn dem Ḥassân zugeschrieben werden). Die Lesart der Dîwâne (Ahlwardt, Derenbourg und Cairo) *Boṣra* ist schlecht; noch schlechter „zwischen Boṣrâ und Gilliq" Agh. 16, 15. Vrgl. ZDMG 29, 431. Über Gâsim eb. 429.

[2]) Der Vers wird auch sonst oft angeführt.

[3]) Natürlich ist in der Ausgabe des Dîwân's *malakâ* und *kânâ* zu verbessern.

[4]) So auch Caussin 2, 249. — Ein ʿAmr b. Abî Ḥogr soll mit ʿAmr b. Kulthûm zur Zeit des alMundhir b. Mâ'assamâ' (also vor 554) zusammengekommen sein Agh. 9, 184. Da wäre indirect ein Brüderpaar ʿAmr und Ḥogr bezeugt, aber in jener Zeit ist kein Platz für ein Ghassânisches Fürstenpaar dieses Namens, wie es Ḥassân darstellt.

Johannes von Ephesus die ganze Familie des Arethas und Alamundaros öfter gemeinsam handeln läfst und auch anNâbigha (nr. 1) die fürstliche Familie als feste Gesammtheit schildert. Vielleicht war also ʿAmr der regierende Phylarch, Hogr ein Prinz, der seine Heere führte[1]). Auf alle Fälle haben wir hier völliges Zusammenwirken, wie es bei von einander unabhängigen Theilfürsten nicht denkbar wäre. Das Land vom Hermon bis zum Busen von Aila (ʿAqaba) umschliefst grade die Hauptmasse des Gebiets, worin einst Arethas geherrscht hatte, und die Züge ins persische Reich zeigen uns diese Fürsten wieder als mächtige Gebieter, ganz entsprechend dem, was anNâbigha sagt.

Der Dichter Hassân b. Thâbit ist hochbetagt um 660 gestorben[2]), nachdem er vorher erblindet war. Aber er ist doch nicht 100 oder gar 120 Jahr alt geworden[3]), wie man berichtet, denn er hat noch 656 (und 657?) eine Anzahl Gedichte auf ʿOthmân's Ermordung gemacht, die voll Feuer und Energie sind und zum Theil wie die Sturmglocke klingen: das sind nicht Producte eines überalten Mannes! Seine Mutter hatte noch die Higra erlebt Ibn Hagar s. v. So mag er um 590 geboren sein oder höchstens etwas früher. Jedenfalls war er jünger als anNâbigha, wie das auch die Tradition im Aghânî mehrfach angiebt, wo sie diesen als anerkannten und unübertrefflichen Meister, jenen als tüchtigen Anfänger hinstellt. Hassân hielt sich vermuthlich um 610 herum, vielleicht öfter, am Hof der Gafniden auf, deren Vetter zu sein er sich rühmen durfte, da er ja aus Jathrib (Medîna) war. Er nennt als Stätte, wo er sie einst getroffen, theils die uns schon aus anNâbigha bekannte Gegend des Gô-

---

[1]) Der Ὤγυρος, welcher 586 in Mesopotamien auf römischer Seite kämpft, hat schwerlich etwas mit unserm Hogr zu thun (gegen Caussin 2, 248). Der Name Hogr war damals beliebt.

[2]) Ibn ʿAsâkir (wir besitzen auf unsrer Bibliothek aus Spitta's Nachlafs grade den betreffenden Band des Riesenwerks), der weit vollständiger ist als Ibn Hagar s. v., hat ganz verschiedne Angaben, welche zwischen dem Chalîfat ʿAlî's und den letzten Jahren Moʿâwija's schwanken, aber das Wahrscheinliche ist, dafs er kurz vor oder kurz nach des Letzteren Thronbesteigung gestorben ist.

[3]) Caussin 2, 669 läfst ihn allerdings auf so haltlose Angaben hin 563 geboren werden. Er bringt ihn zu ʿAmr, den er von 587—97 regieren läfst, als jungen Mann.

lân, theils die unmittelbare Nachbarschaft von Damascus[1]). Leider erwähnt er aber nicht den Namen eines damaligen Fürsten[2]), oder höchstens nur einmal. Denn in einem Gedichte (S. 13f.) spricht er von dem gründlichen Miserfolge des *alḤârith* des Gafniden, den er seinen unzuverläfsigen, nicht-Ghassânischen, Genossen Schuld giebt. Aber er sagt nicht ausdrücklich, dafs dieser alḤârith regierender Fürst sei; er könnte ebenso gut einen Sohn, Bruder oder Vetter des Phylarchen meinen.

S. 92 sagt Ḥassân, dafs Kisrâ (d. i. der persische König Chosrau II Parwêz) einen Fürsten umgebracht habe, der nach dem ganzen Zusammenhang nur ein Ghassânier sein kann, wie es die in der Überschrift ausgedrückte Tradition auch annimmt. Ob derselbe im Kampf gefallen oder hingerichtet ist, läfst sich nicht erkennen. Das Ereignifs war vor noch nicht langer Zeit geschehn, aber der Dichter blickt doch auf die Herrlichkeit der Ghassânier schon als eine vergangene hin: „Wohnsitz von Königen, die ich einst in Wohlstand gesehn habe, als die Säule des Königthums noch nicht zerstört war". In der That ist es höchst wahrscheinlich, dafs die Invasion der Perser 613[3]) und 614[4]) dem Staat der Gafniden ein Ende gemacht hat, wenn sich auch manche Mitglieder des Hauses zu den Römern oder in die Wüste retten mochten.

Die Perser haben damals in jenen Gegenden furchtbar gehaust und die Verwüstungen angerichtet, welche zum grofsen Theil noch heute sichtbar sind[5]). Sie konnten nicht leicht daran denken, hier ein römi-

---

[1]) Noch als blinder Greis soll er mit Entzücken die damalige Herrlichkeit geschildert haben Agh. 16, 16. Diese Worte sind allerdings ein Reflex dessen, was er in seinen Gedichten wirklich sagt. Der im Grunde sehr wenig vom Geist des Islâms durchdrungene Mann schwärmte stets für den Wein, die Musik, die Blumenpracht und die Mädchen am Hofe der Gafniden „in der alten Zeit".

[2]) Die verschiednen Erzählungen des Agh. (9, 171, 176; 14, 8f. u. s. w.) sind natürlich unzuverläfsig, ganz besonders in den Namen der Fürsten. Da kommt z. B. Gabala b. alAiham als Zeitgenosse des anNu'mân b. alMundhir von Ḥîra vor. Auch bei Mas'ûdî 3, 218f. ist Ḥassân bei alḤârith b. Abî Šamir zur Zeit des anNu'mân von Ḥîra.

[3]) Einnahme von Damascus.

[4]) Einnahme von Jerusalem.

[5]) S. meine Ṭabarî-Übersetzung 299f.

sches Vasallenhaus bestehn zu lassen, das ihnen schon manches Ungemach zugefügt hatte, und noch weniger liefsen ihre arabischen Heerschaaren zu, dafs die Gafniden, von welchen sie so viel Blut zu fordern hatten, an der Herrschaft blieben. Diese Vermuthung, die an sich ganz nahe liegt, erhält durch das eben erwähnte Gedicht ihre positive Bestätigung. Dazu stimmt nun, dafs bei demselben Dichter (51, 3f.)[1]) der persische Patricius — der Titel war den Leuten geläufig geworden — über das Herz des Ghassânischen Gebiets verfügt: auf seine Erlaubnifs hin weidet das Kameel im Lande der Ghassân bis zum Berge Ḥârith in Gôlân, den die Dichter wiederholt im Zusammenhange mit den Gafniden nennen[2]). Ich kann nur wiederholen, was ich in der Ṭabarî-Übersetzung 300 gesagt habe: „manches Ackerfeld mag damals den Nomaden als Weideland überlassen sein!"

Ḥassân nennt dreimal einen *Ibn Salmâ* „Sohn der Salmâ". Er sagt 26, 14, er reise zu ihm, und preist seine Freigebigkeit. 27, 10 erwähnt er, dafs er zu Ibn Salmâ gereist sei, als bei diesem Ubai, anNu'mân, 'Amr und Wâqid (oder Wâfid) gewesen. 89, 10ff. (= Ibn Hišâm 625, 11f.) sagt er deutlicher, er habe sich bei jenem befunden, als anNu'mân, Ubai und Wâqid von ihm in Fesseln gehalten seien, und habe ihre Freilassung bewirkt. Dazu stimmt, dafs er S. 79 dem Ubai, der in den Händen eines Feindes ist, versichert, er werde ihm helfen. Vermuthlich war dies sein Bruder, denn er hatte einen Bruder dieses Namens (Ibn Hišâm 504; Ibn Ḥagar s. v.). Über die Anderen kann ich nichts finden. Leider gilt dies auch von Ibn Salmâ. Die Überschrift S. 79 sieht in ihm einen Ghassânier und ebenso Suhailî zu Ibn Hišâm a. a. O.[3]); das kann richtig sein, und wir hätten dann den Namen der Mutter etwa des letzten wirklichen Fürsten aus Gafna's Hause: aber sicher ist es

---

[1]) Oder bei Bašîr b. Sa'd, dem Vater des bekannten anNu'mân b. Bašîr, der etwa ein Coaetan von Ḥassân war Agh. 14, 125f.; Jaqût 2, 34. 4, 423.

[2]) Nab. 21, 29; Ḥassân 92, 18. 100, 8. Syrisch ܛܘܪܐ ܕܚܪܬ ZDMG 28, 300f.

[3]) Der vollständige Text des Commentars (Spitta'sche Handschrift der Strafsburger Bibliothek) giebt nicht mehr, als Wüstenfeld's Ausgabe 2, 150 hat.

keineswegs. Salmâ's Sohn kann auch irgend ein andrer Araberhäuptling sein[1]).

Mit gröſserer Sicherheit schliefsen wir einige andre Namen aus der Reihe der Gafniden aus, die man dazu gerechnet hat oder rechnen könnte.

Agh. 10, 28 f. nennt eine Angabe *Jazîd* b. ʿAmr alGhassânî als den Fürsten, welcher den alḤârith b. Ẓâlim habe tödten lassen, eine andere den Ghassânier anNuʿmân, während eine dritte anNuʿmân oder einen andern König von Ḥira hat. Der Name Jazîd kommt sonst nie bei den Gafniden vor, und daſs der Sohn Ẓâlim's auf Geheiſs eines Lachmiten umgebracht ist, wird besonders dadurch wahrscheinlich, daſs der Mörder vom Stamme Taghlib war, der den Gafniden ganz fern, aber in engster Beziehung zu den Ḥirensern stand.

Hamza hat *Qaṭâm* als Beinamen des Gafniden anNuʿmân b. alḤârith. Wahrscheinlich ist das nur eine falsche Anwendung des Namens Ḥogr b. Umm Qaṭâm „H. Sohn der Mutter Qaṭâm's" aus der Moʿallaqa des alḤârith b. Hilliza v. 56 (= Agh. 9, 180), denn das ist, wie Amraalqais S. 37, 2 Slane[2]) ganz sicher angiebt, ein Kinda-Fürst; so nimmt es auch die gemeine Tradition. Übrigens kann Qaṭâm schwerlich etwas Anderes als ein weiblicher Name sein[3]).

Šuraḥbîl b. ʿAmr alGhassânî tödtete (gegen Ende 629) Muḥammed's Boten an „den König von Bostra"[4]) in Mûta (Wellhausen's Wâqidî 309). Daſs derselbe zur Familie der Gafniden gehörte und die fürstliche Stellung dieser bekleidet habe, wird nicht angedeutet. Dagegen spricht noch besonders, daſs er eb. 310, wo auch seine Brüder Sadûs und Wabr

---

1) Etwa ein Mann wie Ṣâliḥ b. ʿIlâṭ aus hohem Hause, mit dem der Dichter gezecht zu haben sich rühmt 57, 4ff., wohl ein Bruder des alḤaggâg b. ʿIlât von den Sulaim, der ja auch ein reicher Mann war Ibn Hišâm 770. — Schwerlich darf man unsern Salmâ-Sohn für anNuʿmân von Ḥîra halten, dessen Mutter allerdings auch Salmâ hieſs.

2) Ed. Caïro S. 172. Bei Ahlwardt 59, 22 ist eine weniger gute Lesart.

3) Die Combination dieses angeblichen *Qaṭâm* mit dem *Quṭma* Tab. 1, 1007, wofür Andre *Johannes* haben (Ṭabarî-Übersetzung 300), ziehe ich natürlich zurück.

4) Das könnte nur der Commandant von Bostra sein, das damals erst eben wieder in römischen Händen war. Eine so unpräcise Ausdrucksweise kann in der Prophetentradition nicht auffallen.

genannt werden, ein Azdî heifst[1]). Die Ghassân gehörten freilich zu den Azd, aber es war bei ihnen kaum üblich, sich danach zu benennen, und erst recht nicht beim Hause Gafna's.

Wir wissen nicht, ob Kaiser Heraklius nach Überwindung der Perser und Wiedergewinnung von Syrien (629)[2]) auch das Phylarchat der Gafniden hergestellt hat. Nicht lange danach wurde den Arabern, welche die Wüsteneingänge zu schützen hatten, die Gelder (ῥόγαι) von einem Eunuchen höhnisch verweigert, und nun führten sie die Muslime her nach Gaza Theophanes 515, die dort Freitag den 4. Febr. 634 den ersten Sieg erfochten Land 1, 17[3]). Jene Araber sind die Lachm, Gudhâm u. s. w., gegen welche schon Muḥammed selbst gezogen war (630), ohne auf Widerstand zu treffen. Das spricht kaum dafür, dafs damals ein mächtiger arabischer Vasallenfürst Roms Interessen zu wahren hatte. Freilich werden die Ghassân zu jener Zeit wiederholt auf Seiten der Römer im Kampf gegen die Muslime genannt. Sie wurden von Chalîd in der Schlacht bei Marg aṣṣuffar, südlich von Damascus[4]), hart mitgenommen (Sommer 634), wie uns ein gleichzeitiger Vers bezeugt[5]). Das geht aber auf den Stamm und höchstens nebensächlich auf das Fürstenthum, wenn es damals ein solches gab.

Die arabische Überlieferung nimmt nun aber einstimmig an, dafs damals der Gafnide *Gabala b. alAiham* König gewesen. Sie weifs nichts davon, dafs dies Königthum schon früher aufgehört hatte oder unterbrochen war, und die Nachrichten über die Ghassânier ignorieren ganz die persische Herrschaft. Der Gafnide Gabala b. alAiham, dessen genealogi-

---

[1]) Auf einem blofsen Versehn beruht es, wenn Jâqût 3, 430, 3 ein Ghassânischer Fürst alḤârith b. ʿAmr heifst; es soll wohl ʿAmr b. alḤârith sein.

[2]) Ṭabarî-Übersetzung 392. Die Muslime fanden damals das Land voll Soldaten und erlitten deshalb die Niederlage von Mûta.

[3]) In der lateinischen Übersetzung S. 116. Für „in Jordane" ist der, im Text allerdings entstellte, Name des Patricius zu setzen.

[4]) Über die Lage vrgl. ZDMG 29, 425 Anm. 3. Als Aufenthalt der Ghassânier werden „die Wâdî's von aṣṢuffar" genannt Ḥassân 110, 6.

[5]) S. de Goeje, Mémoires 3, Append. V; Jâqût 4, 1016. Natürlich kann ich diese Kämpfe hier nicht eingehnder behandeln.

scher Zusammenhang mit den ältern Fürsten dieses Hauses im Einzelnen nicht bekannt ist, soll schon in Dûmat algandal gegen Châlid gefochten Tab. (Koseg.) 2, 66 und in der Entscheidungsschlacht am Jarmûk (20. Aug. 636) im Vordertreffen die römischen Araber geführt haben Belâdhorî 135. Auf alle Fälle dürfen wir annehmen, dafs er unter den Arabern auf römischer Seite eine hervorragende Stellung einnahm. Es mufste daher grofsen Eindruck machen, dafs der Erbe der altberühmten Phylarchen bald darauf zu den Siegern überging. Leider konnte sich der stolze Mann aber nicht in die allgemeine Rechtsgleichheit hineinfinden, wie sie, weit consequenter als einst der Prophet selbst, ʿOmar handhabte, floh daher wieder zu den Römern und verliefs ganz sein Heimathland, um dauernd im römischen Reiche zu bleiben. Versuche, ihn wiederzugewinnen, blieben erfolglos[1]). Dafs man diesen Mann, den man wegen seines fürstlichen Geblüts und seines hohen Ansehns nach gemeinarabischer Weise „König" nennen durfte, als Einen ansah, der früher wirklicher Monarch gewesen, ist begreiflich; aber es bleibt sehr fraglich, ob diese Auffassung richtig war. Und war sie's, so kann dieser Gabala doch höchstens kurze Zeit und in beschränktem Umfange das Amt des Arethas bekleidet haben.

Wie gesagt, weisen uns die arabischen Dichter auf Gôlân, das zu Palaestina secunda gehörte[2]), als den Hauptsitz der Gafniden hin; ander-

---

[1]) S. Belâdhorî 136. 164; Ibn Qotaiba 316 u. A. m. Die Geschichte ist vielfach romantisch aufgeputzt. Dafs Gabala damals vorübergehend den Islâm angenommen habe, steht durchaus nicht fest. Wohl ist denkbar, dafs er auch nachher noch gelegentlich mit Ḥassân in Verbindung stand, aber das Einzelne ist hier erst recht romanhaft; s. z. B. ʿIqd (Caïro) 1, 140 ff., wo dem Ḥassân unter Anderem ein, sonst kaum nachweisbarer, Vers beigelegt wird: „er vergafs mich nicht in Syrien, während er dessen Herr war als König, und nicht als Christ im Römerland". Die Übertreibung, dafs er Herr von Syrien gewesen, ist sehr arg; was von dem Verse zu halten, zeigt aber erst recht die Specialisierung seines christlichen Bekenntnisses auf's Römerland, als wäre er in Syrien kein Christ gewesen: schildert doch Ḥassân in einem Gedichte grade die fröhliche Osterfeier am einstigen Hof der Gafniden (S. 100). Natürlich sind auch die gefühlvollen Verse Gabala's aus der Fremde willkürliche Erzeugnisse, obwohl sie schon früh bezeugt sind. Die Anecdoten nehmen Constantinopel als seinen Aufenthalt, während er sich nach Ibn alKelbî in Charšana in Kappadocien niederliefs, wo seine Nachkommen noch wohnten; vrgl. Iṣṭachrî 45, 2. Dazu stimmen andre Angaben.

[2]) In der arabischen Zeit ward Gôlân zur Provinz Damascus geschlagen. Übrigens wird grade der östliche Theil, wo wir die Ghassânier finden, heutzutage nicht mehr

seits zeigen sie uns dieselben aber auch in der unmittelbaren Nähe von Damascus, in Gilliq, einem nicht mehr genau nachzuweisenden Puncte am Baradâ Ḥassân 72, 10, 16 (oft citiert). Bei Damascus tagte auch wohl 570 die Synode unter dem Schutz alMundhir's (s. oben S. 24). In Gilliq ist das Grab eines Mitglieds der Familie Nab. 1, 6, während andre im Gôlân bestattet sind Nab. 1, 6. 21. Wenn Ḥassân 72, 14 an der richtigen Stelle steht, so ist auch das Grab des „Sohnes der Mârija" in Gilliq. Eine Menge Orte des Ghassânischen Gebiets vom südlichen Gôlân bis in die unmittelbare Nähe von Damascus nennt Ḥassân S. 100, vrgl. S. 70[1]). Dafs die Gegend von Palmyra den Gafniden als ihren Fürsten anerkannte, sahen wir oben S. 17. 26. Somit war derselbe nicht an die Gränze einer Provinz gebunden, sondern er hatte Macht über alle Nomaden (und wohl auch Halbnomaden), die sich ständig oder zeitweilig befanden in Palaestina II, Arabia, Phoenicia ad Libanum, auch wohl Palaestina III (salutaris) und vielleicht sogar in den Provinzen Nordsyriens. In der grofsen Wüste aber ging sein Königthum so weit wie die Furcht vor seinem Arm, immerhin eine gute Strecke hinaus über die letzte Kette von Kastellen, die eigentliche Gränze des römischen Reiches selbst.

Nirgends jedoch sehn wir die Gafniden im Besitz von festen Plätzen und Garnisonsorten. Wie Damascus und Bostra so war sicher auch das von Justinian neu befestigte[2]) Palmyra nie in ihrer Hand, obwohl Hamza einen von ihnen dort residieren läfst.

Die Hervorhebung des Golân[3]) als Sitzes der Gafniden und die eigenthümliche Bedeutung, welche der dabei genannte Ort Gâbija[4]) gleich nach der Unterwerfung durch die Muslime spielt — ʿOmar behandelt

---

zu Gôlân gerechnet und ist daher in die Karte in der Ztschr. d. deutchen Paläst. Vereins Bd. 9 nicht mit aufgenommen.

[1]) S. 100 gehört der zweite Vers (Z. 5) eigentlich wohl hinter den dritten. Jâqût u. A. m. geben viele Varianten, deren Werth nur durch genaue Untersuchung festgestellt werden könnte. Vrgl. übrigens ZDMG 29, 419 ff.

[2]) Procop, Aedif. 2, 11; Malalas 2, 152; Theophanes 267.

[3]) Nab. 2, 4. 21, 25, 29; Ḥassân 89, 9. 91, 8. 100, 8 und bei Jâqût 2, 890.

[4]) Ḥassân 72, 6. 89, 9. 91, 8. Vrgl. den Ausdruck „das Gâbija der Könige" Bekrî 227. — Syrisch ܓܒܝܬܐ, griechisch Γαβιθᾶ (ZDMG 29, 79 f. 430).

es als eine Art Hauptstadt von Syrien — führen fast darauf, dafs dort die eigentliche Residenz „das Heerlager der Familie des Arethas, Sohnes des Gabala“ (Joh. Eph. 4, 22) zu sein pflegte. Es ist nicht unmöglich, dafs daselbst bald einmal eine oder die andre griechische Inschrift gefunden wird, die uns hierüber und über sonstige Verhältnisse jener belehrt[1]). Der Ausdruck „Heerlager“ *ḥîrthâ* bezeichnet recht den halb nomadischen Character dieses Fürstenthums. Es ist eigentlich die Umfriedigung oder drgl.[2]). Auch in dem Ausdruck „Ḥîrthâ des Nuʿmân“ ist es zunächst noch ganz appellativ, und so kann es heifsen, die Ḥîrthâ des Fürsten der persischen Araber habe sich in die innere Wüste zurückgezogen (Josua Styl. [Wright] 54, 12). Doch ward dies schon früh fester Name der, wohl gröfstentheils von aramäischen Christen bewohnten, Stadt, wo die persischen Vasallenkönige zu residieren pflegten, und wenn der Lachmitische König Nuʿmân im Leben des Simeon Stylites von „seiner Ḥîrthâ“, „seiner ganzen Ḥîrthâ“ spricht Martyr. 2, 327f., so ist damit schon die Stadt gemeint: denn er giebt zu, dafs dort Kirchen gebaut und Bischöfe eingesetzt werden eb. 328, 3 v. u.[3]). Simeon von Bêth Aršâm (ed. Guidi) hat abwechselnd „Ḥîrtha des Nuʿmân“ und einfach Ḥîrthâ für die Stadt, welche die Araber schlechtweg *alḤîra* nennen und welche Glaucus bei Steph. Byz. Ἔρϑα schreibt. So mag auch die Ḥîrthâ der Gafniden allmählich ständiger geworden sein. Aber fest gewachsen war sie noch nicht. Als alMundhir's Söhne im Aufstand sind, schlagen sie eine grofse Ḥîrthâ in der inneren Wüste auf Joh. Eph. 3, 42. Und wenn alMundhir sagt, er könne in dieser Zeit seine Ḥîrthâ nicht verlassen, da sonst die persischen Araber kommen und ihm Frauen und Kinder wegführen möch-

[1]) Der Ort ist, so viel ich weifs, noch nicht nach Inschriften durchforscht. Denkbar wäre es sogar, dafs sich noch Grabschriften von Gafniden in jener Gegend fänden.

[2]) Es steht für *μάνδρα, λαύρα* als Kloster, s. Payne-Smith s. v. und Moesinger, Mon. syr. 2, 66, 11 = Hoffmann, Syr. Märtyrer 47 Anm. 413. — Die Schreibung ܚܐܪܬܐ ist auch in sehr alten Handschriften viel seltner als ܚܝܪܬܐ und scheint nur durch graphischen Einflufs von ܚܐܪܐ ܨܝܪ u. s. w. hervorgerufen. Über Bedeutung und Form liesse sich noch Allerlei sagen.

[3]) Der Cod. Add. 14484 des Brit. Mus. aus dem 6ten Jahrhundert hat hier (nach der Abschrift von Dr. Kleyn, die mir derselbe früher einmal gütigst geliehn hat) keine wesentlichen Abweichungen. Auch er schreibt das Wort immer mit *jod*.

ten Joh. Eph. 3, 41, so pafst das wohl nur für einen exponierten Punct an der Gränze der Wüste, wo er sich eben befand (oder wo ihn Johannes, der ihn so reden läfst, voraussetzt), schwerlich für das geschützte Gôlân. So ist vielleicht auch „die Ḥîrthâ der Araber", wofür Theodorus als Bischof bestimmt wird Land 2, 254, 21, kein fester Punct, sondern der jeweilige Sitz des Ghassânischen Fürsten.

Auf alle Fälle mufste ein solcher jeden Augenblick bereit sein, aus der behaglichen Ruhe des Culturlandes in die Wüste aufzubrechen, um seine Autorität über die Wüstenstämme aufrecht zu erhalten, um Raubzüge gegen unabhängige oder persische Araber oder selbst ansäfsige persische Unterthanen zu machen oder um den kaiserlichen Heerführern in den Krieg zu folgen. Die Kehrseite der, für das Reich im Allgemeinen sehr zweckmäfsigen, Einrichtung war, dafs diese Araberfürsten sich auch leicht der römischen Macht entziehn und dann recht unangenehm werden konnten. Ohne Noth thaten sie das aber gewifs schon deshalb nicht, weil ihnen zu viel daran liegen mufste, *annonae* zu beziehn.

Hamza giebt bei einer ganzen Zahl von Gafniden an, wo sie Bauten errichtet hätten. Diese Nachrichten erwecken zunächst grofses Vertrauen, zumal nur wenige Ortsnamen dabei sind, welche aus den Dichtern genommen sein können und eine Anzahl derselben selbst den gelehrten Geographen Bekrî und Jâqût unbekannt geblieben ist, während sie zum Theil von Wetzstein wiedergefunden sind[1]). Aber wir müssen doch auch hier recht vorsichtig sein. Dafs ein Älterer, dem Hamza folgte, in jenen, zum Theil schon damals recht wüsten, Gegenden aus Inschriften und Urkunden Genaueres über Ghassânische Bauten ermittelt hätte, ist doch kaum anzunehmen; ohne solche Grundlagen konnten aber höchstens Sagen und Vermuthungen über diese Dinge aufgezeichnet werden, die in einem Falle das Richtige treffen mochten, in anderen nicht. Da nur 13 von Hamza's 32 Fürsten als Bauherrn erscheinen, während die Anzahl der Werke ungefähr hingereicht hätte, jedem eins zuzuweisen, liesse sich annehmen, dafs Hamza diese Angaben aus einem Verzeichnifs gesammelt habe, welches, wie andere ältere Listen, nur etwa ein Dutzend Gafniden regieren liefs. Allein es wäre gegen die Natur dieses, im Historischen wie im

---

[1]) دير حالى ist durch das syrische ܕܝܪܐ ܕܚܩܠ ܚܠܐ ZDMG 29, 437 gesichert.

Sprachlichen zu äufserst willkürlichen Constructionen geneigten, Mannes, dafs er sich in jenem Falle mit den Namen der Fürsten streng an seine Vorlage sollte gehalten haben[1]). Wie dem aber auch sei, wir müssen gegen diese Angaben immer etwas mistrauisch bleiben, wenn wir darin finden, dafs schon der Ahne des Geschlechts, Gafna, der schwerlich je Syrien gesehn hat, solche Bauten errichtet habe. Und zwar soll er u. A. das von den Dichtern viel genannte Gilliq — später ein Lieblingssitz der Gafniden, s. S. 47 — gebaut haben, Hamza 116, ferner alQuraija, worin Wetzstein, Reisebericht 121 ein Dorf dieses Namens im südlichen Ḥaurân sieht, das aber vielleicht das von Ḥassân 100, 5 genannte alQuraijât ist: zwei Orte dichte bei der Hauptstadt Damascus von einem frisch aus dem Ḥigâz eingerückten Nomadenhaupt gebaut! Gafna's Sohn ʿAmr hätte sich erst über sein Christenthum auszuweisen, ehe wir ihm die Erbauung dreier Klöster, darunter das berühmte Hiobskloster, zutrauen dürfen. Haben wir in den Qanâṭir (Hamza 117), wie es wahrscheinlich ist, mit Wetzstein die s. g. Qanâṭir Firʿaun zu sehn, so können wir den Bau einer so gewaltigen Wasserleitung schwerlich irgend einem Ghassânier zuschreiben, ganz gewifs nicht dem Gabala, dem Vater des Arethas, des ersten wirklich mächtigen dieser Fürsten. Ein Land alter Cultur und blühenden Wohlstandes, wie wir es namentlich seit Wetzstein kennen, brauchte nicht auf diese Wüstenkönige zu warten, um solche Werke zu schaffen[2]); den späteren Araber lag es dagegen nahe, sie als deren Urheber anzusehn, denn sie wufsten nichts von der Geschichte des Landes, als dafs da einst Gafna's Söhne ein Reich gehabt hätten, und sie überschätzten gewaltig dessen Dauer. Darauf, dafs von einigen der bei Hamza als Bauherrn Genannten sogar die Existenz recht fraglich ist, will ich nur beiläufig hinweisen. Aus einer Dichterstelle mag noch „das Schlofs von Ḥârib“ (Hamza 118. 119) stammen: „das Grab in Ṣaidâ'[3]) bei Ḥârib“ Nab. 1, 6.

---

[1]) Man bedenke nur, dafs er den Sieg in der Schlacht, worin alMundhir b. Mâ'-assamâ' fiel, gegen Geschichte und Tradition einem sonst ganz unbekannten Gabala b. anNuʿmân zuzuschreiben wagt. — Die 13 Fürsten, bei welchen er Bauten angiebt, bilden, wie sie da stehn, auf keinen Fall eine eigne Liste.

[2]) Dafs unter den etwa 1000 bekannten Inschriften dieser Länder nur 2 sind, welche einen Gafniden erwähnen, ist auch zu beachten!

[3]) Über dessen Lage s. Wetzstein, Reisebericht 117.

Darauf darf man allerdings kein Gewicht legen, dafs ein Ort, dessen Erbauung Gafniden zugeschrieben wird, schon in älterer Zeit vorkommt[1]), denn die „Erbauung" braucht blofs eine Wiederherstellung oder eher die Errichtung eines hervorragenden Gebäudes dort zu sein. Wir kommen aber darauf hinaus, dafs wir in diesen Angaben die Ansicht eines Späteren über Ghassânische Werke sehn, welche zum Theil unrichtig sein wird, zum Theil aber allerdings auf richtiger Kunde beruhn mag. So ist die Stiftung von Klöstern durch Gafniden an sich recht wahrscheinlich, und die Herstellung der von einem Lachmiten zerstörten Wasserversorgung für die hochheilige Stadt Sergiopolis (Ruṣâfa) durch einen von jenen (Hamza 120) klingt sehr glaublich. Welcher Ghassânier das war, ist freilich ungewifs. Vielleicht that es in Wirklichkeit alḤârith b. Gabala, nachdem bei der kurzen Belagerung durch Chosrau (542) die von Justinian erbaute grofse Wasserleitung zerstört sein mochte, s. Procop Pers. 2, 20; Aedif. 2, 9.

Das Gebiet, auf welchem die bei Hamza genannten Orte liegen, ist allerdings, soweit wir deren Lage mehr oder weniger genau kennen, wirklich das, wo die Gafniden geherrscht haben. Die südlichsten Orte sind Adhroḥ und Mo'ân, beide nahe bei Petra (Hamza 117, 10, 14)[2]), der am weitesten nach NO gelegne Ruṣâfa. Die meisten Localitäten, die wir bestimmen können, liegen zwischen Damascus und der Belqâ' (einschliefslich)[3]). Dafs eben diese Gegenden den Gafniden unterthan gewesen,

---

[1]) *Al'Eglât* (Hamza 118), heutzutage *'Aǧêlât* (Diminutiv), auf dem Ḥaurângebirge hat eine Inschrift aus heidnischer Zeit (Wetzstein nr. 19 = Wadd. 2209) und wird in einer andern von 411 genannt (Wadd. 2025). Auch bei Burton and Drake 2, tab. 6 nr. 28 würde eine bessere Abschrift vielleicht [οἱ ἀπὸ] κώμης Ἔγλ[ων] erkennen lassen. — Hat Wetzstein mit seiner Erklärung von alQuraija Recht, so gehört auch dieser Ort hierher, denn da finden sich Inschriften von den Jahren 139. 295. 355. 389 (Wadd. 1962ff.). — Beiläufig bemerkt, ist مصنعة in diesen Angaben schwerlich immer mit Wetzstein als „Cisterne" zu fassen.

[2]) Mo'ân ist wohl aus Ḥassân 100, 4 erschlossen, wo es aber ein Ort näher bei Damascus sein mufs.

[3]) AlQasṭal (Hamza 117) ist von den verschiedenen Orten dieses Namens (καστέλλιον) wahrscheinlich der noch jetzt bestehnde in der Belqâ', südlich von 'Ammân, der auch bei Ṭabarî (Koseg.) 2, 86 genannt wird als nahe bei Zîzâ (lies زيزا für زبرا) und Âbil (אבל כרמים) gelegen.

wufste man noch später, und in sofern darf man auch aus dieser Übereinstimmung keine weitgehnden Schlüsse ziehn.

Bedenklich steht es mit Hamza's Angaben über die Residenzen einiger dieser Herrscher. Gâbia, das als eines (jüngeren) alḤârith b. Gabala Wohnsitz genannt wird (S. 120), liefs sich aus den Dichtern erschliefsen[1]). Dagegen ist es kaum wahrscheinlich, dafs Einer aus dem Hause in aṣṢiffîn (119, 15) am Euphrat zwischen Raqqa und Bâlis unweit der persischen Gränze gewohnt habe. Zu diesen Angaben stimmt überhaupt schlecht, dafs, wie wir S. 48 sahen, Johannes von Ephesus von einem „Heerlager der Familie des Arethas" spricht, also einem Orte, wo sich auch seine Nachfolger aufzuhalten pflegten.

Wir könnten hier schliefsen. Doch ist es wünschenswerth, dafs wir uns wenigstens kurz mit den Angaben der arabischen Historiker über Namen, Folge und Regierungsdauer der Gafniden auseinandersetzen[2]). Zuvor wollen wir noch unsre Liste der Fürsten aus den authentischen Quellen übersichtlich geben:

---

[1]) Palmyra soll 121, 9 wohl nicht regelmäfsiger Sitz des Fürsten sein, sondern ein Ort, wo er Bauten errichtet habe. „Der Mann (Herr) von Tadmor, Qaṣr Birka und Dhât Anmâr" (letztere beiden unbekannt) setzt allerdings voraus, dafs er auch in Palmyra selbst geherrscht habe, was undenkbar ist, s. oben S. 47. Abulf., Hist. anteist. 130 hat sich Hamza's Text, der ihm schon verdorben vorlag, selbständig, aber unglücklich zurecht gelegt. Lies والمُوقع ببنى القين بن جسر وعاملة „und der die BanulQain b. Gasr und die ʿÂmila übel zurichtete". — Was *asSadîr* 118, 11 sein soll, ist ganz dunkel. Doch wohl nicht eine Verwechslung mit dem berühmten Schlofs der Lachmiten bei Ḥîra?

[2]) Ich berücksichtige nur solche arabische Schriftsteller, deren vollständiger Text mir vorliegt.

Abû Šamir Gabala um 500?
alḤârith b. Gabala, oberster Phylarch seit 529, stirbt 569
Abû Karib alMundhir b. alḤârith 569 — 582
anNu'mân b. alMundhir 582 — 583 [1])

alḤârith der Jüngere, Sohn alḤârith's des Älteren ([alḤârith?] alA'rag, Sohn alḤârith's des Jüngeren) Abû Ḥogr anNu'mân (Sohn alḤârith's des Jüngeren?) Sein Bruder 'Amr [2]) Ḥogr b. anNu'mân	zwischen 583 und 614

\+ + +

Gabala b. alAiham 635

Man sieht, unsre Ergebnisse sind sehr bescheiden, und dazu ist noch Etliches darin problematisch. Die Araber wissen zum Theil viel mehr. Freilich noch nicht der älteste arabische Historiker, den wir befragen können, Ibn alKelbî. Dieser kennt zwar die Vorfahren des Arethas genau, dann aber zählt er nur dessen Kinder auf: anNu'mân, womit der gemeint sein mag, der in Wirklichkeit sein Enkel war, alMundhir, einen Zweiten dieses Namens, im Diminutiv alMunaidhir genannt, Gabala und Abû Šamir. Letzterer steht da nur, um den angeblichen alḤârith b. Abî Šamir aus Muḥammed's Zeit hier anzubringen. Ähnliche Rücksicht hat verursacht, dafs ein jüngerer alḤârith b. Gabala b. alMundhir angehängt wird. Auch Gabala b. alAiham, der nicht ignoriert werden konnte, war gewifs ursprünglich als Enkel des letztgenannten Gabala aufgeführt, während er in der Londoner Handschrift durch Auslassung zweier sich wiederholender Namen als Enkel eines älteren Gabala und Neffe des Arethas erscheint [3]). Auf alle Fälle reichte Ibn alKelbî's Kunde nicht

---

[1]) Bei all diesen Zahlen ist ein Fehler von 1 Jahr möglich.

[2]) Vielleicht vor anNu'mân.

[3]) Für جبلة بن الايهم بن جبلة بن الحرث بن ثعلبة بن عمرو بن جفنة ist zu lesen جبلة بن الايهم بن جبلة بن الحرث بن جبلة بن الحرث بن ثعلبة بن عمرو بن جفنة So bei Gurgânî (Ibn Chaldûn 2, 280) und nach Ibn Chaldûn eb. auch bei Mas'ûdî; ferner ist die Berichtigung indirect aus Hamza zu nehmen. Unser jetziger Text des Mas'ûdî (3, 220) hat denselben Fehler.

über die Söhne des Arethas hinaus, von denen er auch nur unsicher unterrichtet war, und rechnete er den genealogischen Abstand der letzten Gafniden von Arethas viel zu gering. Von den Dichtern hat er für die spätern Gafniden keinen Gebrauch gemacht.

Der Liste Masʿûdî's (schrieb 947) liegt die des Ibn alKelbî zu Grunde. Obwohl ich aufser der Pariser Ausgabe, dem Bûlâqer Druck und den Angaben Ibn Chaldûn's noch die mir von de Goeje besorgte Collation zweier Leydner Manuscripte zur Hand habe, bin ich doch nicht im Stande, die Namen Masʿûdî's ganz in's Reine zu bringen. Bei den langen Reihen von Namen, die sich so viel wiederholen, haben die Abschreiber bald hier, bald da Etwas übersprungen, und auch der vollständigste Text, der des Ibn Chaldûn, bietet nicht elf Fürsten, wie ausdrücklich angegeben[1]), sondern nur zehn. Bei den Vorfahren des Arethas fehlt ʿAmr zwischen Gafna und Thaʿlaba. Von den Söhnen des Arethas wird der eine alMundhir mit Abû Šamir identificiert, so dafs der andre einfach alMundhir heifst und nicht als alMunaidhir unterschieden zu werden braucht. AlḤârith b. Abî Šamir ist dann natürlich der Sohn jenes alMundhir. Diesem alḤârith giebt Masʿûdî dann noch einen Bruder ʿAuf, von dem sonst keine Quelle weifs, und (wenigstens nach Ibn Chaldûn) einen Sohn anNuʿmân; das ist der von anNâbigha Besungene, den er aus der Tradition über diesen Dichter kennt. — Die Regierungsfolge hat sich Masʿûdî oder seine Quelle zum Theil aus dem genealogischen Schema hergestellt, und zwar mit wenig Glück. Vorne schiebt er nach älterem Vorgang den Muḥarriq ein (s. oben S. 7). Unter den Nachkommen Gafna's hat er den Wichtigsten von allen, Arethas, nicht als König, oder vielmehr erst als alḤârith b. Abî Šamir zur Zeit Muḥammed's. AlAʿrag fehlt.

Auch Gurgânî († 976, nach Andern 1001/2) bei Ibn Chaldûn 1, 280. 283[2]) legt Ibn alKelbî zu Grunde. Die Übereinstimmung wird noch gröfser, wenn wir alMundhir b. alḤârith b. Thaʿlaba an die rechte Stelle

---

[1]) So alle Texte. Die französische Übersetzung durch Druck- oder Schreibfehler „douze“ für „onze“.

[2]) Die Tabelle stimmt in der Bûlâqer Ausgabe nicht in allen Einzelheiten mit dem Text, wie das öfter bei den Tabellen dieses Drucks der Fall ist; daher steht nicht Alles ganz sicher.

als alMundhir b. [alḤârith b. Gabala b.] alḤârith b. Tha'laba zurückbringen. Eine Verbesserung (vielleicht zufällig) ist, dafs er diesem alMundhir einen Sohn anNu'mân giebt; das wäre der 583 nach Constantinopel Geführte. Gurgânî hat nur einen Zusatz, indem er dem alḤârith b. Abî Šamir, dem er den alA'rag gleichsetzt, zwei Söhne, alMundhir und 'Amr, giebt. Sollte für jenen vielleicht anNu'mân zu lesen sein, sodafs wir die von Nâbigha gefeierten Brüder hätten? — Als ersten König nennt Gurgânî einen Seitenverwandten der Gafniden Tha'laba b. 'Amr b. alMugâlid, dem der Gafnide Tha'laba b. 'Amr b. Gafna folgt. Diese beiden Gleichnamigen werden wohl aufgestellt, um gewisse Widersprüche der Tradition auszugleichen. Seltsam ist nun aber, dafs es bei Ibn Chaldûn 2, 280 heifst, nach der richtigen Ansicht sei Abû Šamir (kein Gafnide, sondern) der Sohn des 'Auf b. alḤârith b. 'Auf b. 'Amr b. 'Adî b. 'Amr b. Mâzin (= Ghassân). Es ist allerdings nicht ganz klar, ob Ibn Chaldûn diese Angabe (welche S. 281 unten wiederholt wird, mit Gleichsetzung von Abû Šamir und alḤârith alA'rag) wirklich von Gurgânî hat. Aber dieselbe ist auf alle Fälle ziemlich alt, denn auch Ibn 'Abd-rabbih in dem etwa 936[1]) geschriebnen 'Iqd sagt, alḤârith b. Abî Šamir alA'rag, der König der Ghassân, sei kein Gafnide, wie man gewöhnlich meine, sondern von den Banû Numair[2]) b. 'Amr b. 'Auf .... b. Mâzin; nur seine Mutter sei aus Gafna's Hause (ed. Caïro 2, 79). Dafs hier der Vater, dort der Sohn Abû Šamir heifst und dafs der Stammbaum hier mindestens um ein Glied länger ist, macht keinen wesentlichen Unterschied. Gut, dafs wir nach Allem, was wir wissen, diese Angabe als eine willkürliche Conjectur ansehen können.

Deren gab es nun auf diesem Gebiet noch weit mehr. Die alten Schriftsteller kennen begreiflicherweise nur wenige Gafniden und wissen nicht, wann und wie lange die Einzelnen regiert haben. Ṭabarî und die ihm parallel gehn, sowie die, welche sich an ihn schliefsen, ignorieren diese Dynastie daher fast ganz, da sie gleichsam zeitlos ist. Was aber

---

[1]) Die in das Buch aufgenommene Reimchronik des Verfassers über die Thaten der spanischen Omaijaden geht bis 323 d. H. = 934/5. Die in den beiden Ausgaben (Bd. 3) stehnde Fortsetzung der 'Abbâssidengeschichte bis gegen das Ende des Jahrhunderts ist natürlich ein späteres Einschiebsel und fehlt in der Münchner und der Wiener Handschrift (die Gothaer hat diesen Theil nicht).

[2]) So auch die Münchner Handschrift.

alKelbî und sein Sohn nicht wagten, die den Dingen noch näher standen und die für die Chronologie der Könige von Ḥîra sehr Achtungswerthes geleistet haben, das brachten Spätere fertig. Ich war geneigt, Hamza (schrieb 961) gradezu für den Urheber dieses ganzen Gebäudes von 32 Ghassâniern mit 601 Jahren Gesammtdauer zu halten, bis ich fand, dafs schon im ʿIqd, das über 25 Jahre früher geschrieben ist als Hamza's Büchlein, eine ganz ähnliche Angabe steht, nämlich dafs 37 Ghassânische Könige in Syrien zusammen 616 Jahr regiert hätten „bis der Islâm kam"[1]). Der Schöngeist Ibn ʿAbd-rabhih ist von dem Verdachte frei, dafs er selbst so Etwas zurecht gemacht habe; er fand es also schon vor. Der Unterschied der Gesammtdauer, 601 und 616 Jahre[2]), wird daher kommen, dafs Einer zu den 601 Jahren, von denen er fälschlich glaubte, dafs sie nur bis zur Higra gehn sollten, noch 15 Jahre bis zur Eroberung Syriens hinzufügte: somit ist wahrscheinlich 601 die ältere Zahl. Wie es sich mit den 37 Königen verhält gegenüber den 32 bei Hamza, weifs ich nicht; vielleicht hatte Jemand aus andern Quellen noch 5 weitere Namen zu denen hinzugefügt, welche die frühere Construction zeigte (wie etwa alAʿrag, den Hamza nicht kennt). Hoffentlich gelingt es noch einmal, die Entstehung von Hamza's Darstellung genauer zu erkennen, wobei übrigens für die Kenntnifs der Geschichte selbst schwerlich etwas herauskommt. Für jetzt müssen wir uns damit begnügen, diese Darstellung als ein Ganzes aufzufassen. Übrigens ist nach Hamza's ganzer Art vorauszusetzen, dafs er seine Vorlage nicht einfach wiederholt, sondern dafs er sie nach eignen Gesichtspuncten „verbessert" hat.

Ein europäischer Forscher müfste allerdings auf den ersten Blick sehn, dafs die Basis des ganzen Baus, die lange Dauer der Dynastie, hinfällig ist und dafs das System auch sonst noch die erheblichsten Män-

---

[1]) ʿIqd l. c. Genau so haben die Wiener Handschrift, die Gothaer und die Münchner. (Ich verdanke diese Mittheilungen resp. der Güte der Herren Dr. Geyer, Pertsch, Bezold.) Es ist also nicht wohl daran zu zweifeln, dafs die Stelle schon vom Verfasser herrührt.

[2]) Die Zahl 616 ist auch in die Handschrift eingedrungen, welcher Gottwald's Ausgabe folgt (S. 122).

gel und inneren Widersprüche hat. Da regieren 6 Brüder (nr. 7—12)[1] zusammen 94 Jahre und 8 Monate! AnNâbigha bezeugt, vom Vater von nr. 15 Wohlthaten empfangen zu haben, besingt den Tod von nr. 26 und macht Verse auf Ereignisse der Regierung von nr. 27: das gäbe eine Differenz von über 250 Jahren! Dafs die Liste aber nicht etwa gleichzeitige Regierungen meint, zeigt deutlich die Gesammtsumme von 601 Jahren[2]. Diese Zahl, absichtlich ungrade für 600[3], dürfte durch das Bestreben hervorgerufen sein, die Ghassânische Dynastie mit der ihr gegenüberstehnden Lachmitischen gleich alt zu machen, deren Dauer auch bedeutend überschätzt ward. Dazu kam wohl eine, mit unzulänglichen Mitteln ausgeführte, Berechnung, welche den ersten Gafniden mit der Zerstörung Jerusalems oder dem Anfang des Christenthums gleichsetzte, ähnlich wie nach Ibn Challikân Titus[4], der Zerstörer Jerusalems, den ersten Selîhiden eingesetzt haben soll. Die 601 Jahre zerfallen in 3 fast genau gleiche Theile: nr. 1—12 mit zusammen 201 Jahren 11 Monaten; nr. 13—22 mit 199 Jahren 9 Monaten und nr. 23—32 mit 184 Jahren 4 Monaten, welche jedoch durch die hier nicht mitgezählten, aber zur Erreichung der Gesammtsumme von 601 Jahren nothwendigen 15 Jahre bis zur muslimischen Eroberung[5] zu 199 Jahren 4 Monaten ergänzt werden. Dafs das ganz künstlich ist, bedarf keiner Darlegung. So brauchen wir uns nicht erst dabei aufzuhalten, dafs schon der Ahnherr des Hauses Gafna 45 Jahr 3 Monat regiert. Wie weit etwa zur Erreichung der Gesammtsumme einzelne richtige überlieferte Zahlen benutzt sein mögen, läfst sich nicht ermitteln; die Möglichkeit ist allerdings zuzugeben,

---

[1]) Vgl. die Tabelle *b* im Anhang.

[2]) Diese Zahl, welche die Leydner Handschrift hat, giebt auch Muǧmil attawârîch wieder (Zotenberg), und sie wird indirect durch Abulfidâ', Hist. ant. 130 und Ibn Saʿîd bei Ibn Chaldûn 2, 282 bestätigt, welche 600 Jahre angeben. — Ein älterer Ansatz, den Hamza auch erwähnt, hat für die Gafniden 400 Jahr.

[3]) Bekanntlich ist es in den chronologischen Systemen verschiedner Völker ganz gewöhnlich, dafs die allzu auffallenden runden Zahlen durch kleine Zusätze oder Abzüge eckig gemacht werden.

[4]) 2, 278 طيطش بن قيصر ماهان; ماهان ist etwa aus اسبسيان entstellt.

[5]) Dafs so die Differenz der wirklichen Summe = 586 Jahren und der angegebnen = 601 zu erklären, habe ich von Gutschmid.

s. oben S. 29 ff. Soviel sehn wir sofort, dafs auf keine dieser Zahlen an sich Verlafs ist, und dafs es völlig unmöglich ist, mit Hamza's Hülfe die Chronologie der Gafniden zu bestimmen, geschweige sie auf ihn zu bauen: also sind Caussin's Ansätze, die durch Reduction von Hamza's Zahlen gewonnen sind, ganz werthlos.

Die Zahl der Regenten in der Liste Hamza's vermindert sich etwas, wenn wir die Gruppe, welche doppelt vorkommt, nr. 4. 5. 6. 8. 10 = nr. 23. 24. 25. 26. 31 (jene mit 89 Jahren 6 Monaten, diese mit 105 Jahren 11 Monaten Gesammtdauer)[1]), einmal streichen; und zwar hätte das an der zweiten Stelle zu geschehn, da sie an der ersten durch die alte Überlieferung und zum Theil durch die Geschichte gesichert ist. Aber auch sonst finden wir noch bedenkliche Wiederholung derselben Namen. Ibn alKelbî hat nur 1 anNu'mân, wir kennen 2, Hamza 4 (resp., wenn die Verdoppelung mitgerechnet wird, 5), darunter 2 (resp. 3) anNu'mân b. alḤârith; Ibn alKelbî hat 3 Gabala (wir 2), Hamza 4 (5); IK 3 alMundhir (wir 1), Hamza 4; IK 1 alAiham (wir 1), Hamza 2; IK 1 'Amr und zwar ganz oben in der Genealogie (wir dazu noch 1), Hamza 5 (von denen einer nicht König gewesen sein soll). Ferner hat er zu dem Stammvater Gafna noch einen weiteren und dann endlich noch einen Ḥogr (historisch) und einen Šarâḥîl. Letzteres ist der einzige Name, der uns sonst gar nicht unter den Gafniden begegnet; gewifs kein günstiges Zeichen bei einem Überschufs von etwa 20 über die sonst Genannten.

Wir dürfen allerdings annehmen, dafs dem Verzeichnifs Hamza's aufser der Genealogie Ibn alKelbî's auch noch wenigstens eine andre Quelle zu Grunde liegt. Die Nachricht von der Einsetzung des ersten Gafniden durch Kaiser Anastasius und die — oder einige — Angaben über die Bauten haben mehr Gewicht als die Menge von Königsnamen und von Jahreszahlen. Vielleicht kommen dazu noch einige zerstreute Notizen. Dazu sind von Hamza oder einem Vorgänger desselben die Dichterstellen, welche ihm grade vorlagen, und einige Erzählungen über alte Dichter nach Kräften ausgebeutet, aber auch schon sehr willkürlich. Das grofse Gebäude ist aus dem Allen aber erst errichtet mit Anwendung

---

[1]) Im Einzelnen haben die identischen Personen in beiden Partien je gänzlich verschiedne Zahlen: wieder ein Beweis der Werthlosigkeit.

einer skrupellosen Ergänzung des aus der Überlieferung zu Erschliefsenden durch eigne Einfälle und Systematisierung. Es bleibt also dabei: die ganze Construction ist unbrauchbar; von den Einzelheiten ist nur das zu benutzen, was von andrer Seite her eine feste Stütze hat.

Einen völlig andern Character als die bisher besprochnen Listen hat die des Ibn Qotaiba († 889)[1]). Sie ist nämlich fast einzig auf die Dichter und die an diese geknüpfte Tradition gegründet. Voran steht, wie bei Mas'ûdî, Muḥarriq, der hier alḤârith b. 'Amr mit der Kunja Abû Šamir und „der ältere alḤârith" ist. Ihm folgt sein Sohn alḤârith b. Abî Šamir = alḤârith alA'rag, der Sohn der Mârija, ihm sein Sohn, der jüngere alḤârith. Diese Drei aus dem Verse. Dann kommt (aus anNâbigha) Abû Ḥogr anNu'mân b. alḤârith mit 3 Söhnen: Ḥogr und 'Amr (nach Ḥassân) und ein zweiter anNu'mân, von dem ich nicht weifs, woher er stammt. AlḤârith alA'rag soll ferner einen Sohn 'Amr b. alḤârith gehabt haben; das sei der von anNâbigha Genannte; dies sei „der jüngere Abû Šamir". Darin liegt ein Versuch, die verschiedenen Angaben über Abû Šamir auszugleichen. Als Brüder dieses hat Ibn Qotaiba ferner alMundhir b. alḤârith — Nachklang der echten Überlieferung — und alAiham, dessen Sohn Gabala b. alAiham. Der letzte Gafnide wird also auf die kürzeste Weise dem alten Stamm angefügt. Eine Kritik dieser naiven Liste ist nicht nöthig: man bedenke, dafs darin nicht einmal der Name von des Arethas Vater Gabala vorkommt, weil derselbe von den Dichtern nicht genannt wird. Ein Einflufs älterer Tradition zeigt sich aber wohl darin, dafs ein alḤârith (hier der Zweite, in Wirklichkeit der Erste der Drei) eine gröfsere Reihe Söhne hat.

Endlich haben wir bei Ibn Qotaiba's Zeitgenossen Ja'qûbî (schrieb gegen 875) eine Liste, welche ganz für sich steht, wie Ja'qûbi sich auch sonst in guten wie in schlechten Berichten so oft von allen Andern absondert (1, 335 f.); leider ist diese Liste die allerwunderlichste. Als ersten König hat sie den Ahnherrn Gafna, der hier nicht Sohn, sondern

---

[1]) Die mir von Hrn. Dr. Jensen gütigst besorgte Collation der Sprengerschen Handschrift 36 hat keine für meine Zwecke wesentlichen Varianten zu Wüstenfeld's Ausgabe S. 313 ff. gebracht. Sprenger 37 hat in dem Abschnitt eine grofse Lücke, und Sprenger 38 liefert nur ein paar unbedeutende Abweichungen am Rande von S. 313 der Ausgabe.

Enkel des ʿAmr b. ʿÂmir ist; sein Vater ist عليّة[1]. Auf ihn folgt ein Seitenverwandter alḤârith b. Mâlik aus dem Stamme der Chazrag (in Medîna); ein Anklang an Gurgânî's Liste. Dann kommen die 3 alḤârith des Verses als Brüder und Söhne des Kaʿb, der = Gafna sei. Von diesen habe alḤârith alAʿrag in Gôlân gewohnt (aus den Dichtern). Dann Gabala b. alMundhir[2] (ohne Fortsetzung der Genealogie nach oben), dessen Sohn alḤârith b. Gabala und dessen Bruder alAiham. Endlich regierten gleichzeitig der Sohn des Letzgenannten, Gabala b. alAiham und sein Enkel alḤârith b. Abî Šamîr b. alAiham, und zwar jener in Damascus, dieser in Urdunn. Die Angabe könnte auf den ersten Blick Vertrauen erwecken, aber sie ist nur ein Versuch, die Traditionen über Gabala b. alAiham und die über den angeblichen alḤârith b. Abî Šamir in Muḥammed's letzten Jahren auszugleichen. Soll unter Damascus die Stadt verstanden werden, so ist das Gesagte ganz unmöglich; wenn aber das Gebiet von Damascus gemeint ist, so gehört dazu nach arabischer Eintheilung auch Gôlân, also der einzige Theil von Palaestina secunda, wo ein Gafnide etwas zu schaffen haben konnte; der übrige Theil dieser Provinz = dem arabischen Urdunn gab kein Land für einen Araberfürsten ab[3]. Man beachte übrigens, dafs alḤârith b. Gabala auch sonst hier zweimal vorkommt, wie denn in dieser Liste von 10 Namen nicht weniger als 6 alḤârith sind.

---

[1]) 236, 3 ohne Puncte علبه. Vielleicht in ثعلبة zu verbessern? Der Name Thaʿlaba kommt in diesen Partien der Genealogie mehrfach vor, auch bei Jaʿqûbî.

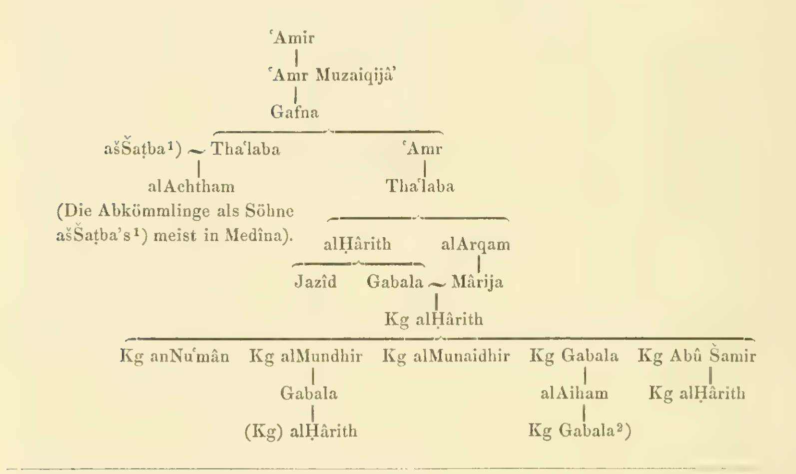
[2]) So verbessert Houtsma das المردد der Handschrift.

[3]) Das gilt auch gegen Masʿûdî 3, 220, 7, wonach einige Gafniden in Urdunn residiert hätten.

Anhänge.

a.

Genealogie der Gafniden nach Ibn alKelbî.



[1]) Ich verbürge nicht die Richtigkeit der Form.

[2]) Ich nehme hier die oben S. 53 angegebne Verbesserung auf.

Genealogie d

mit Angab

ʿÂ

ʿAmr I

1 Gafna

2 ʿAmr (

3 Thaʿlab

4 *alḤâri*

5 *Gabala*

6 *alḤâri*

7 alMundhir (3) 8 *anNuʿmân* (15 J. 6 M.) 9 Abû Samir alMundh

13 Gafna (30) ʿAmr (regierte nicht) 14 anNuʿmân (1)

15 anNuʿmân (27)

16 Gabala (16)

25 *alḤârith*

26 Abû Karib *anNumân* (3

[1]) Die cursiv gedruckten Namen bilden die Gruppe, welche zweimal vorkommt.

nach Hamza

ngsdauer.[1])

3 Monat)

ala (34) 11 alAiham (3) 12 ʿAmr (26 J. 2 M.)

Nuʿmân (21) 18 alḤârith (22 J. 5 M.)

19 anNuʿmân (18)

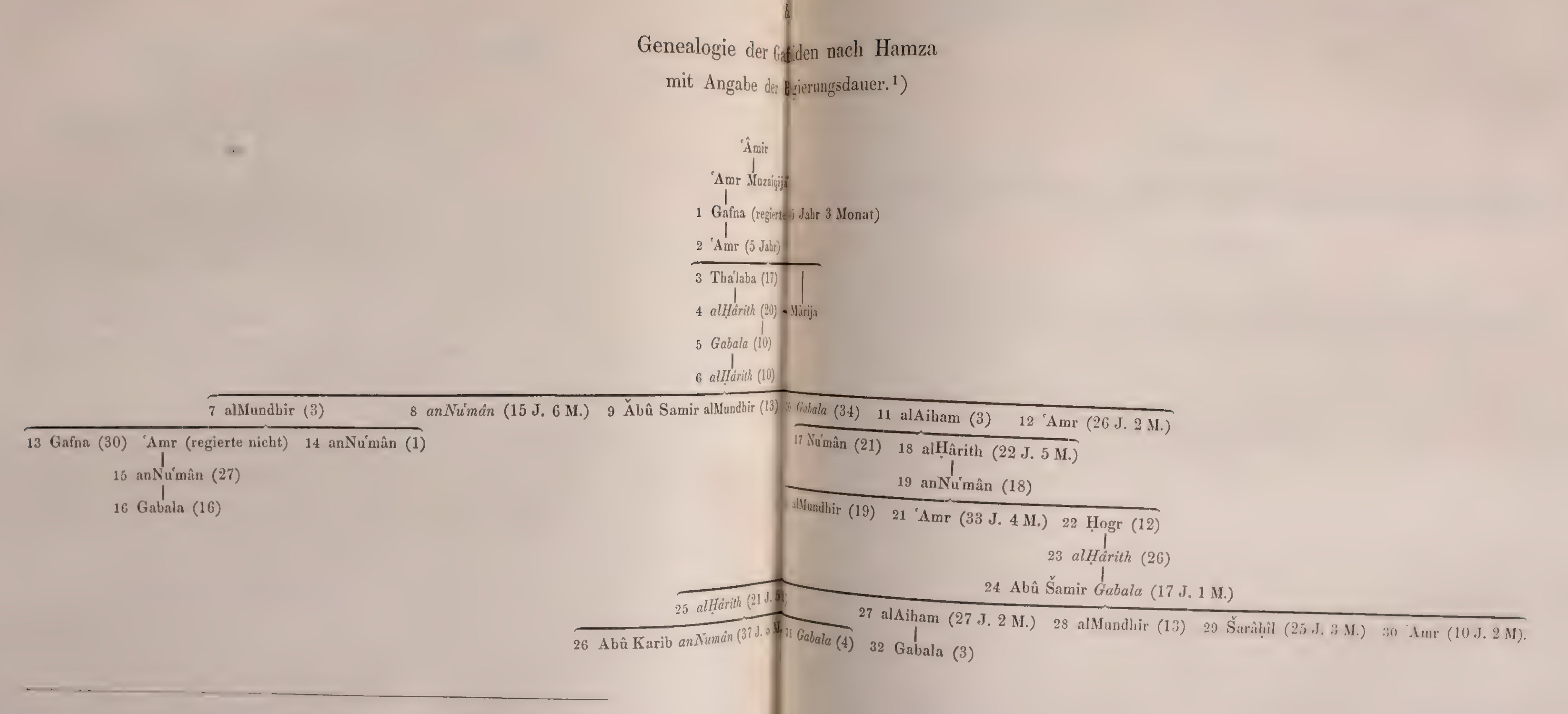
undhir (19) 21 ʿAmr (33 J. 4 M.) 22 Ḥogr (12)

23 *alḤârith* (26)

24 Abû Šamir *Gabala* (17 J. 1 M.)

27 alAiham (27 J. 2 M.) 28 alMundhir (13) 29 Šarâḥîl (25 J. 3 M.) 30 ʿAmr (10 J. 2 M).

abala (4) 32 Gabala (3)



[1]) Die cursiv gedruckten Namen bilden die Gruppe, welche zweimal vorkommt.

ANHANG ZU DEN

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

ABHANDLUNGEN NICHT ZUR AKADEMIE GEHÖRIGER GELEHRTER.

AUS DEM JAHRE

1887.

MIT 4 TAFELN.

BERLIN.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1888.

BUCHDRUCKEREI DER KÖNIGL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN (G. VOGT).

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Inhalt.

Physikalische Abhandlungen.

Mathematische Abhandlungen.

Philosophisch-historische Abhandlungen.



PHYSIKALISCHE ABHANDLUNGEN.

Die Fuſsdrüse der Opistobranchier.

Von

Dr. BERNHARD RAWITZ
in Berlin.

Vorgelegt in der Sitzung der physik.-mathem. Classe am 27. October 1887
[Sitzungsberichte St. XLII. S. 855].
Zum Druck eingereicht am 27. October 1887, ausgegeben am 24. December 1887.

Die Untersuchungen, deren Resultate in folgenden Blättern mitgetheilt werden sollen, wurden im Frühjahr dieses Jahres in der zoologischen Station zu Neapel begonnen. Die Munificenz der Kgl. Akademie der Wissenschaften hatte mich durch Gewährung einer Reiseunterstützung in den Stand gesetzt, einen mir vom Kgl. Preufsischen Unterrichtsministerium überwiesenen Arbeitstisch zu benutzen. Der Kgl. Akademie statte ich hierdurch aufrichtigen Dank ab. Beendet wurde die Arbeit im physiologischen Laboratorium der hiesigen Kgl. thierärztlichen Hochschule. Herr Professor Hermann Munk hat mich zu höchstem Danke, dem ich hiermit Ausdruck gebe, verpflichtet, indem er mir die Mittel seines Institutes zur Verfügung stellte.

Bei folgenden vier Arten der opistobranchiaten Gastropoden habe ich die Fufsdrüse untersucht: *Pleurobranchus Meckelii* D. Ch., *Pleurobranchus testudinarius* Cantr. (1 Exemplar), *Pleurobranchaea Meckelii* Leue und *Pleurophyllidia lineata* L. (1 Exemplar)[1]). Ich werde in Nachstehendem zunächst das Aussehen und den Aufbau der Drüsen der einzelnen Arten gesondert schildern, da hierin Differenzen vorliegen, und dann die histologischen Details der Drüsenepithelien geben, da diese allen vier gemeinsam sind. Im dritten Theile endlich sollen die Deckepithelien und die, wie ich sie nennen will, solitären Drüsen beschrieben werden.

---

[1]) Die Fufsdrüse von *Pleurobranchus testudinarius* und das einzige Exemplar von *Pleurophyllidia lineata*, das ich untersuchen konnte, erhielt ich durch die Liebenswürdigkeit meines Arbeitsgenossen auf der Loggia der Station, des belgischen Zoologen Herrn Dr. Paul Pelsener. Ich benutze mit Freuden die Gelegenheit, ihm dafür auch an dieser Stelle zu danken.

I. Der Bau der Drüse.

Pleurobranchus Meckelii D. Ch. Die Fufsdrüse, welche nur um weniges die Oberfläche der Fufssohle überragt, ist von röthlichbrauner Farbe und hat die Gestalt eines abgerundeten Keiles oder eines Ovoïds (Fig. 1). Die Basis desselben ist die Spitze der Fufssohle, sein zugespitztes Ende ist das vordere Ende der Drüse, welche ungefähr dreimal so lang wie breit ist. Stets findet man die Oberfläche des Organs, mag man das lebende Thier betrachten oder das conservirte Exemplar, leicht hügelig, ohne dafs indessen wie bei *Pleurobranchus testudinarius* (siehe später) eine bestimmte Zeichnung dabei zu erkennen wäre. Auf Querschnitten durch den gehärteten Fufs hat das Organ in seiner Mitte eine Dicke von ungefähr $\frac{1}{3}^{mm}$, während es sowohl am oralen, wie aboralen Pole, an letzterem weniger, an ersterem in höherem Grade, schwächer ist. Conform der hügeligen Beschaffenheit der Oberfläche oder der freien Fläche, denn diese ist nach unten gerichtet, erscheint die Drüse bei dieser Betrachtung als ein leicht wellig verlaufendes Band (Fig. 2). Sie besteht, wie die mikroskopische Untersuchung lehrt, aus einer sehr grofsen Anzahl von Schläuchen oder richtiger, von Blindsäckchen, die von verschiedener Länge und Form sind, je nachdem ihr Fundus von dem die freie Fläche bedeckenden, später noch genauer zu beschreibenden Epithel der Fufssohle mehr oder weniger entfernt ist, und je nachdem die Blindsäckchen in einer Reihe neben oder in mehreren hintereinander stehen. An den Rändern nämlich sind dieselben nur in einer einzigen Reihe angeordnet und stehen weit von einander ab, so dafs hier Blindsack neben Blindsack sich vorfindet (Fig. 3). Mehr nach der Mitte zu und in dieser selber, wo auch das Organ am mächtigsten entwickelt ist, sind sie dagegen dichter an einander gedrängt und bilden mehrere Reihen. Diejenigen sind daher kürzer, welche näher am Sohlenepithel liegen, diejenigen länger, welche tiefer in die Substanz der Fufssohle eingebettet sind. Dadurch ist auch eine Differenz in der Form bedingt, indem die mehr äufseren, d. h. mehr ventral gelegenen Blindsäckchen kürzer, dicker, gedrungener von Figur sind, dem Glaskolben des Chemikers gleichen,

während die tiefer in der Sohle sich findenden, sowie die Blindsäckchen an den Rändern schmaler, gestreckter sind und zu Folge ihrer fast parallelen Wandungen mehr einem Reagenzglase ähneln (Fig. 3). Ihre Längsaxe liegt in der dorsoventralen Axe des Körpers und man findet daher die einzelnen Theile der Drüse auf Querschnitten durch den Fufs längs getroffen. E i n g e m e i n s a m e r G a n g, w e l c h e r d a s v o n d e n D r ü s e n e p i t h e l i e n b e r e i t e t e S e c r e t n a c h a u f s e n f ü h r t, i s t n i c h t v o r h a n d e n; j e d e s D r ü s e n s ä c k c h e n v i e l m e h r m ü n d e t f ü r s i c h u n d g e t r e n n t v o m N a c h b a r zwischen den Zellen des Deckepithels der Fufssohle. Es ist dies Verhältnifs am klarsten an den Rändern, denn hier sind die einzelnen, wie schon bemerkt, von einander weit abstehenden Blindsäckchen parallel zu einander angeordnet und durch mehr oder minder mächtiges Bindegewebe, dem Muskelfasern beigemengt sind, von einander getrennt (Fig. 3). In der Mitte convergiren die Blindsäckchen, und, da sich die Mündungen der längeren zwischen den kürzeren durchwinden müssen und diese daher wiederholt kreuzen, so hat es hier und da den Anschein, als ob sich zwei oder mehrere Säckchen dicht vor dem Epithel vereinigen. Genaueres Zusehen zeigt aber sofort, dafs auch hier eine gesonderte Ausmündung überall statt hat. Dagegen findet man in der Mitte eine andere, wenn auch sehr seltene Erscheinung. Man trifft nämlich einzelne lange Drüsensäckchen, die direct an ein kurzes herangehen, hier sich gablig theilen und ihr Secret zu beiden Seiten des kurzen nach aufsen führen, dieses so umfafst halten und es umspülen. Jedes Drüsensäckchen besteht aus einer kernlosen, überaus zarten tunica propria, auf der die einzelnen Drüsenzellen in einer einzigen Reihe aufsitzen, und zwar reichen diese zu beiden Seiten bis zur Ausmündungsstelle im Epithel, mag die Differenz in der Länge des Schlauches auch noch so grofs und seine Entfernung vom Deckepithel noch so beträchtlich sein. Der Durchmesser der im gehärteten Präparat im Allgemeinen cubischen Zellen schwankt zwischen 16,2 — 30,6 μ, und zwar sind die im Fundus des Säckchens stehenden umfangreicher, als die der Seiten. Zwischen den Zellen findet sich ein je nach dem fixirenden Reagens verschieden breiter Spalt, der von dem Secrete ausgefüllt ist und auf dem Querschnitt als ein rundliches Lumen sich documentirt, das sich indessen nicht scharf

abhebt, wie wir es von den drüsigen Gebilden namentlich der Vertebraten her gewohnt sind.

Die Fufssohle besteht aus einer sehr weitmaschigen, kernarmen Bindesubstanz, in welcher zwei Gruppen von Muskeln in zerstreuten, vielfach mit einander communicirenden Bündeln verlaufen, die auf dem Querschnitt zum Theil quer, zum Theil längs getroffen sind. Die ersteren sind also Längsmuskeln. Bei den letzteren kann man wiederum zwei Gruppen unterscheiden; die einen ziehen von rechts nach links, sind also Ringmuskeln, während die anderen genau dorsoventral gehen, und als Ausläufer resp. Äste jener zu betrachten sind. Die einzelnen Muskelbündel bestehen aus Muskelfasern, die bandartig sind und zuweilen mehrere, in weiten Distanzen von einander abstehende, grofse Kerne besitzen. In der Nähe der Drüsensäckchen trennen sich die Fasern von einander und zerspalten sich in feinste Fibrillen, die pinselförmig aus einander fahren. Die einzelnen Fasern winden sich zwischen den Drüsensäckchen, theils über, theils unter, theils neben ihnen, hindurch und gehen an den Fufs des Epithels, hier eine schmale, aus lateral (von rechts nach links) ziehenden Muskelfasern und mit diesen vermischtem Bindegewebe bestehende Schicht bildend, die subepitheliale, in der die Sohlenepithelien wurzeln und die zum Durchtritt des Secretes feinste Öffnungen enthält.

Pleurobranchus testudinarius Cantr. Die Drüse entstammt einem sehr grofsen Exemplare, ist 17^{mm} lang, am hinteren Ende 10^{mm}, in der Mitte $8\frac{1}{2}^{mm}$ breit und geht vorn in eine abgerundete Spitze über, ist also ein Ovoïd (Fig. 4). Sie ragt ziemlich beträchtlich über das Niveau der Fufssohle hervor und ist makroskopisch dadurch ausgezeichnet, dafs sie auf der freien Fläche eine grofse Zahl von Windungen hat, die meistens in der Längsaxe des Organs verlaufen und durch tiefe Furchen von einander getrennt sind (Fig. 4)[1]. Es entsteht dadurch ein Bild, das an die Oberfläche des Grofshirnes eines Säugethieres sehr lebhaft erinnert. Auf dem Querschnitt hat das Organ im Allgemeinen eine Dicke von $\frac{3}{4}^{mm}$ und, entsprechend seinem äufseren Habitus, ein Aussehen,

[1]) Diese Furchen sind in der Figur etwas zu breit gerathen, so dafs das Bild dem natürlichen Verhalten nicht ganz entspricht.

wie die graue Rinde eines Gehirnes, welcher Eindruck noch dadurch verstärkt wird, dafs die eigentlich drüsige Schicht sich durch ihre dunklere Färbung von dem Gewebe der Fufssohle scharf markirt abhebt.

Eine eigenthümliche Differenz zeigt sich hinsichtlich der grob wahrnehmbaren Anordnung der Drüsentheile zwischen der oralen Spitze einer- und der Mitte und dem hinteren Ende andererseits. Während nämlich an den letzteren beiden Stellen das Organ als ein überall gleich breites, welliges, tiefe Buchten zeigendes Band erscheint, das sich seitlich scharf abgrenzt (Fig. 5^a), ist an der Spitze die Drüse geschlossen. D. h. sowohl an der ventralen, wie an der dorsalen Seite findet sich Drüsensubstanz, die das Gewebe der Fufssohle somit vollständig umschliefst (Fig. 5^b), ja am äufsersten oralen Pole fehlt fast gänzlich das Sohlengewebe und ventrale und dorsale Drüsenmassen berühren einander hier.

Ein gemeinsamer, mit besonderem Epithel bekleideter Ausführungsgang ist nicht vorhanden; die Blindsäckchen der Drüse münden in zahlreichen Öffnungen an der freien Fläche. Indessen ist hier dieses letztere Verhältnifs nicht so klar und deutlich, wie bei *Pleurobranchus Meckelii*, und zwar deshalb, weil hier die einzelnen Bestandtheile der Drüse nicht separirt von einander oder in bestimmter Weise gruppirt getroffen werden. Das Organ besteht aus aufserordentlich zahlreichen Säckchen, die in vielfacher Reihe hintereinander angeordnet sind und, um ihr Secret nach aufsen führen zu können, sich in wechselvollster Weise um- und übereinander winden müssen. Ferner, im Gegensatz zu dem Bau der vorhin beschriebenen Drüse, findet man hier sehr zahlreiche Communicationen zweier oder mehrerer Drüsensäckchen mit einander. Auf Querschnitten (Fig. 6) kann man daher nicht den dorsoventralen Verlauf jedes einzelnen Blindsäckchens ganz genau verfolgen, sondern sieht bald quer-, bald längs-, bald schräg getroffene Abschnitte derselben. Immerhin aber besteht mit der vorigen Species die wesentliche Übereinstimmung, dafs die bis ans Epithel gelangenden Theile getrennt von einander münden.

Die Drüsenzellen, von meist cubischer Gestalt im gehärteten Organe, sitzen in einfacher Reihe bis ans Epithel auf einer relativ starken, 0,45 — 0,90 μ, tunica propria auf, die zerstreute, kleine, kreisrunde und sich stets intensiv färbende Kerne führt. Nach der freien Seite zu ver-

einigen sich die tunicae propriae der einzelnen Drüsensäckchen zu einer 4—6 μ breiten, mehrblättrigen, ebenfalls kernführenden Membran, auf der die Epithelien der Fufssohle jedenfalls aufsitzen. Leider waren von denselben in dem einzigen, mir zur Verfügung stehenden Exemplare hier und da nur noch spärliche Reste erhalten.

Die Fufssohle ist hier ungemein dicht gewebt, die Maschen des kernreichen Bindegewebes sind sehr eng und von zahlreichen Muskeln durchsetzt, die genau dieselbe Anordnung zeigen, wie bei *Pleurobranchus Meckelii.* Sie ziehen in zarten Strängen zwischen den Drüsentheilen hindurch zum subepithelialen Gewebe, um hier in einer Weise zu enden, die von der vorhin beschriebenen Endigungsweise nicht wesentlich abweichen wird, die ich aber, da das Epithel und das subepitheliale Gewebe nicht erhalten war, nicht sehen konnte.

Pleurobranchaea Meckelii Leue. An der unteren Fläche der Fufssohle findet sich von der Spitze nach vorn ziehend ein ungefähr 1—2^{mm} breiter, dunkler Streifen. Derselbe liegt genau in der Mittellinie des Fufses, hat eine Länge, die etwas mehr als $\frac{1}{7}$ des ganzen Thieres beträgt, hat wellig gebogene, leicht erhabene Ränder, in der Mitte eine seichte Furche und ragt über das Niveau des Fufses um weniges hervor. Das ist die Fufsdrüse (Fig. 7). Auf Querschnitten besitzt sie eine Dicke von etwa $\frac{3}{8}^{mm}$, ist bedeutend schmäler, als die der beiden Species von *Pleurobranchus* und hat einen ventral eingebogenen, dorsal convexen Rand, also etwa Mondsichel-förmiges Aussehen (Fig. 8). Auch hier fehlt ein differenzirter, gemeinsamer Ausführungsgang. Die Drüse besteht aus zahlreichen, in mehreren Reihen hintereinander gruppirten Blindsäckchen, welche das von den in ihnen enthaltenen Zellen bereitete Sekret zwischen die Deckepithelien der Fufssohle hinführen. Je nach ihrer Entfernung vom Epithel sind die Drüsensäckchen kürzer oder länger und haben in ersterem Falle birnenförmige, in letzterem keulenförmige Gestalt (Fig. 9). Die Drüsenzellen, deren Gestalt in frischen Präparaten, wie noch später zu beschreiben, eine sehr wechselnde ist, in Schnitten sich als keulenförmige documentirt, weil hier der eigentliche Zellleib und das Secret scheinbar unvermittelt in einander übergehen, sitzen in einfacher Reihe auf sehr zarter, kernführender tunica propria

auf. Sie sind nur im bauchigen Theile des keulen- oder birnenförmigen Säckchens vorhanden, während sie im halsartigen, als Ausführungsgang zu betrachtenden Abschnitte fehlen, der lediglich von Sekret erfüllt ist. Die tunica propria setzt sich bis zur Einmündung unter dem Deckepithel fort, um hier in einer mir unklar gebliebenen Weise sich an der Bildung der subepithelialen Schicht zu betheiligen. Kein Drüsensäckchen communicirt mit dem anderen, jedes vielmehr mündet für sich besonders nach aufsen (Fig. 9). Die Richtung der Drüsensäckchen ist genau dorsoventral, der Fundus liegt dorsal-, die Mündung ventralwärts, man hat daher auf Querschnitten durch das gehärtete Organ die einzelnen Drüsentheile in der Längsaxe getroffen. Während bei *Pleurobranchus Meckelii* die einzelnen Drüsensäckchen am Rande parallel nebeneinander und nur in der Mitte convergent verlaufen, convergiren sie hier überall. Daher ist die Drüse an ihrem ventralen concaven Rande, welcher der makroskopisch sichtbaren Furche entspricht, schmäler, als an den Seiten und am convexen dorsalen Rande.

Das Gewebe der Fufssohle ist ein sehr lockeres, die Maschen der Bindesubstanz sind sehr weit, diese selber kernarm. Man findet auch hier auf Querschnitten quer- und längsgetroffene Bündel von Muskeln; erstere, welche die zahlreicheren sind, sind also die Längs-, letztere die Ringmuskeln des Fufses. Von diesen geht constant beiderseits der Mitte des durch die Furche gewissermafsen bilateral-symmetrischen Organes je ein 28 μ breites Muskelbündel dorsoventral zwischen den Acinis hindurch in die subepitheliale Schicht. Seitlich der ganzen Drüse gehen, ebenfalls dorsoventral, mehrere Muskeln in dieselbe, sich hier zwischen den einzelnen Blindsäckchen in Fasern und Fibrillen spaltend. Sie begeben sich, ohne mit den Drüsentheilen in directe Verbindung getreten zu sein, zum subepithelialen Gewebe, in welchem sie, vermischt mit Bindesubstanz und den proximalen Ausläufern der Deckepithelien, eine schmale Schicht bilden.

Pleurophyllidia lineata L. Das einzige Exemplar, über das ich verfügte, hat eine Länge von 43^{mm}; die Fufsdrüse, welche im hintersten Abschnitt des Fufses liegt, mifst 10^{mm} l. und $3\frac{3}{4}^{mm}$ br. und ragt über die freie Fläche der Fufssohle hervor (Fig. 10). Letzteres Mafs pafst indessen nur für die vordere Grenze, indem nach hinten zu die

Drüse sich verschmälert. Sie hat daher die Conturen eines gleichschenkligen Dreiecks mit oraler Basis und aboraler Spitze. Die Fufssohle verschmälert sich nach hinten zu einer feinen Spitze, die ganz von der Drüse eingenommen wird. Die Basis aber der letzteren und ihre vorderen zwei Drittel sind seitlich von Substanz der Sohle umgeben (Fig. 10). Die Drüse hat eine hügelige, freie Fläche. Dadurch nun, dafs diese Hügel durch regelmäfsige, lateral ziehende Furchen von einander getrennt sind, entstehen etwa 10 Abtheilungen, von denen 9 auf die beiden vorderen Drittel entfallen, die 10te auf das hintere Drittel. Die vorderen 9 Abtheilungen bilden, wie schon bemerkt, nicht zu hohe, aber deutlich sichtbare, buckelförmige Hervorragungen, die von vorn nach hinten an Gröfse allmählig abnehmen und in die flache oder nach der freien Seite zu leicht concave 10te Abtheilung übergehen. Die letztere ist nicht absolut eben, sondern erscheint leicht gewellt. Durch die ganze Drüse geht von vorn nach hinten eine seichte Furche, welche das Organ der Länge nach in zwei gleiche Abschnitte theilt. Auf Querschnitten durch die vorderen zwei Drittel hat das Organ nicht ganz 1^{mm} Dickendurchmesser. In Folge der medianen Furche zeigt es hier in der Mitte eine mäfsige Einsenkung, während die Seiten, leicht dorsalwärts zurückgebogen, abgerundete Conturen haben (Fig. 11^{a}). Dadurch gewinnt die Drüse ungefähr das Aussehen einer liegenden 8, welcher Vergleich nur darum nicht völlig zutrifft, weil die dorsale Seite des Organes eine Einsenkung nicht besitzt, sondern grade ist. Dieses Aussehen erhält sich vollständig in den vorderen zwei Dritteln, also in dem Theil der Drüse, welcher die buckelförmigen Erhebungen auf der freien Fläche besitzt. Die 10te Abtheilung, das aborale dritte Drittel, stellt dagegen auf Querschnitten ein gleichschenkliges Dreieck dar, dessen convex abgerundete Spitze dorsalwärts gerichtet ist, während die concave Basis ventralwärts liegt und von dem Sohlenepithel bekleidet ist (Fig. 11^{b}). Der dorsoventrale Durchmesser ist hier $0{,}7^{mm}$, der laterale $0{,}87^{mm}$. Körperlich betrachtet hat dieser Theil der Drüse also die Gestalt eines Keils mit dorsal gerichteter Schneide. Die concave Basis ist genau in der Mittellinie spaltförmig vertieft (entsprechend der medianen Furche des ganzen Organes) durch steile Abdachung der freien Fläche. Der Übergang zu dem Aussehen der vorderen zwei Drittel ist ein allmäliger. Der Keil wird nämlich, je mehr man

nach vorn kommt, breiter, die Schneide plattet sich ab, die spaltförmige Einsenkung wird flacher, die Seiten ziehen sich aus und werden rund bei gleichzeitiger bilateraler Hervorwölbung der freien Fläche.

Hier ist ebenfalls ein gemeinsamer, differenzirter Ausführungsgang nicht vorhanden, vielmehr münden diejenigen Drüsensäckchen, welche man dicht unter dem Deckepithel liegen sieht, getrennt von einander, jedes für sich, zwischen den Zellen des Deckepithels. Die Drüsensäckchen besitzen, wie die der übrigen drei Arten, nur eine Reihe Zellen, die, wie bei *Pleurobranchaea*, allein im Fundus liegen, also nicht bis an's Epithel reichen und, ebenfalls wie bei jener Art, keulenförmige, oft sehr lang ausgezogene Gestalt haben, weil der eigentliche Zellleib sich von dem Sekretinhalt des Säckchens nicht scharf absetzt, sondern mit ihm ein zusammenhängendes Ganzes zu bilden scheint. Aber gleich wie bei *Pl. test.* ist hier die Zusammensetzung des Organes eine sehr complicirte, in Folge der aufserordentlich zahlreichen Blindsäckchen, und weil aufserdem das Verständnifs noch durch die innerhalb des Organs sehr mächtig entwickelte Fufsmuskulatur bedeutend erschwert wird. Diese Muskulatur bildet nämlich im vorderen Theile ein Fächerwerk, dessen einzelne Scheidewände ungleich stark und dessen Maschen ungleich grofs sind. In diesen Maschen liegen die Drüsensäckchen, die, jedenfalls mit einander communicirend, wie anzunehmen ich guten Grund habe, in der verschiedensten Weise, bald über, bald unter den nicht die ganze Dicke des Organs gleichmäfsig durchsetzenden Muskelsträngen oder zwischen den einzelnen Muskelfasern sich hindurch winden müssen, um ihr Sekret an die freie, ventrale Fläche zu befördern. Der Durchtritt des letzteren findet offenbar nur in der medianen Furche resp. Einsenkung statt, da die zwischen den zurückgebogenen Seitenrändern der Drüse und dem correspondirenden Deckepithel sich findende, aus Bindegewebe und Muskeln bestehende und 92 μ mächtige subepitheliale Schicht niemals Drüsentheile enthält (Fig. 11[a]). An der medianen Einsenkung hat die subepitheliale Schicht nur 30 μ Dickendurchmesser, ist aber aufserordentlich dicht verfilzt. Die sie bildenden lateral ziehenden Muskeln kommen von den seitlich der Drüse sehr reichlich sich vorfindenden Ringmuskeln des Fufses her. Diese wiederum entspringen von den zu Seiten der dorsalen Partie stark angehäuften Längsmuskeln und communiciren in der manchfachsten Weise

mit den auch in der Mitte des Organs breite Stränge bildenden Ringmuskeln. Dadurch entsteht jenes Fächerwerk, dessen ich oben gedachte. Direct dorsoventrale Muskelzüge sind hier eigentlich selten und dann stets zart. Dorsalwärts, also gegen die Leibeshöhle zu, ruht die Drüse auf einer 60 μ starken, lateral ziehenden Muskellage, welcher, wiederum dorsalwärts, ein 60 μ hohes, eigenthümliches, blasses Epithel, das der Leibeshöhle, aufsitzt.

Die Spitze der Drüse zeigt auch in Betreff der Muskulatur ein abweichendes Verhalten. Das Fächerwerk nämlich fehlt hier vollständig, die Drüse bildet eine compacte Masse, in der nur sehr schmale und sehr wenige Muskelfasern vorhanden sind, die direct und gesondert dorsoventral ziehen (Fig. 11^b). Der Übergang nach dem oralen Theile zu ist ein ganz allmäliger (Fig. 12), indem zunächst die subepitheliale Schicht sich verbreitert, eine mehrblätterige Structur zeigt. Dann treten Längsmuskeln auf, die dicht unter jener Schicht liegen, und gleichzeitig werden die dorsoventralen breiter und laterale erscheinen. Letztere nehmen, je mehr man sich den oralen beiden Dritteln nähert, an Umfang zu, die dorsoventralen verschmälern sich wieder und dann zeigt sich das Verhältnifs, das vorhin beschrieben wurde.

Gemeinsam den Drüsen der untersuchten vier Species ist: die Lage am hinteren Ende der Fufssohle, die Prominenz über die Fläche derselben, die Zusammensetzung aus Blindsäckchen, welche mehr oder weniger deutlich dorsoventral gerichtet sind, direct münden und dadurch das Fehlen eines differenzirten gemeinsamen Ausführungsganges bedingen. Ferner: die Blindsäckchen haben nur eine Reihe randständiger Zellen, die membrana propria derselben (tunica sacculi) reicht stets bis in das subepitheliale Gewebe, das sie mit bilden hilft. Sie unterscheiden sich, abgesehen von der äufseren Form, durch folgende Merkmale: Bei *Pl. test.* und *Pleurophyll. lin.* findet eine Communication zwischen einzelnen Blind-

säckchen statt, während Derartiges in den Drüsen der anderen beiden Arten nicht vorkommt; bei *Pleurobranchaea* und *Pleurophyllidia* stehen die Drüsenzellen nur im Fundus des Säckchens, während bei den beiden *Pleurobranchus* die tunicae bis zum Epithel mit Zellen besetzt sind; bei *Pleurophyllidia* endlich bilden die Muskeln in der Drüse ein mächtig entwickeltes Fächerwerk, das in dieser Weise den anderen drei Arten fehlt.

Es differiren also die Fufsdrüsen der von mir untersuchten Opistobranchier in wesentlichen Punkten von den gleichnamigen Organen, die bei anderen Cephalophoren beobachtet und beschrieben wurden. In der einschlägigen Literatur sind hier nur von Bedeutung die Arbeiten von Semper (1), Carrière (2 und 3), Sochaczewer (4), P. B. Sarasin (5) und Brock (6). Von diesen Autoren hat allein Sarasin Opistobranchier, und zwar *Chromodoris Villafranca*, in den Kreis seiner Untersuchungen gezogen und hier, allerdings nicht sehr ausführlich (nur mit den Worten „auch diese Schnecke zeigt ein zwischen Mund und Fufsrand ausmündendes Drüsenpacket“ l. c. pg. 15) eines Organes gedacht, das denen der übrigen Cephalophoren, wenigstens in Bezug auf seine Lage, völlig gleichzustellen ist.

In dieser Lage beruht aber die wesentliche Differenz. Bei Pulmonaten, Prosobranchiern und *Chromodoris* liegt die Fufsdrüse vorn, in der Nähe des Mundes — hier am hinteren, stetz spitzen Ende des dreieckigen Fufses. Dort ist die Drüse in die Substanz der Fussohle eingebettet, ragt nie über die Oberfläche hervor, ja ist zuweilen gegen die Leibeshöhle prominent, ein Verhältnifs, das Semper (1. pg. 351) mit folgenden Worten klar ausspricht: „in der Regel liegt die Drüse ganz in der Muskelmasse des Fufses eingeschlossen, bei *Limax marginatus* Drap. dagegen liegt sie zur Hälfte frei in der Leibeshöhle“ — hier dagegen liegt die Drüse nur zu einem Theile in der Fufssohle, zum anderen überragt sie die freie Oberfläche derselben. In Folge dessen ist bei jenen Schnecken eine makroskopisch sichtbare Mündung, der Porus aquaticus der älteren Autoren, vorhanden, aus welcher das von den Drüsenzellen bereitete Secret in's Freie tritt — hier, bei den von mir untersuchten Thieren, fehlt eine solche gemeinsame Öffnung, das Secret ergiefst sich vielmehr durch unendlich viele, äufserst feine Poren in die Zwischenräume des Deckepithels. Die Drüsen jener Schnecken und auch die Drüsen im Fufse der

Acephalen (Carrière 2) gleichen daher vielmehr demjenigen Schema, das wir bei den Wirbelthieren als allgemein giltig kennen, während die der hier besprochenen sehr bedeutend davon abweichen.

Aber nicht blos die Lagerung des Organes bildet das unterscheidende Merkmal, auch in der inneren Struktur herrschen wichtige Differenzen. Wenn man sich die Figuren der citirten Autoren betrachtet, so sind bei Pulmonaten und Prosobranchiern die Drüsenzellen nicht blos membranlos — das ist auch hier der Fall —, sondern sie sind auch nicht durch eine tunica zu besonderen Gruppen (Schläuchen, Blindsäckchen) zusammengefafst. Sochaczewer, der die Semper'sche Angabe, dafs jede Drüsenzelle von einer bindegewebigen Membran eingeschlossen sei, welch' letztere am Ende der Zelle zu einer verhältnifsmäfsig schmalen Röhre, dem Ausführungsgange, wird, als irrig zurückweist, schildert, dafs die Drüsenzellen, zu gröfseren Gruppen vereinigt, in ein „Netz oder Körbchen von Bindegewebsfasern“ eingelagert sind (4. pg. 39). Er bildet dies Verhältnifs auf Taf. III in Fig. 4 ab. Doch dürfte das wohl kaum eine thatsächliche Differenz von Semper darstellen, vielmehr nur auf abweichender Auffassung des mikroskopischen Bildes beruhen, insofern hier jede einzelne Zelle (und darauf lege ich Gewicht) in einer besonderen Kapsel liegen würde. Nach Sarasins (5) Figuren 18 und 21 von *Helix* und nach Carrières (3) Fig. 19—26 Taf. XXIII (die Bilder in Fig. 16—18 entstammen den Lippendrüsen) von Prosobranchiern fehlt hier auch das Sochaczewer'sche Bindewebsgerüst, die Zellcomplexe sind vielmehr, wie namentlich Carrières Fig. 20 und 23 mit Evidenz zeigen, vollständig hüllenlos. Auch im Texte der Abhandlung vermisse ich eine hierauf bezügliche Angabe, die bei der bekannten Genauigkeit Carrières gewifs nicht fehlen würde, wenn etwas Derartiges vorhanden wäre. Ebenso ist die Situation, wie ich mich erinnere, von Brock (6) für die stylommatophoren Pulmonaten dargestellt, dessen Abhandlung mir augenblicklich leider nur im Excerpt vorliegt.

Bei den von mir untersuchten Opistobranchiern aber haben mehrere Drüsenzellen, die eng aneinander liegen, eine besondere, bei den einen kernführende, bei den andern kernlose tunica, wodurch ein scharf umgrenztes Gebilde entsteht, das Drüsensäckchen, das somit als bestimmt charakterisirte Componente des Organes erscheint. Darum kann ich mich

der von Carrière (3) ausgegangenen und von Brock (6) acceptirten Auffassung, dafs die Fufsdrüsen „Anhäufungen gleichartiger einzelliger Drüsen zu einer gröfseren Drüsenmasse“ seien, für Opistobranchier nicht anschliefsen. Ob das von Carrière (3. p. 397) besonders urgirte Moment, dafs „eine jede Drüsenzelle ihr Secret direct und ohne sich mit Nachbarzellen zu vereinigen, in den Secretbehälter oder den Ausführungsgang“ ergiefse, als ausschlaggebendes zu betrachten sei, möchte ich bezweifeln. Zwar findet man, wie ich dies von *Pleurobranchaea* und *Pleurophyllidia* bereits erwähnt habe, dafs die einzelnen Zellen eines Säckchens und ihr Secret anscheinend ein Ganzes bilden, d. h. dafs die Drüsenzelle die ganze Länge des Blindsäckchens einnimmt. Indessen die Zusammenfassung mehrerer solcher Zellen zu einer morphologischen Einheit läfst eine solche Auffassung, wenigstens für die hier behandelten Gebilde, nicht als völlig berechtigt erscheinen.

Doch das sei, wie es wolle. Die Fufsdrüse der Opistobranchier ist ein wohlcharakterisirtes, selbständiges Organ, welches aus einem Multiplum von einander unabhängiger Blindsäckchen besteht, in denen die Drüsenzellen wandständig und einreihig angeordnet sind.

Aus der Lagerung dieses Organs bei den Hinterkiemern kann man, glaube ich, wenigstens einen negativen Schlufs auf die Function ziehen. Es scheint nicht unwahrscheinlich, dafs die Fufsdrüse der Pulmonaten und Prosobranchier dazu dient, den Weg des Thieres durch Schleim schlüpfrig zu erhalten; dazu ist die Lage dicht hinter dem Munde sehr geeignet. Eine solche Function ist dagegen bei den hier beschriebenen Drüsen sicher nicht vorhanden, da sie am hinteren Ende des Körpers sich finden. Welche Stellung das Organ aber im Haushalte dieser Thiere einnimmt und welche Bedeutung dem zähflüssigen, schleimigen Secret zukommt, darüber kann ich nicht einmal eine Vermuthung aussprechen.

II. Die feinere Structur der Drüsenzellen.

Die Resultate, welche eine Untersuchung der frischen oder in verschiedentlicher Weise mazerirten Gebilde ergiebt, sind dürftig. Man kann im Allgemeinen sagen, dafs die Zellen keine Membran haben, in keiner Kapsel und keinem „Bindesubstanzkörbchen“ liegen, „dunkelgranulirt“ erscheinen, einen grofsen, bläschenförmigen Kern besitzen, welcher 1—2 und hier und da auch mehr Kernkörperchen enthält (Fig. 13). Die Form der Zellen ist variabel: oval, kubisch, keulenförmig, rund, konisch abgestutzt, etc. Zuweilen trifft man freie, dann stets sehr dunkel aussehende Kerne (Fig. 13 *k*). Über die feineren Verhältnisse im Bau des Zellplasma und des Kernes kommt man nur an conservirtem Material in's Reine, und zwar wirken Sublimat und concentrirte Pikrinlösung in gleicher Weise auf beide Zellbestandtheile ein, während die Flemming'sche Lösung davon ganz abweichende Bilder liefert. Dieser soll zunächst gedacht werden.

Die Zellen, deren Grenzen in den meisten Fällen gar nicht erkennbar oder nur schwach angedeutet sind, selten so deutlich und scharf hervortreten, wie in Fig. 14, sind von verschiedener Gröfse und zeigen ein in Wahrheit grob granulirtes Plasma (cfr. Fig. 14 und 15). In homogener Grundsubstanz finden sich tiefschwarze, relativ grofse und von einander weit abstehende Granula, die eine bestimmte und charakteristische Anordnung in keiner Weise erkennen lassen. Der Kern, der meist in der Mitte der Zelle gelegen ist, ist kreisrund, enthält ein oder zwei Kernkörperchen und eine wechselnde Zahl von dunklen Körnungen, welche in heller Grundsubstanz liegen; sein Contur ist scharf und dunkel. Dabei ist als merkwürdig bei dieser Behandlungsweise hervorzuheben, dafs das Zellplasma, wie der Kern ihre Fähigkeit, Farbstoffe aufzunehmen, völlig oder fast völlig verloren haben. Insbesondere ist dies auffällig für Saffranin. Sonst giebt dieser Farbstoff grade bei Fixirung in Flemming'scher Lösung die schönsten Kernbilder, hier läfst er fast total im Stich; dasselbe gilt vom Haematoxylin. Das Zellplasma setzt sich nicht scharf abgeschnitten ab vom Secretinhalte des Drüsensackes, und doch ist es gar nicht schwer, wie aus Fig. 15 erhellt, die Grenze zwischen beiden zu er-

kennen. Das Secret, das hier in den meisten Fällen einen perlgrauen Ton annimmt, nach Saffranin angehaucht röthlich ist, ist stets blasser als das Zellplasma. Es bildet in dem von den Zellen begrenzten Hohlraume des Säckchens Stränge, deren mehrere zu einer Zelle gehören und etwa 3,6 — 5,4 μ breit sind. Diese bestehen aus einer Unzahl kleinster, eng aneinander gedrängter Tröpfchen, welche in dichten Reihen angeordnet sind. Die Secretstränge verlaufen meistens parallel (Fig. 15) und erscheinen dann als platte Bänder, deren Querschnittsbild unregelmäfsige Begrenzungen hat (Fig. 14), oder aber sie sind in verwirrendster Art um- und durcheinander geflochten. An einigen sehr wenigen Präparaten von *Pleurobranchus Meckelii* konnte ich eine Differenz im Aussehen der Zellen eines und desselben Blindsäckchens constatiren, die darin bestand, dafs eine Zelle, selten mehrere, dunkler durch die fixirende Flemming'sche Lösung geworden war, als die übrigen. Sie erschien ganz homogen, eine Differenzirung in Grundsubstanz und Granula war nicht vorhanden, das Färbungsvermögen war völlig geschwunden. Es deutet dies jenen Structurunterschied an, der klar bei allen Arten nach Behandlung des Organs mit Sublimat oder concentrirter Pikrinlösung in den Drüsenzellen zu finden war und den ich jetzt beschreiben will.

Man kann im Allgemeinen drei verschiedene Hauptformen in der Structur des Zellplasma unterscheiden, die, wie ich meine, als differente Stadien der Thätigkeit resp. Ruhe zu betrachten sind und die durch zahlreiche Übergangsstufen, bei denen bald das eine bald das andere charakteristische Moment mehr in den Vordergrund tritt, continuirlich verbunden werden.

Das erste Hauptstadium bietet den Zustand der Ruhe dar. Die Zellen sind dadurch kenntlich, dafs sie die Farbstoffe nur wenig aufnehmen, im Allgemeinen daher bläfslich erscheinen und bei Anwendung einer guten homogenen Immersion eine Zusammensetzung aus zwei Substanzen zeigen. Die eine, die Filarsubstanz (Flemming) besteht aus zarten Fäden, welche allein gefärbt sind, ein überaus feines und engmaschiges Netz bilden, in dessen Knotenpunkten keinerlei Verdickungen wahrgenommen werden können. So vor Allem bei *Pleurobranchus* (Fig. 16[a] bei *n*). Bei *Pleurobranchaea* (Fig. 18 *n* und 19 *n*) und bei *Pleurophyllidia* (Fig. 21 *n*) ist dieses Netz nicht zu erkennen. Hier erscheinen die

Zellen granulirt; die einzelnen Granula, welche bei der letztgenannten Species intensiv gefärbt sind, bei der ersteren nur schwach, sind sehr fein, stehen dicht aneinander und liegen in einer hellen Grundsubstanz, der Interfilarsubstanz (Flemming). Diese ist stets homogen, stets im ersten Stadium nur schwach entwickelt und bleibt in allen Farbstoffen ungefärbt. Die Kerne sind bei solchen Zellen kreisrund und enthalten ein in den meisten Fällen central liegendes, intensiv gefärbtes, kreisrundes Kernkörperchen. Ihr Contur ist scharf und dunkel, ihre Färbung stets intensiver, als die des Zellplasma. Es rührt dies daher, dafs das Kerngerüst, also die chromatische Substanz, sehr dicht gefügt ist. Dasselbe erscheint überall als eine durchaus gleichmäfsige Granulirung des Kernes. Fäden, die etwa ein Netz bilden, sind in diesem Stadium im Kerne nicht wahrzunehmen (cfr. Fig. 16, 18, 19, 21 *n*). Eine Differenz bei den vier untersuchten Arten findet nur insofern sich vor, als das Kerngerüst bei *Pleurobranchus* etwas lockerer ist, als bei *Pleurobranchaea* und *Pleurophyllidia*.

Zellen, die solches Aussehen haben, sind bei allen vier Arten am zahlreichsten zu treffen.

Das zweite Hauptstadium ist das der Secretion oder vielmehr das der Ausstofsung des Secretes.

Als Übergänge dazu, also als thätig, fasse ich diejenigen Zellen auf, die intensiver gefärbt sind, als die vorigen und einen um 1—2 μ kleineren, ebenfalls intensiver gefärbten Kern besitzen. Im Plasma der Zelle ist das Netz der Filarsubstanz weiter geworden (Fig. 17 n_1, cfr. 16, 18 und 19 n_1), die einzelnen Stränge sind dicker und die in den von denselben gebildeten Maschen liegende Interfilarsubstanz ist ebenfalls gefärbt. Gleichzeitig zeigt das Plasma der Zelle eine eigenthümliche Veränderung, insofern dasselbe, das bisher ein ununterbrochenes Ganzes darstellte, jetzt Stränge erkennen läfst, in die es zerfällt (Fig. 19 n_1), die mit einander hier und da noch zusammenhängen und so ein Maschenwerk bilden, welches Hohlräume umschliefst (Vacuolen?). Der solchen Zellen zugehörende Kern ist, wie schon bemerkt, ebenfalls intensiv gefärbt (Fig. 16, 17, 18 n_1), aber man kann in ihm gar keine oder höchstens nur noch eine angedeutete innere Structur erkennen; Granulirung, Gerüst ist nicht mehr zu sehen. Manchmal (Fig. 17) hat er unregelmäfsige Formen erhalten und

entbehrt des Kernkörperchens. Im eigentlichen zweiten Stadium ist das Zellplasma ganz schwach gefärbt, zeigt nur noch vereinzelt Andeutungen von Filarsubstanz und Interfilarsubstanz und ist an Masse bedeutend geringer. Dabei ist bei der Membranlosigkeit der Zellen auffallend, besonders bei *Pleurobranchus Meckelii* (cfr. Fig. 16$^{a\ u.\ b}$), dafs der äufsere Contur der Zelle, der nach Fixirung in Sublimat oder Pikrin stets scharf ist, auch jetzt noch scharf ausgeprägt zu sehen ist. Der Kern ist dunkel, länglich oder zackig, enthält kein Kernkörperchen und zeigt keine Structur; manchmal findet sich (Fig. 20 *s*) neben ihm ein dunkles, kreisrundes Korn.

Das dritte Hauptstadium ist das der Regeneration. Das Zellplasma zeigt jetzt wieder eine allmälige Zunahme an Masse und damit ein Wiederauftreten der inneren Structur (Fig. 16 — 21 *r*). Man sieht also in Zellen, deren Plasma sich wieder ersetzt, Filarsubstanz und Interfilarsubstanz zunächst nur angedeutet geschieden. Dann wird diese Andeutung klarer sichtbar, das Netzwerk der Filarsubstanz verdichtet sich und erreicht nach und nach das Aussehen, welches die Bezeichnung „zartgranulirt“ gerechtfertigt erscheinen läfst (Fig. 16^b *r* und Fig. 17 *r*). Der Kern wird ebenfalls an Masse bedeutender und nimmt wieder kreisrunden Contur an. Er erreicht allmälig eine Gröfse, welche die des Kernes in der ruhenden Zelle, der durchschnittlich 8 μ mifst, um 1 bis $1\frac{1}{2}$ μ Durchmesser übersteigt. Nur bei *Pleurophyllidia* (Fig. 21 *r*) sieht er stets granulirt aus, bei den übrigen untersuchten Species erkennt man ein deutliches Kerngerüst und zwar documentirt sich das in verschiedener Weise. Bei *Pleurobranchus Meckelii* (Fig. 16^b *r*) zeigen sich in dem scharf conturirten Kerne sehr zahlreiche Fäden, die von verschiedener Dicke sind und daher verschieden intensiv den Farbstoff angenommen haben. Sie liegen ganz unregelmäfsig in der achromatischen Substanz, sind gewunden, geschlängelt, gestreckt, aber stets bleibt jeder für sich allein, eine Verbindung von zweien oder mehreren habe ich nicht finden können. Anders bei *Pleurobranchus testudinarius* (Fig. 17 *r*). In der abgebildeten Zelle, deren Plasma fast vollständig zur Norm zurückgekehrt war und granulirt erschien, lag ein grofser, kreisrunder, scharf begrenzter Kern von sehr blasser Färbung. In seinem Innern war ein überaus zierliches Gerüst zu sehen, das aus sehr feinen und zarten Fäden bestand.

Diese Fäden kreuzten sich in manchfachster Art und bildeten so ein Netzwerk. An den Kreuzungs- resp. Verknüpfungspunkten waren in den Kernfäden kleine dunkle Punkte zu sehen, die nicht auf Verdickungen zurückzuführen, sondern wohl nur als der optische Ausdruck eben jener Verflechtung anzusehen sind. Bei *Pleurobranchaea Meckelii* konnte ich drei verschiedene Formen des Kernes in diesem Stadium beobachten. In Fig. 20 r ist ein Kern gezeichnet, der den von beiden *Pleurobranchus* beschriebenen insofern ähnelt, als er die dort getrennt sich findenden Eigenthümlichkeiten vereinigt zeigt. Er hat ein Gerüst von zarten Strängen, wie *Pl. test.*, und aufserdem sieht man darin dickere, massigere Fäden, wie bei *Pleurobranchus Meck.*, die isolirt erscheinen und V-förmig oder schleifenförmig gewunden sind. In r_1 derselben Figur sind Kerne abgebildet, die ebenso wie die Kerne der Zellen r_3 in Fig. 19 vielleicht als abortive Formen der Regeneration zu betrachten sind. Die Zelle r_2 in Fig. 19 enthält einen Kern, der ein eigentliches Gerüst nicht mehr besitzt, dafür zart granulirt erscheint und ein excentrisch gelegenes Kernkörperchen enthält. Es ist dies als ein Übergangsstadium zu betrachten zum Kern der normalen, ruhenden Zelle. Denn, das ist bei allen vier Arten der Fall: je mehr sich das Plasma dem Zustand der Norm nähert, je mehr die Zelle zur Ruhe zurückkehrt, desto dichter, straffer zusammengefafst wird der chromatische Inhalt des Kernes; gleichzeitig tritt dann der Nucleolus auf.

Eines eigenthümlichen Gebildes will ich noch Erwähnung thun, das ich nur bei *Pleurophyllidia* getroffen habe (Fig. 21 x), hier aber sehr zahlreich, bald in den Zellen, bald neben denselben, zwischen ihnen und der theca sacculi. Es sind das kreisrunde Gebilde von aufserordentlich variabler Gröfse. Die einen haben nur den Umfang der kleinen Kerne des Bindegewebes, andere erreichen das Mafs der gröfsten Zellkerne, noch andere übertreffen diese sogar hierin. Sie haben einen äufseren, zarten Contur, als Inhalt einen scharf begrenzten, gleichfalls kreisrunden Körper, welcher von einem Ring blasser Substanz umgeben ist. Dieser kreisrunde Körper enthält einzelne Granula. Das Merkwürdigste an diesen Gebilden ist, dafs sie niemals sich färbten, welchen Farbstoff ich auch anwandte, sondern stets ihren eigenthümlichen, blafsgelben, fast fetten Glanz beibehielten. Ich will hier nochmals hervorheben, dafs ich nur ein bereits

conservirtes Exemplar von *Pleurophyllidia* untersuchen konnte, mikrochemische Reactionen zur Aufklärung über das Wesen dieser Gebilde daher nicht angängig waren.

Aus diesen Beobachtungen ergiebt sich das, wie ich glaube, wichtige Resultat, dafs pari passu mit den während der Drüsenthätigkeit stattfindenden Veränderungen des Zellplasma einhergeht eine Veränderung des Zellkernes. Der normal relativ grofse, kreisrunde Kern, welcher zart granulirt ist, sich stark färbt, wird in der Thätigkeit kleiner, zeigt keine Structur, wird unregelmäfsig conturirt, stärker gefärbt und quillt nach Ausstofsung des Secretes und während des Ersatzes des Plasma allmälig auf, indem er jetzt ein deutliches, fädiges Gerüst zeigt und eine übernormale Gröfse erlangt. Er kehrt durch strafferes Zusammenfassen seines Inhaltes allmälig zur Norm zurück. Es ist ein ähnliches Verhalten schon von den Drüsen der Wirbelthiere her bekannt, wie dies namentlich die Untersuchungen von Heidenhain und Moritz Nufsbaum lehren. Der erstere dieser Autoren, auf dessen Abhandlung im Hermann'schen Handbuche allein ich eingehe, da eine Berücksichtigung der gesammten Literatur der Wirbelthierdrüsen zu weit führen würde, schildert indessen die Vorgänge wesentlich anders. Nach ihm ist (cfr. seine Figuren 18 und 19 l. c.) der Kern der ruhenden Eiweifsdrüsenzelle dunkler, unregelmäfsiger conturirt, als der der thätigen, welcher ein gequollenes Aussehen darbietet. Hier ist es gerade umgekehrt. Der Kern der ruhenden Zelle hat runde, gleichmäfsige Formen, der der thätigen wird kleiner und unmittelbar nach Ausstofsung des Secrets ist derselbe zackig geworden. Brock (6) zeichnet für die stylommatophoren Pulmonaten in Fig. 39 l. c. den Kern der Drüsenzelle nach Ausstofsung des Secretes ebenfalls geschrumpft, unregelmäfsig conturirt; auf seine abweichende Auffassung werde ich gleich näher eingehen.

Fraglich bei den geschilderten Vorgängen ist es, welche Rolle dem Kern bei Erneuerung des Drüsenplasma zufällt, ob die Veränderungen, die er durchzumachen hat, ausschliefslich passiver Natur sind, oder ob er sich

activ an der Regeneration betheiligt. Ich bekenne, eine definitive Stellungnahme zu dieser Frage noch nicht zu haben, dazu reichen diese Beobachtungen nicht aus; will aber auch nicht verhehlen, dafs mir die active Rolle des Kernes im dritten Stadium, dem der Regeneration, die wahrscheinlichere zu sein scheint. Activ insofern, als er sein früheres, normales Aussehen zunächst wiedergewinnt durch selbständigen Ersatz eines Theiles seines Inhalts und dadurch, durch diese Thätigkeit, belebend auf den zurückgebliebenen Protoplasmarest einwirkt, so dafs dieser sich zu einer neuen Zelle gestalten und nun seinerseits wiederum eine Wechselwirkung auf den Kern ausüben kann. Ich vermuthe eine in diesem Sinne active Regenerationsthätigkeit des Kernes deshalb, weil in Zellen, deren Secret ausgestofsen ist, der Kern an Masse überwiegt und das Plasma so gering und so verändert ist, dafs ich nicht einzusehen vermag, wie dieses gewissermafsen degenerirte Plasma die Neubelebung, ohne Intercurrenz einer besondern Kernthätigkeit, anregen sollte. Indessen das ist alles blofse Vermuthung; zur Beweisführung ist das Object nicht geeignet wegen der Kleinheit der Zellen und wegen der grofsen Schwierigkeit, experimentell vorzugehen. Immerhin aber dürften die vorstehend ausführlich geschilderten Thatsachen der Kernveränderung bei der Drüsenzellthätigkeit geeignet sein, zum Ausgangspunkte weiterer Forschungen über diese für die Biologie der Zelle wichtige Frage zu dienen.

Was die Structur des Zellplasma anlangt, so ist für den Ruhezustand die Zusammensetzung aus netzförmig angeordneter Filarsubstanz und dazwischen liegender Interfilarsubstanz schon von Sochaczewer (4) und von Brock (6) beschrieben worden. Letzterer Autor hat auch die Veränderung der Zelle nach Ausstofsung des Secretes gesehen und beschrieben, hat aber eine Auffassung davon, die mit der meinigen in directem Gegensatze steht. Er meint nämlich (so wenigstens habe ich excerpirt), dafs, da der Inhalt der Zelle: Gerüst, Körner und Protoplasma exclusive Kern, in toto ausgestofsen wird, der Zellrest mit Kern als in der Rückbildung begriffen angesehen werden müsse. Und da für die so vollständig mit allen ihren histologischen Bestandtheilen verschwindende Drüsenzelle ein Ersatz vorhanden sein mufs, der sich in der Drüse selber nicht findet, so nimmt Brock dafür in Anspruch die in der Umgebung der Fufsdrüse (der Pulmonaten) sich findenden Plasmazellen des

Bindegewebes. Fixe Zellen eines morphologisch und physiologisch bestimmt charakterisirten Gewebes sollen also die Eigenschaft haben, sich zu Zellen eines anderen, nicht minder scharf gekennzeichneten Gewebes umwandeln zu können. Dieselbe Anschauung hat kurz nachher List (7) für die einzelligen Drüsen im Fufse von *Tethys fimbriata* ausgesprochen, wo die vollständig ausgestofsenen Drüsen durch Bindesubstanzzellen ersetzt werden sollen, die an die Oberfläche rücken und hier ihre Umwandlung erleiden. Aber während Brock seine Hypothese durch einige, wie ich allerdings glaube nicht stichhaltige Gründe zu beweisen suchte, ist List einen solchen versuchten Beweis völlig schuldig geblieben. In Brocks Ausführungen vermisse ich den stringenten Beweis. Er hätte zeigen müssen, zunächst aus welcher Ursache die Plasmazellen aus ihrer Ruhe aufgestört werden, dann wie die Einwanderung in die Drüse geschieht und drittens wie und auf welche Weise das bisher gewissermafsen indifferente Plasma dieser Gebilde zu einer so specifischen Thätigkeit gelangt. So lange ein solcher Beweis nicht vorliegt, wird die Brock'sche Hypothese als in der Luft stehend betrachtet werden müssen, und ich glaube, den Beweis beizubringen, dürfte keine geringen Schwierigkeiten verursachen. Aber wie meine oben mitgetheilten Beobachtungen darthun, ist eine solche Hypothese gar nicht einmal nothwendig und hätte Brock nicht den Irrthum begangen, Drüsenzellen, die sich zur Regeneration anschicken, als sich rückbildende zu betrachten, er wäre zu jener Hypothese gar nicht gelangt.

In Wahrheit, wenn ich die Erscheinungen bei Opistobranchiern verallgemeinern darf, wird auch gar nicht das ganze Drüsenplasma ausgestofsen, sondern nur der allerdings bei weitem gröfsere Theil desselben. Die Drüsenzellen besitzen in der Ruhe, wie dies Carrière (3) bei Prosobranchiern bewiesen und ich für die Hinterkiemer gezeigt, eine Ausdehnung, die der des ganzen Drüsensäckchens entspricht. Bei Beginn der Thätigkeit nun verwandelt sich der periphere, d. h. im halsartigen, ausführenden Abschnitt liegende Theil dieser Zellen dergestalt um, dafs die Structur schwindet, er dafür eine mehr blättrig aussehende Form erhält. Der um den Kern befindliche Theil, die eigentliche Zelle, erleidet die oben geschilderten Abänderungen, indem gleichzeitig die zu Secret verwandelte Filar- und Interfilarsubstanz peripherisch sich vorschiebt und nun

ebenfalls blättrige Beschaffenheit annimmt. Der zurückbleibende Rest ersetzt sich, regenerirt sich wahrscheinlich durch vermehrte Aufnahme hämolymphatischer Flüssigkeit und dehnt sich allmälig wieder zu der Länge aus, welche die Zelle vor der Thätigkeit besessen. So erklären sich diese Thatsachen auf das ungezwungenste, ohne dafs es nöthig wäre, die fixen Elemente der benachbarten Gewebe in Contribution zu setzen.

III. Die Deckepithelien und die solitären Drüsen.

Schon mehrfach ist erwähnt worden, dafs auf der Drüse das Sohlenepithel, das Organ bedeckend, aufsitzt und von ihm durch die subepitheliale Schicht getrennt ist. Dieses Epithel ist Flimmerepithel, das sich nur in Wenigem dem gewöhnlichen indifferenten Epithel der Mollusken an die Seite stellt. Es ist am niedrigsten bei *Pleurophyllidia lineata* (Fig. 12 *epi.*) und besteht hier aus dicht nebeneinander liegenden cylindrischen Zellen, die einen kleinen ovalen Kern besitzen. Derselbe liegt meistens basal. Der doppelt conturirte Saum, an dem eine feinere Differenzirung nicht wahrnehmbar ist, trägt kurze, etwas starr aussehende Cilien. Pigment hatten die Epithelien in dem mir zur Verfügung stehenden Exemplare nicht.

Die Epithelzellen von *Pleurobranchus Meckelii* sind bedeutend höher, sie haben im conservirten Object eine Höhe von 45 μ. Man kann an ihnen das Köpfchen, den Hals, die Kernanschwellung und das fadenförmige Ende unterscheiden. Das Köpfchen hat dreieckige Gestalt, die Basis ist distalwärts gerichtet, von 3,6 — 5,4 μ Breite und trägt 14,4 μ lange Cilien. Die letzteren, welche besonders gut in der Flemming'schen Lösung erhalten sind (Fig. 22^b), sind sehr weich von Aussehen und leicht durcheinander geworfen, lassen aber die von Brock (6) für die gleichen Gebilde der stylommatophoren Pulmonaten beschriebene flammenartige Gruppirung niemals erkennen. Sie sitzen auf einem doppelten Saume auf, der sich bei Anwendung einer guten homogenen Immersion in zwei von einander abstehende Reihen sehr feiner und dichtgedrängter Knöpfchen auflöst, die durch zarte parallele Striche mit einander verbunden sind. Die Cilien erscheinen als die Fortsetzungen dieser Striche und wurzeln in der äufseren Knöpfchenreihe. Es liegen also dieselben Verhältnisse vor, die Frenzel in seiner Arbeit „zum feineren Bau des Winperapparates“ (Arch. f. mikr. Anat. Bd. XXVIII) genauer beschrieben hat. Das Köpfchen selber hat eine Länge von 5,4 μ und setzt sich ohne markirte Grenze in den 14,4 μ langen Hals fort. Beide Theile der Epithelzelle sind durch zarte Granulirung ausgezeichnet. Auf den Hals folgt die ovale

Kernanschwellung von 5,4 μ l. und 3,6 μ br. Sie enthält den ovalen Kern, der, von einem ganz schmalen Saume von Zellplasma umgeben, hell ist mit wenigen dunklen Körnungen im Innern. Das proximale Ende läfst sich in seiner Länge nicht bestimmen, weil seine definitive Endigung nicht zu sehen ist. Von fadenförmiger Beschaffenheit spaltet es sich in zwei und mehr Theile, die mit den Fibrillen des Bindegewebes und den Fibrillen der Muskeln sich ununterscheidbar zur subepithelialen Schicht verfilzen: ein Modus der Endigung also, der von dem herkömmlichen der indifferenten Epithelien der Molluskenoberhaut sich nicht unbedeutend unterscheidet. Es sei noch bemerkt, dafs in einzelnen Epithelzellen ein aus Körnern oder Stäbchen bestehendes und meist zu gröfseren Ballen gruppirtes Pigment von rostbrauner Farbe vorkommt, welches der Drüse im lebenden Zustande ihr farbiges Aussehen verleiht.

Zwischen diesen so gearteten Epithelzellen nun, und zwar meistens zwischen je zweien derselben, liegen einzellige Drüsen — Becherzellen (Fig. 22[a]). Sie finden sich überall, sowohl im Epithelbelag der Drüse, wie auch seitlich derselben in der ganzen Fufssohle, scheinen aber auf der Rückenhaut des Thieres zu fehlen. Anfänglich glaubte ich, dafs diese Becherzellen auf den Mündungen der einzelnen Drüsensäckchen aufsäfsen, somit der letzteren Secret erst durch jener Dazwischenkunft nach aufsen gelangt. Ich habe mich aber überzeugt, dafs das nicht so ist, dafs vielmehr das Drüsensecret zwischen den Epithelzellen in Intercellularlücken mündet, die hier ebenfalls vorkommen, wie an den Objecten, wo sie Nalepa (8) zuerst kennen lehrte und wo sie auch Brock (l. c.) beschrieben hat. Die Becherzellen sind durchaus selbständige Gebilde. Sie haben einen kurzen, in der subepithelialen Schicht wurzelnden Stiel, welcher einen kleinen Kern enthält, der selten basal, meistens an der proximalen Wölbung des Bechers gelegen ist. Diese Becher haben verschiedentliche Formen; gewöhnlich sind sie ein Ovoïd, welches das eine Mal seinen breiten Pol proximalwärts, das andere Mal distalwärts kehrt. Zuweilen sind sie in die Länge gezogen, wurstförmig, oder endlich haben Sanduhrgestalt angenommen. In Flemming'scher Lösung fixirt erscheinen sie nach Tinction, sei es in Haematoxylin sei es in Saffranin, stets homogen; niemals ist eine Differenzirung des Inhaltes wahrzunehmen, sodafs die Schilderungen, die List in seinen zahlreichen Arbeiten über Becherzellen,

auch in der schon einmal citirten (cfr. oben), von diesen Gebilden entwirft, hier nicht zutreffen. Zuweilen erscheint ihr Inhalt in Schollen zerfallen; die Längsrichtung der letzteren ist dann schräg zur Längsaxe der Becherzelle. Hin und wieder habe ich in einigen Pigment gesehen (Fig. 22[a] bei *pi*), das sowohl im kernführenden Stiel, als auch im eigentlichen Becher liegen kann und von dunkler Farbe ist.

Die indifferenten Epithelzellen von *Pleurobranchaea Meckelii* sind die höchsten, sie messen 89 μ und zeigen in allen Einzelheiten denselben Bau, wie die gleichen Gebilde von *Pleurobranchus* (Fig. 23 und 24): also dreieckiges Köpfchen mit Cilien, schmaler Hals, ovale Kernanschwellung und langes, distales Ende. Dasselbe theilt sich hier ebenso, wie dies schon vorhin geschildert wurde, und geht in den Filz des subepithelialen Gewebes über (Fig. 23 sub), in welch letzterem verstreute kleine, kreisrunde Kerne vorkommen. Ein Theil der Epithelzellen enthält Pigment (Fig. 24 *pi*), das zu Klumpen geballt oder aus kreisrunden Körnern bestehend in einer spindelförmigen Erweiterung liegt, die sich bald oberhalb, bald unterhalb der ovalen Kernanschwellung findet (Fig. 23 *ep.*). Es ist von schwarzer Farbe und giebt der Drüse des lebenden Thieres ihr dunkles Aussehen. Die Lücken zwischen diesen Epithelzellen, in welchen das Secret der Drüsensäckchen der Fufsdrüse und das der gleich näher zu beschreibenden solitären Drüsen mündet, sind sehr bedeutend, die Epithelzellen stehen weit auseinander und berühren sich nur mit den Seiten der Basis ihrer Köpfchen.

Becherzellen fehlen hier vollständig. Dafür finden sich, aber nur seitlich der eigentlichen Fufsdrüse, niemals über derselben, in der subepithelialen Schicht mehrzellige Drüsen vor, die ziemlich weit von einander abstehen, niemals mit einander communiciren, sondern stets für sich besonders zwischen dem Epithel münden (Fig. 23 *d*). Jede Drüse liegt also isolirt und deswegen nenne ich sie „solitäre Drüsen". Sie haben alle Flaschen- oder Retortenform; der bauchige Theil liegt in der Substanz der Fufssohle, der Hals, von verschiedener Länge je nach der verschieden tiefen Einbettung der Drüsen, ist schmal und windet sich in oft sonderbaren Figuren, um zum Durchtritt durch die subepitheliale Schicht zwischen das Epithel zu gelangen. Sie haben eine structurlose, aber kernführende tunica (Fig. 25 *thk*), die sich auf den Ausführungsgang fort-

setzt. Sie sind stets mehrzellig, enthalten mindestens 4, meistens 12 und mehr Zellen. Diese sind unregelmäfsige Vierecke, scharf gegen einander abgegrenzt und enthalten einen kreisrunden, centralen Kern, in welchen man kein Kernkörperchen, wohl aber mehrere dunkle Körnungen wahrnehmen kann. Diese Drüsen unterscheiden sich von den Drüsensäckchen des eigentlichen Organs dadurch, dafs sie nach Flemming'scher Lösung, wo letztere ihre Färbbarkeit eingebüfst haben, den Farbstoff, namentlich Haematoxylin, intensiv aufnehmen. Dabei zeigt sich eine Differenz innerhalb der Drüse zwischen den einzelnen Zellen. Die einen färben sich sehr stark, eine zweite Art zeigt schwächere Färbung und eine dritte endlich ist blafs, immer aber noch intensiver, als die Zellen der Fufsdrüse. Die Kerne sind in allen drei Formen gleich. Die blassen Zellen zeigen ein weitmaschiges Netz der Filarsubstanz, die intensiv gefärbten lassen ein solches gar nicht erkennen, während die zweite Form ein enges Netz feiner Fäden besitzt. Bemerkenswerth ist, dafs dieses Netz mit relativ starken Fäden zusammenhängt, die vom Kern ausgehen und in allen drei Formen sich finden. Ich halte die erste Zellform, die intensiv gefärbte, für secretorisch thätig, denn man findet das durch den Hals der Drüsenflasche ausgestofsene Secret intensiv gefärbt in den Intercellularlücken des Epithels. Die blassen Zellen wären dann sich regenerirende, die mittelstark gefärbten ruhende. Eine Ausstofsung der ganzen Zelle mit Kern, wie sie List (7) für ähnliche Gebilde im Fufse von *Tethys fimbriata* gesehen haben will, findet hier nicht statt, also auch hier ist die Zuhilfenahme der umliegenden Bindegewebszellen als Ersatzmaterial der Drüse nicht nothwendig.

Ähnliche solitäre Drüsen kommen auch bei *Pleurophyllidia lineata* vor und stimmen mit denen von *Pleurobranchaea* völlig überein.

Litteraturverzeichnifs.

1) Semper: Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Pulmonaten. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 8.

2) Carrière: Die Drüsen im Fufse der Lamellibranchiaten. Arbeiten des zoolog. Inst. zu Würzburg. V. 1879.

3) Carrière: Die Fufsdrüsen der Prosobranchier etc. Archiv f. mikr. Anatomie Bd. 21.

4) Sochaczewer: Das Riechorgan der Landpulmonaten. Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. 35.

5) P. B. Sarasin: Über drei Sinnesorgane und die Fufsdrüse einiger Gastropoden. Arbeiten des zool. Inst. zu Würzburg. Bd. VI.

6) Brock: Die Entwicklung der Geschlechtsorgane der stylommatophoren Pulmonaten. Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. 44.

7) List: Zur Kenntnifs der Drüsen im Fufse von Tethys fimbriata L. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 45.

8) Nalepa: Die Intercellularräume des Epithels und ihre physiologische Bedeutung bei den Pulmonaten. Wiener Akad. Sitzgs.-Ber. Bd. 88. Abh. I. pg. 1180—1190.

Figurenerklärung.

Fig. 1. Hinteres Ende des Fufses von *Pleurobranchus Meckelii*. *D.* Fufsdrüse. Natürliche Gröfse.

Fig. 2. Querschnitt durch die Fufsdrüse von *Pleurobranchus Meckelii* ($^{12}/_{1}$). *D.* Drüse. *mm.* Muskeln.

Fig. 3. Querschnitt durch den Randtheil der Fufsdrüse von *Pleurobranchus Meckelii* ($^{320}/_{1}$). Camera (Zeiss). Sublimat, Carmin. *mm.* Muskeln. *subep.* Subepitheliale Schicht.

Fig. 4. Hinteres Ende des Fufses von *Pleurobranchus testudinarius*. *D.* Fufsdrüse. Natürliche Gröfse.

Fig. 5. Querschnitte durch die Fufsdrüse von *Pleurobranchus testudinarius*. *a.* Durch die Mitte der Drüse, *D.* Drüse, *mm.* Muskeln ($^{8}/_{1}$). *b.* Durch das vordere Ende, *P.* Substanz des Fufses ($^{11}/_{1}$).

Fig. 6. Flachschnitt durch die Fufsdrüse von *Pleurobranchus testudinarius*. Pikrinhärtung. Eosin-Haematoxylin. ($^{135}/_{1}$).

Fig. 7. Hinteres Ende des Fufses von *Pleurobranchaea Meckelii*. *D.* Fufsdrüse. Natürliche Gröfse.

Fig. 8. Querschnitt durch den Fufs von *Pleurobranchaea Meckelii* ($^{8}/_{1}$). *D.* Drüse. *mm.* Muskeln.

Fig. 9. Querschnitt durch die Fufsdrüse von *Pleurobranchaea Meckelii*; mittlerer Theil ($^{135}/_{1}$). Sublimat, Carmin. Camera (Zeiss). *mm.* Muskeln. *subep.* Subepitheliale Schicht.

Fig. 10. Hinteres Ende des Fufses von *Pleurophyllidia lineata*. *D.* Fufsdrüse. Natürl. Gröfse.

Fig. 11. Querschnitte durch den Fufs von *Pleurophyllidia lineata* *a.* Durch den oralen Theil. *D.* Drüse, *mm.* Muskeln, *dors.* dorsale Seite, *ventr.* ventrale Seite ($^{17}/_{1}$). *b.* Durch den aboralen Theil (cfr. Text). *D.* Drüse, *dors.* dorsale-, *ventr.* ventrale Seite ($^{17}/_{1}$).

Fig. 12. Querschnitt durch die Fufsdrüse von *Pleurophyllidia lineata*. Übergangsstelle vom zehnten, aboralen Theile zu den oralen Parthieen ($^{135}/_{1}$). *mm.* Muskeln, *subep.* subepitheliale Schicht. *epi.* Epithel. Camera (Zeiss). Nigrosin.

Fig. 13. Drüsenzellen von *Pleurobranchus Meckelii* ($^{750}/_{1}$). *k.* Freie Kerne; frisch zerzupft.

Fig. 14. Quergeschnittenes Drüsensäckchen ebendaher. Flemming'sche Lösung ($^{750}/_{1}$). Haematoxylin. Camera (Zeiss).

Fig. 15. Längsgeschnittenes Drüsensäckchen ebendaher. Dieselbe Methode ($^{320}/_{1}$). Camera (Zeiss).

Fig. 16. Zwei Drüsensäckchen (in allen ähnlichen Figuren ist nur der um den Kern liegende Theil der Zelle gezeichnet) von *Pleurobranchus Meckelii.* Pikrinhärtung, Pikrocarmin. ($^{600}/_{1}$) homogene Immers. *n.* normale Zelle. *n.* Übergangsstadium zur Secretion. *s.* Stadium der Secretausstofsung. *r.* Regeneration.

Fig. 17. Zwei benachbarte Drüsensäckchen von *Pleurobranchus testudinarius.* Pikrinhärtung. Eosin-Haematoxylin. ($^{800}/_{1}$) homog. Immers. Camera (Zeiss). n_1. Übergang zur Secretion. *r.* Regeneration. *th.* theca sacculi.

Fig. 18. Längsgeschnittenes }
Fig. 19. Quergeschnittenes } Drüsensäckchen von *Pleurobranchaea Meckelii.* Sublimat, Carmin ($^{750}/_{1}$). Camera (Zeiss). *n.* normale Zellen. n_1. Übergangsstadien zur Secretion. *s.* Secretion. r_2 und r_3 verschiedene Stadien der Regeneration (abortive Zustände?).

Fig. 20. Zellen ebendaher; auf dieselbe Weise behandelt. ($^{600}/_{1}$) homogene Immersion. *s.* Secretion. *r.* Regeneration. r_1 abortive Regeneration (?).

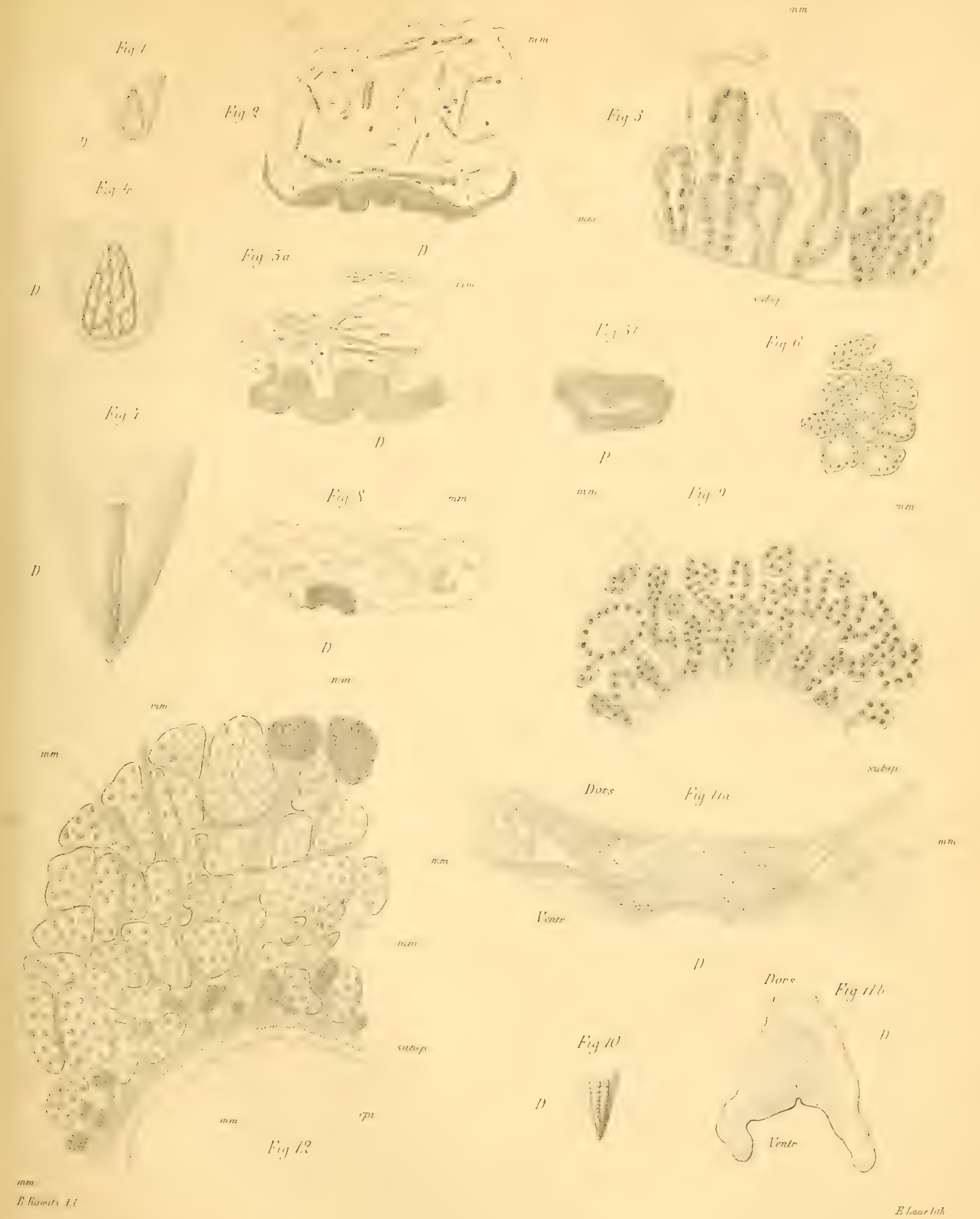
Fig. 21. Zellen von *Pleurophyllidia lineata.* Pikrocarmin. ($^{600}/_{1}$) homogene Immersion. Camera (Zeiss). *n.* Normale Zellen. *s.* Secretion. *r.* Regeneration. x. cfr. Text.

Fig. 22. *Pleurobranchus Meckelii.* Epithel- und Becherzellen. *a.* Flemming'sche Lösung Haematoxylin ($^{750}/_{1}$). *b.* Pikrinhärtung; Pikrocarmin. ($^{800}/_{1}$) homogene Immers. *d.* Becherzellen. *pi.* Pigment.

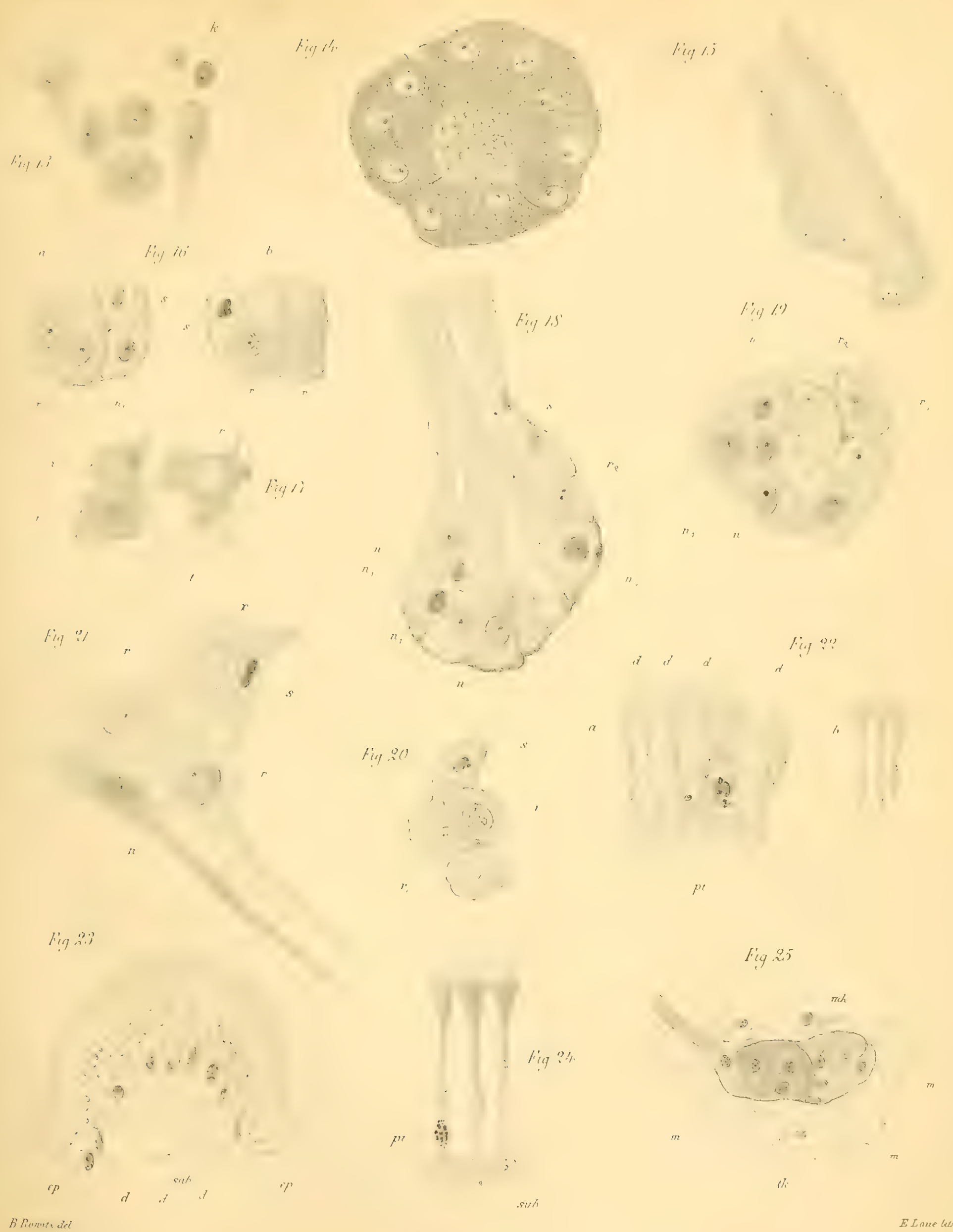
Fig. 23. Seitlich der Fufsdrüse von *Pleurobranchaea Meckelii*, Querschnitt. Flemmingsche Lösung; Haematoxylin ($^{135}/_{1}$). Camera (Zeiss). *ep.* Epithelzellen. *d.* solitäre Drüsen. *sub.* subepitheliale Schicht.

Fig. 24. Ebendaher; dasselbe Präparat. Epithelzellen. ($^{700}/_{1}$) homogene Immersion). *pi.* Pigment. *sub.* Subepitheliale Schicht.

Fig. 25. Ebendaher. Solitäre Drüse. ($^{800}/_{1}$) homogene Immersion. *m.* Muskeln. *mk.* Muskelkern. *k.* Tunicakern. Camera (Zeiss).



B. Rawitz del. E. Laue lith.



B. Rawitz del. E. Laue lith.



MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN.

Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven.

Preisschrift der Steiner'schen Stiftung.

Von

Dr. ERNST KÖTTER
in Berlin.

Vorgelegt in der öffentlichen Sitzung am 1. Juli 1886.
Nach neuer Überarbeitung zum Druck eingereicht am 10. Februar 1887.
Ausgegeben am 20. December 1887.

Vorwort.

Die Königl. Preufsische Akademie der Wissenschaften zu Berlin hatte am Leibniztage des Jahres 1882 folgende Preisfrage gemäfs den Bestimmungen der Steiner'schen Stiftung gestellt:

„Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei — ausdrücklich oder stillschweigend — auf Sätze gestützt hat, welche der analytischen Geometrie entlehnt sind und gröfstentheils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Übelstande abzuhelfen, giebt es, wie es scheint, nur ein Mittel: es mufs der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dafs an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dafs dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können.

Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat dies von Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, dafs in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde, und fordert die Geometer auf, Arbeiten, welche dieses Problem zum Gegenstande haben und zur Erledigung desselben Beiträge von wesentlicher Bedeutung bringen, zur Bewerbung um den im Jahre 1884 zu ertheilenden Steiner'schen Preis einzureichen. Selbstverständlich mufs in diesen Arbeiten die Untersuchung rein geometrisch durchgeführt werden; es ist jedoch nicht nur zulässig, sondern wird auch ausdrücklich gewünscht, dafs die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutert und bestätigt werden.“

Die einzige rechtzeitig eingelaufene Arbeit wurde am Leibniztage des Jahres 1884 beurtheilt, aber derselben der Preis nicht zugesprochen. Indessen wiederholte die Akademie die Preisfrage, forderte aber nunmehr die Hinzufügung analytischer Erläuterungen. Die folgende Arbeit, eine rein geometrische Theorie der ebenen algebraischen Curven begründend, wurde am vorjährigen Leibniztage von der Akademie des ausgesetzten Preises für würdig befunden[1]).

Der hohe Grad einfacher und sicherer Begründung der Thatsachen in der analytischen Geometrie beruht einmal darauf, dafs in die Fundamente die imaginären Gröfsen vollständig aufgenommen sind, zweitens darauf, dafs vor Eintritt in dieselbe die Theorie der ganzen Functionen einer und zweier Variablen erledigt ist. Man weifs von vorne herein, dafs eine ganze Function einer Variablen und $n$ten Grades n im Allgemeinen verschiedene Nullstellen besitzt, und dafs zwei ganze Functionen $m$ter und $n$ter Dimension zweier Variablen mn im Allgemeinen verschiedene Werthepaare bestimmen, für die beide verschwinden.

Daraus ergiebt sich naturgemäfs eine Zerlegung des Stoffes in vier grofse Abschnitte. Der erste hat sich mit den imaginären Elementen zu beschäftigen und mufs zeigen, dafs man auch mit Rücksicht auf die imaginären Elemente derselben die Grundgebilde projectivisch resp. collinear

---

[1]) Es sei dem Verfasser zur Vermeidung möglicher Mifsverständnisse die Mittheilung gestattet, dafs er mit dem Verfasser der früheren Arbeit nicht identisch ist.

auf einander beziehen kann, so dafs die beiden Haupteigenschaften der projectivischen Reihen erhalten bleiben, dafs sie eindeutig bezogen und durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt sind. Diese Aufgabe hat bekanntlich von Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage vollständig gelöst, indem er die imaginäre Gerade zweiter Art zum Mittelpunkt der Darstellung machte; die Grundzüge dieser Theorie werden in der Einleitung dargelegt.

Ich biete in dem ersten Capitel meiner Arbeit (§§ 1—21) eine Behandlung der projectivischen Verhältnisse der reellen Ebene, welche allein von ihren eigenen imaginären Punkten und Geraden Gebrauch macht. Das Capitel schliefst mit dem Nachweise ab, dafs zwei projectivische Gebilde desselben Trägers stets gemeinsame und im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Elemente haben. Die Punkte einer imaginären Geraden werden dabei durch ihre reellen Träger, die einen imaginären Punkt enthaltenden Strahlen durch ihre reellen Punkte ersetzt. Die Punkte einer reellen Geraden werden durch die reellen Punkte bestimmt, die mit ihnen und einem imaginären Punkte aufserhalb sich durch eine Gerade verbinden lassen, und die von einem reellen Punkt ausgehenden Strahlen durch die reellen Geraden, die ihre Schnittpunkte mit einer festen imaginären Geraden enthalten.

Das zweite Capitel (§§ 22—76) bietet in der Theorie der Involutionen das geometrische Ersatzmittel für die der ganzen Functionen. Wie eine unbekannte Punktgruppe durch eine Gleichung analytisch dargestellt wird, wird sie geometrisch fixirt als Coincidenzgruppe zweier projectivischer Involutionen. Eine einzelne Gruppe einer Involution $n$ter Ordnung $A_1 A_2 \dots A_n, B_1 B_2 \dots B_n$ kann als Gruppe gemeinsamer Elemente der Involutionen

$$A_1 A_2 \dots A_{n-m}, B_1 B_2 \dots B_{n-m}, \mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}, \dots \;\overline{\wedge}\; B_{n-m+1} \dots B_n, A_{n-m+1} \dots A_n, \mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_n, \dots$$

betrachtet werden. Es wird gezeigt, dafs, wenn nur $\mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_{n+1}$ geändert wird, die Gruppe der Involution $n$ter Ordnung als mit ihr projectivisch veränderlich bezeichnet werden kann. Es wird ferner dargelegt, dafs zwei solche Reihen stets gemeinsame Elemente und im Allgemeinen n verschiedene besitzen. Da naturgemäfs der Schlufs von n auf $n+1$ die Beweismethode ist, so gliedert das Capitel sich zunächst in drei Ab-

schnitte, in deren erstem die Involution zweiter Ordnung behandelt wird, in deren zweitem die Lehrsätze über Involutionen $n$ter Ordnung aufgestellt werden, die dann im dritten erwiesen werden. In einem vierten Abschnitte werden daraus neue Folgerungen gezogen.

Eine verschwindende ganze Function zweier Variablen y und x, von den Graden m und μ in ihnen, liefert, wenn man letztere als Parameter betrachtet, eine gesetzmäſsige Anordnung von Gruppen eines linearen Systems, und zwar hängt jede Gruppe im Allgemeinen eindeutig von ihrem Parameter ab. Daher werden im dritten Capitel (§§ 77—119) der Arbeit zunächst in einem ersten Abschnitt die „Involutions-Netze“ zweiter und μter Stufe behandelt, die den linearen Systemen binärer Formen zweiter resp. μter Stufe entsprechen. Es wird die Analogie hervorgehoben, welche das erstere Netz mit der Ebene und das Netz dritter Stufe mit dem Raume haben würde. Darauf wird im zweiten Abschnitte aus dem Involutionsnetz zweiter Stufe eine einfach unendliche Reihe herausgehoben, die zu ihm sich verhält, wie der Kegelschnitt zur Ebene. Diese Involution zweiten Ranges deckt sich mit der gleich Null gesetzten ganzen Function, die in x vom zweiten, in y vom $m$ten Grade ist. Analog wird aus dem allgemeinen Netze μter Stufe im dritten Abschnitt eine Reihe herausgehoben, die zu ihm sich verhält, wie die cubische Curve zum Raume. Sie deckt sich mit der gleich Null gesetzten ganzen Function $m$ten und μten Grades in y und x. Das Schluſsresultat des Abschnittes ist, daſs zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges $m\nu + n\mu$ gemeinsame Stellen haben.

Das vierte Capitel (§§ 120—178) zieht nun aus den vorigen die Früchte. Die drei ersten Abschnitte begründen durch Schlüsse von 2 auf n und $n+1$ die Lehrsätze über die verschiedene Erzeugbarkeit der Curven, ihre gemeinsamen Punkte, sowie über ihr Zusammenschlieſsen zu Büscheln und Netzen. Im vierten und fünften Abschnitt werden Lehrsätze über Schnittpunkt-Systeme ebener Curven aufgestellt und bewiesen, endlich wird im sechsten Abschnitt die Bestimmung der Curven durch gegebene Punkte erörtert.

Die analytisch-geometrischen Entwickelungen habe ich im fünften Capitel (§§ 179—196) im Zusammenhange behandelt.

Das Besondere unterliegt ewig dem Allgemeinen;
Das Allgemeine hat ewig sich dem Besondern zu fügen.
[Goethe.]

Einleitung.

Wie in der Analysis die durch reelle Gröfsen nicht lösbaren Gleichungen zweiten Grades zur Einführung der complexen Zahlen nöthigen, so drängen sich in der Geometrie die imaginären Gebilde bei den Aufgaben zweiten Grades auf, denen kein reelles Gebilde Genüge leistet. Die Aufgaben zweiten Grades der Ebene lassen sich im Wesentlichen alle auf die folgende und ihre dual gegenüberstehende zurückführen:

Gegeben auf einer reellen Geraden zwei projectivische Punktreihen

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \wedge A_2 B_2 C_2 \ldots,$$

gesucht werden die beiden Reihen gemeinsamen Punkte. Zwei reelle und verschiedene Punkte sind der Reihe $A_1 B_1 C_1 \ldots$ mit unendlich vielen Reihen gemeinsam, und es liegt eine bestimmte unter ihnen mit $A_1 B_1 C_1 \ldots$ in Involution $(ABC\ldots)$.

Die Punkte, welche der gestellten Aufgabe entsprechen, sind jedenfalls eindeutig bestimmt als Doppelpunkte der Involution AA_1, BB_1, von der dann kein Paar das andere trennt. Wenn irgend zwei und folglich je zwei Paare einer Involution einander trennen, so betrachtet man dieselbe als Darstellung der dann nicht reell vorhandenen Doppelpunkte der Reihen

$$ABC \ldots \wedge A_1 B_1 C_1 \ldots$$

Die so gewonnenen conjungirt imaginären Punkte und die dual gegenüberstehenden conjungirt imaginären Strahlen kann man bei einfacheren geometrischen Constructionen an Stelle zweier reeller Punkte oder Geraden einführen, nachdem man jenen eine für beide Fälle gleich verlaufende Lösungsform gegeben hat. In erster Linie kann man in dieser

Weise die Bestimmungen des Kegelschnittes aus gegebenen Punkten und Tangenten umgestalten.

Allein der Umstand, dafs man so die imaginären Gebilde nur paarweise behandeln kann, während die Deduction doch häufig einzelne imaginäre Punkte und Strahlen verlangt, birgt grofse Unbequemlichkeiten. Soll z. B. eine Gerade durch zwei imaginäre Punkte gelegt werden, so müssen ihre Träger zunächst in der Art perspectivisch bezogen werden, dafs Paare ihrer Involutionen einander entsprechen. Dies geht aber in zwei verschiedenen Weisen an; daher giebt es zwei verschiedene Punkte S und S_1, von denen aus die Involutionen beider gegebener Punkte durch dieselbe Strahleninvolution projicirt werden. Es bleibt völlig unbestimmt, welcher von beiden mit den gegebenen Punkten in einer Geraden liegt.

Das volle Verdienst, diese und andere Schwierigkeiten der geometrischen Imaginären-Theorie überwunden zu haben, kommt von Staudt zu. Seine bezüglichen Untersuchungen sind in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage" niedergelegt (drei Hefte, Nürnberg 1856, 1857 und 1860). Die beiden verschiedenen Bewegungsrichtungen, welche irgend eine Gerade zuläfst, kann man durch die Punktfolgen ABA_1B_1 und AB_1A_1B fixiren, wenn AA_1 und BB_1 Paare einer Involution derselben ohne Doppelelemente sind. Von Staudt hat nun den glücklichen Gedanken, diese Punktfolgen als Darstellungen der beiden conjungirten Punkte zu betrachten, welche durch die Involution bedingt werden. Bei allen Darstellungen des ersteren (CDC_1D_1) durch irgend zwei Paare CC_1 und DD_1 seiner Involution sollen C, D und C_1 in dem einmal bestimmten Sinne ABA_1 folgen. Ganz in derselben Weise werden die beiden conjungirten Geraden getrennt, welche durch irgend eine elliptische Strahleninvolution bedingt werden. Bei allen Darstellungen aba_1b_1 ; cdc_1d_1; ... der einen sollen a, b, a_1; c, d, c_1; . . . in demselben (Drehungs-) Sinne auf einander folgen, bei allen Darstellungen ab_1a_1b ; cd_1c_1d; . . . der zweiten aber a, b_1, a_1 ; c, d_1, c_1 ; . . . in dem zu jenem entgegengesetzten Sinne (Beiträge No. 116).

Nunmehr bestimmen irgend zwei imaginäre Punkte der reellen Ebene eine imaginäre Gerade. Denn die Träger der ersteren können nur in einer Weise perspectivisch so bezogen werden, dafs je zwei Darstellungen derselben einander entsprechen. Daher ergiebt sich auch nur ein reeller Punkt, der mit den gegebenen in einer Geraden liegt, von

der also jede Darstellung zu zwei Darstellungen der gegebenen Punkte perspectivisch ist. Ebenso bestimmen zwei imaginäre Geraden einen Punkt.

Der Raum enthält neben den imaginären Elementen seiner reellen Ebenen und Geraden noch zunächst imaginäre Ebenen. Jede in einem Ebenenbüschel enthaltene Involution ohne Ordnungselemente, mit der ein bestimmter Drehungssinn verbunden wird, bestimmt eine imaginäre Ebene, in welcher der reelle Träger des Büschels liegt. Jede den letzteren nicht schneidende reelle Gerade hat mit derselben einen imaginären Punkt gemeinsam, dessen Darstellungen zu denen der Ebene perspectivisch sind. Da jede reelle Ebene sie in einer imaginären Geraden trifft, so hat auch jede in einer reellen Ebene gelegene imaginäre Gerade einen imaginären Punkt mit der imaginären Ebene gemeinsam, wofern sie nicht ganz in ihr liegt.

Aufser den imaginären Geraden, die in je einer reellen Ebene liegen und daher auch je einen reellen Punkt enthalten, giebt es Geraden zweiter Art im Raume, bei denen beides nicht stattfindet. Von Staudt definirt dieselben mit Hülfe eines geschaart-involutorischen Systemes ohne Ordnungslinien. In einem involutorischen Systeme mit Ordnungselementen kann entweder jeder Punkt einer Ebene s und ein anderer S aufserhalb derselben sich selbst entsprechen, oder jeder Punkt, der in einer von zwei sich nicht schneidenden Geraden gelegen ist. Im ersten Falle gehen alle sich selbst entsprechenden oder Leitstrahlen des Systems durch den Ordnungspunkt, im zweiten Falle aber durch die beiden Ordnungsstrahlen. Als geschaart-involutorisch ist ein involutorisches System in diesem Falle zu bezeichnen und dann, wenn es überhaupt keine reellen Ordnungselemente besitzt. Zwei entsprechende Geraden können sich nämlich im dritten Falle überhaupt nicht treffen und im zweiten Falle nur in einem Punkte einer Ordnungslinie. Daher giebt es in beiden Fällen unendlich viele Regelschaaren, deren Leitschaaren nur aus Leitstrahlen bestehen, welche nämlich entsprechende Punkte zugehöriger Geraden $ACF\ldots \,\overline{\wedge}\, A_1C_1F_1\ldots$ verbinden. Zu den Involutionen des Systemes, deren Träger diese Leitstrahlen sind, ist in der Regelschaar eine bestimmte Involution gg_1hh_1 perspectivisch. Wenn Ordnungslinien vorhanden sind, so gehören sie jeder derartigen Involution als Doppelstrahlen an. Wenn die Ordnungslinien imaginär sind, so sind alle diese Involutionen ohne Ord-

nungselemente und Darstellungen der beiden imaginären Strahlen. Jeder Leitstrahl trifft beide in zwei conjungirten Punkten und sendet aufserdem zwei Ebenen aus, die alle Punkte derselben enthalten. Durch irgend eine Darstellung gg_1hh_1 der beiden Strahlen, die man von einer beliebigen Geraden g ausgehen lassen kann, ist das zu Grunde liegende involutorische System bestimmt, ebenso durch vier Leitstrahlen, die nicht alle zu einer Darstellung perspectivisch sind.

Auch hier weifs von Staudt einen bestimmten Richtungssinn mit dem involutorischen Systeme zu verbinden und dadurch eine Trennung der beiden Ordnungslinien zu bewirken. Wird mit der Involution gg_1hh_1 der bestimmte Sinn ghg_1h_1 verbunden, so wird auch mit den hierzu perspectivischen Involutionen der Leitstrahlen in ihrer Leitschaar je ein bestimmter Sinn

$$ABA_1B_1 \quad , \quad CDC_1D_1$$

verbunden. Da die beiden Punktfolgen auf p und q zu demselben Ebenenbüschel r perspectivisch sind, so sind sie hinsichtlich r und jedes anderen Strahles der Schaar pqr in gleichem Sinne beschrieben, denn nach von Staudt's Definition sind zwei Punktfolgen ABC und EFG auf p und q hinsichtlich r in gleichem Sinne beschrieben, wenn die Folgen $r(ABC)$ und $r(EFG)$ gleichen Sinnes sind (Beitr. No. 52, links). Wenn nun eine Gerade s die Regelschaar pqr überhaupt nicht trifft, oder doch nicht in zwei Punkten, die durch p und q getrennt werden, so zeigt von Staudt (Beiträge 55), dafs die beiden Folgen ABA_1B_1 und CDC_1D_1 auch bezüglich s in gleichem Sinne beschrieben sind. Irgend ein Leitstrahl des involutorischen Systemes mufs aber entweder ganz in der Regelfläche liegen, oder er kann sie überhaupt nicht treffen, denn als zwei verschiedenen Leitstrahlen angehörig, müfste ein etwaiger gemeinsamer Punkt ein Ordnungspunkt des involutorischen Systemes sein. Daher sind die beiden Punktfolgen

$$ABA_1B_1 \quad , \quad CDC_1D_1$$

in gleichem Sinne bezüglich jedes beliebigen Leitstrahles beschrieben. Die beiden Leitstrahlen p und q, denen sie selbst angehören, sind aber, weil AC oder g willkürlich war, unabhängig von einander. Daher ist dann folgende Thatsache bewiesen: wenn man mit irgend einer der im System

enthaltenen Involutionen, die aus Ebenen durch einen Leitstrahl s sich bilden lassen, einen bestimmten Sinn verbindet, mit jeder geraden auf einem Leitstrahl gelegenen Involution den perspectivischen Sinn, so gehören alle diese imaginären Punkte noch unendlich vielen anderen Ebenen an, von denen durch jeden Leitstrahl genau eine geht. Alle diese imaginären Punkte werden zu einer Geraden zweiter Art gerechnet, durch welche auch alle letzteren Ebenen gehen. Die verschiedenen Darstellungen

$$ghg_1h_1 \quad , \quad efe_1f_1 \text{ u. s. w.}$$

durch vier Geraden je einer Regelschaar sind zu je einfach unendlich vielen Darstellungen von Punkten derselben perspectivisch. Sie selbst, das heifst die zu ihnen perspectivischen Ebenen-Büschel

$$p(ghg_1h_1) \quad , \quad q(efe_1f_1)$$

sind in Bezug auf irgend einen Leitstrahl s in gleichem Sinne beschrieben.

Die Gerade zweiter Art hat mit jeder reellen Ebene einen imaginären Punkt gemeinsam und bestimmt mit jedem reellen Punkte eine imaginäre Ebene. Denn die Ebene enthält einen Leitstrahl, in welchem sie von ihrer entsprechenden Ebene im involutorischen System getroffen wird. Auf ihm liegt ein Punkt der Geraden zweiter Art. Der einzige Leitstrahl aber, der von einem reellen Punkte ausgeht, ist der Träger einer Ebene, welche die imaginäre Gerade und alle ihre Punkte enthält.

Zwei imaginäre Punkte bestimmen, wenn ihre Träger sich nicht schneiden, eine imaginäre Gerade zweiter Art. Denn wenn man die Darstellung DED_1E_1 des zweiten zu derjenigen ABA_1B_1 des ersteren projectivisch setzt, so ist sie durch D eindeutig bestimmt. Wenn nun AD, BE, A_1D_1, B_1E_1 mit e, f, e_1, f_1 bezeichnet werden, so ist efe_1f_1 eine Darstellung der gesuchten Geraden. Sie ist eindeutig bestimmt, weil damit auch ihr involutorisches System eindeutig gegeben ist. Ebenso bestimmen zwei imaginäre Ebenen eine imaginäre Gerade zweiter Art, in der sie sich schneiden, wenn ihre reellen Träger sich nicht treffen, im andern Falle eine solche erster Art.

Eine imaginäre Ebene enthält eine imaginäre Gerade zweiter Art vollständig, wenn irgend zwei Punkte P und Q derselben in ihr liegen. Denn Darstellungen der letzteren und der sie verbindenden Geraden sind zu irgend einer Darstellung der Ebene perspectivisch. Der reelle Träger der

letzteren ist folglich ein Leitstrahl des Systems, welches der Geraden zu Grunde liegt. Alle durch P und Q gehenden Ebenen haben die durch beide bestimmte Gerade und alle ihre Punkte gemeinsam. Wenn P und Q eine Gerade erster Art bestimmen, so liegt diese ebenfalls ganz in der Ebene.

Eine Gerade und ein Punkt bestimmen eine Ebene. Wenn beide imaginär sind, so legt man zuerst durch letzteren eine reelle Ebene, die mit der Geraden einen zweiten imaginären Punkt gemeinsam hat. Die beide Punkte enthaltende Gerade hat einen reellen Punkt, von dem aus die einzige Ebene durch die Gerade sich legen läfst, die auch den gegebenen Punkt enthält. Ebenso hat eine Gerade mit einer Ebene, in der sie nicht ganz liegt, einen Punkt gemeinsam.

Drei imaginäre oder theils reelle Punkte liegen entweder in einer Geraden, oder sie bestimmen eine Ebene. Drei reelle oder theils imaginäre Ebenen gehen entweder durch eine Gerade, oder sie bestimmen einen einzelnen ihnen gemeinsamen Punkt. Daraus sieht man, dafs die Elemente des Raumes, wenn man imaginäre und reelle zusammen nimmt, dieselben Grundeigenschaften erfüllen, welche bei dem Raume der reellen Elemente gültig waren. Auch jetzt noch kann der Punkt der Ebene reciprok gegenübergestellt werden, und die Gerade nimmt zwischen beiden die Mittelstellung ein. Soll die Geometrie der Ebene allgemein behandelt werden, so braucht man nur diejenige irgend einer reellen Ebene behandeln und kann dann diejenige irgend einer zweiten reellen oder imaginären Ebene dadurch herstellen, dafs man sie auf die erste perspectivisch bezieht.

In dem zweiten „Beitrage zur Geometrie der Lage“ entwickelt von Staudt in erster Linie, wie man einförmige Gebilde projectivisch beziehen kann. Irgend ein Element S eines Trägers liegt zu drei anderen PQR desselben entweder neutral, oder es ist im Sinne PQR oder QPR beschrieben. Wenn man es mit Punkten derselben Geraden zweiter Art und mit den Trägern $pqrs$ zu thun hat, so gehören diese im ersten Falle zu derselben Regelfläche. Im zweiten Falle ist die Darstellung von S im Sinne von pqr, und im dritten im Sinne qpr beschrieben. (Seite 11.) Diese Definition bleibt dann bestehen, wenn $PQRS$ Ebenen sind, welche dieselbe Gerade zweiter Art enthalten (Beiträge No. 196).

Wenn $PQRS$ vier Elemente einer Geraden sind, u_1 und u_2 aber zwei imaginäre Geraden zweiter Art, so stimmen die beiden perspectivischen Würfe

$$P_1Q_1R_1S_1 \text{ oder } u_1(PQRS) \text{ und } P_2Q_2R_2S_2 \text{ oder } u_2(PQRS)\,,$$

was den Sinn anbelangt, überein. Es verhalten sich S_1 und S_2 zu $P_1Q_1R_1$ und $P_2Q_2R_2$ neutral, oder S_1 ist im Sinne $P_1Q_1R_1$ und gleichzeitig S_2 im Sinne $P_2Q_2R_2$ beschrieben, oder es ist endlich S_1 im Sinne $Q_1P_1R_1$ und S_2 im Sinne $Q_2P_2R_2$ beschrieben. Daher kann man auch (Beitr. 200) sagen, dafs $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen, und so diesen Begriff auf reelle Geraden und imaginäre erster Art übertragen.

Aus dem analogen Grunde kann man überhaupt sagen, dafs zwei in perspectivischen Gebilden einander entsprechende Würfe $PQRS$ und $P_1Q_1R_1S_1$, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen; auf diese Weise definirt man zugleich für alle einförmigen Gebilde, was unter dem Sinne zu verstehen ist, in welchem S bezüglich PQR beschrieben ist.

Zwei räumliche Systeme sind reell-projectivisch bezogen, wenn sie (No. 156), was ihre reellen Elemente anbelangt, projectivisch bezogen sind. Dabei entspricht jedem imaginären Element ein anderes, dessen Darstellung derjenigen des gegebenen entspricht. Wenn zwei reelle Gebilde reell-projectivisch sind, so sind je zwei entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art, denn sie können als das erste und das letzte Glied von mehreren Gebilden betrachtet werden, von denen auf einander folgende reell-perspectivisch sind.

Zu einer Kette gehören nach von Staudt alle die Elemente eines einförmigen Gebildes, welche zum Sinne von irgend dreien unter ihnen sich neutral verhalten. Bei einer imaginären Geraden zweiter Art gehören alle die Punkte zu einer Kette, deren reelle Träger zu einer Regelschaar gehören; wenn der Punkt S im Sinne PQR und T im Sinne QPR beschrieben ist, so liegen ihre Träger s und t zu verschiedenen Seiten der Regelschaar pqr. Jede s und t enthaltende Regelschaar des zu Grunde liegenden Systems trifft pqr in zwei verschiedenen Geraden. s und t können so bestimmt werden, dafs sie durch je zwei solche Geraden und, wie von Staudt definirt, durch die Kette harmonisch ge-

trennt werden. Die Bezeichnungen werden auf perspectivische Gebilde übertragen; alle reellen Elemente eines reellen Trägers gehören derselben Kette an, welche harmonisch durch irgend zwei conjungirt imaginäre Elemente getrennt wird. Bei einem Strahlbüschel mit imaginärem Centrum in einer reellen Ebene liegen die reellen Punkte aller Strahlen einer Kette auf einem Kegelschnitt, der das Centrum und den hierzu conjungirten Punkt enthält.

Zwei einförmige Gebilde sind projectivisch, wenn jedem Elemente ein Element entspricht, und überdies zwei entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, übereinstimmen, insbesondere also jeder Kette eine Kette oder jedem neutralen Wurfe ein neutraler Wurf entspricht (Beitr. 215). Jedem harmonischen Wurfe gehört dabei ein harmonischer Wurf zu. Trennen nämlich die Punkte MN einer imaginären Geraden zweiter Art die beiden Punktepaare AA_1 und BB_1 derselben harmonisch, so liegen sowohl die vier Träger $mnaa_1$ als auch $mnbb_1$ harmonisch. a und a_1, sowie b und b_1 entsprechen sich in dem involutorischen Systeme mit den Ordnungslinien m und n. In demselben gehören die Regelflächen mab und ma_1b_1 einander zu. Der Geraden p, welche in ersterer noch von einem Punkte von m ausgeht, entspricht eine Gerade p_1, die von demselben Punkte von m ausgeht und in der Ebene mp liegt. Daher berühren sich mab und ma_1b_1 längs m oder sie haben nur m gemeinsam, und es gilt analoges von mab_1 und ma_1b. Wenn diese beiden Eigenschaften erfüllt sind, so giebt es eine zweite Gerade n, die mit m zusammen aa_1 und bb_1 harmonisch trennt. Wenn in einer zweiten projectivischen Geraden zweiter Art jenen Punkten diejenigen mit den Trägern $m', n', a', a_1', b', b_1'$ entsprechen, so gehören jenen Regelflächen die folgenden $ma'b'$ und $m'a_1'b_1'$, sowie $m'a'b_1'$ und $m'a_1'b'$ zu, die je nur m' gemeinsam haben, darum mufs m' mit einem anderen Strahle sowohl $a'a_1'$ als auch $b'b_1'$ harmonisch trennen. Da eine analoge Entwickelung für n und n' gemacht werden kann, und nur ein Punktepaar $m'n'$ die beiden harmonischen Trennungen bewirken kann, so gehören die harmonischen Würfe $mnaa_1$ und $m'n'a'a_1'$ oder $n'm'a'a_1'$ einander zu. Der Satz überträgt sich durch eine Reihe von Projectionen auf alle einförmigen Gebilde.

Wenn zwei reelle einförmige Gebilde so projectivisch sind, dafs irgend drei reellen Elementen des einen drei reelle des anderen entsprechen,

so sind die Gebilde reell-projectivisch. Denn zuerst entsprechen die aus je den reellen Elementen bestehenden Ketten einander und zwar projectivisch, weil je zwei harmonische Würfe einander zugehören. Entsprechen die reellen Würfe $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander, so gehören den conjungirten Punkten $ABCD$ und $ADCB$, die sowohl durch AC als BD harmonisch getrennt werden (wenn $ABCD$ in einerlei Sinn einander folgen) die beiden conjungirt imaginären Punkte zu, die sowohl durch A_1C_1 als auch durch B_1D_1 harmonisch getrennt werden. Einer von den beiden Punkten $A_1B_1C_1D_1$ oder $A_1D_1C_1B_1$ mufs sich zum Sinne $A_1B_1C_1$ verhalten, wie der Punkt $ABCD$ zum Sinne ABC; er wird dem Punkte $ABCD$ zugeordnet. Nun kann man jedenfalls durch eine Reihe perspectivischer Operationen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ reell-projectivisch beziehen. Dabei werden die Elemente $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander zugewiesen und es stimmen daher die Würfe

$$A\,,B\,,C\quad,\quad ABCD\quad \text{und}\quad A_1\,,B_1\,,C_1\quad,\quad A_1B_1C_1D_1\;,$$

was den Sinn anbelangt, überein. Mithin müssen auch in den gegebenen Reihen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ einander zugehören, und diese müssen reell-projectivisch sein.

Zwei projectivische einförmige Gebilde desselben Trägers sind identisch, wenn sie drei Elemente entsprechend gemein haben. Z. B. werden zwei Ebenen-Büschel betrachtet, die dieselbe imaginäre Gerade zweiter Art zur Axe haben. Die reellen Geraden der drei entsprechend gemeinsamen Ebenen werden von unendlich vielen reellen Geraden geschnitten. Auf jeder schneiden die Büschel Punktreihen aus, die zuerst reell-projectivisch sind und dann identisch, da drei Paare sich selbst entsprechender Punkte vorhanden sind. Zwei projectivische Gebilde sind demnach unzweideutig auf einander bezogen, sobald irgend drei Elementen des einen die entsprechenden des anderen zugewiesen sind. Als projectivisch können zwei Gebilde folglich allgemein dann bezeichnet werden, wenn sie als erstes und letztes Glied einer Reihe von einförmigen Gebilden betrachtet werden können, von denen je zwei folgende zu einander perspectivisch sind. Zwei projectivische in einander liegende Gebilde haben stets gemeinsame und im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Elemente.

Nachdem von Staudt auf diese Weise gelehrt hat, dafs man auch mit Rücksicht auf ihre imaginären Elemente die einförmigen Gebilde projectivisch beziehen kann, führt er diese Gebilde in das Fundament seines Lehrgebäudes ein. Zwei ebene Systeme sind dann collinear oder reciprok noch zu beziehen, wenn irgend vier reellen oder imaginären Punkten vier beliebige Punkte oder Geraden zugewiesen sind. Die Kegelschnitte und die Flächen zweiten Grades werden als Ordnungsgebilde der allgemeinsten ebenen und räumlichen Polar-Systeme behandelt. Die Kegelschnitt-Theorie wird bis zu den Netzen, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung bis zur Behandlung der einfachen Curven-Systeme und der Raumcurven vierter Ordnung gefördert.

Das durch zwei gegebene Gebilde, Curven oder Flächen, bestimmte einfache System behandelt von Staudt und nach ihm Hr. Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage“ mit grofser Einfachheit aus der Definition heraus, dafs irgend ein Punktepaar AB entweder für sie alle oder nur für ein bestimmtes Gebilde conjugirt sein soll, woraus insbesondere folgt, dafs ein beliebiger Punkt P entweder nur ein Gebilde des einfachen Systemes bestimmt, oder ihnen allen angehört. Dieses Verfahren ist deswegen so brauchbar, weil man zeigen kann, dafs Curve resp. Fläche und Polar-System einander eindeutig bedingen. Weil der analoge Nachweis für Polar-Systeme höherer Ordnung sich nicht so leicht führen lassen dürfte, bin ich in der folgenden Arbeit zu der Steiner'schen Definition der Curven als Erzeugnisse projectivischer Büschel zurückgekehrt. Dafs man aus Gebilden $n$ter Ordnung, Punktgruppen, Curven oder Flächen, für welche die Polar-Eigenschaften vorausgesetzt werden, Polar-Systeme der Gebilde $n+1$ter Ordnung zusammensetzen kann, hat Hr. Thieme gezeigt. (Vergl. die Noten.)

Erstes Capitel. §§ 1–21.

Die imaginären Elemente der reellen Ebene nach von Staudt und die projectivische Beziehung zwischen ihren einförmigen Grundgebilden.

§ 1. Nach von Staudt's[1] Definition wird ein imaginärer Punkt A einer vorliegenden reellen Geraden dargestellt durch zwei Punktepaare AA_1 und BB_1 einer elliptischen Involution, mit denen man einen bestimmten Sinn der beiden möglichen verbindet. Der Ausdruck ABA_1B_1 symbolisirt so einen imaginären Punkt. Mit der Involution wird der Sinn verbunden, in dem A, B und A_1 auf einander folgen. Zur Darstellung des Punktes in derselben Art können unter Beibehaltung des Sinnes irgend zwei andere Paare der Involution dienen. Der betreffende Punkt ist jedoch scharf zu trennen von dem Punkte AB_1A_1B oder A[1], welcher zu jenem conjungirt genannt wird. Der Träger 𝔞 seiner Darstellung ist die einzige durch einen imaginären Punkt gehende reelle Gerade.

Analog wird eine imaginäre Gerade α einer reellen Ebene dargestellt durch zwei beliebige Paare aa_1; bb_1 einer elliptischen Strahleninvolution, mit welcher man einen bestimmten Drehungssinn der beiden möglichen verbindet. Sie kann durch die Zeichenverbindung aba_1b_1 symbolisirt werden, wenn in dem bestimmten Sinne a, b und a_1 auf einander folgen. Sie enthält keinen anderen reellen Punkt als den Träger 𝔄 ihrer Darstellungen und ist von ihrer conjungirten Geraden ab_1a_1b oder β^1 wohl zu trennen.

Die gegebenen Definitionen umfassen auch das begrenztere Gebiet der reellen Elemente der Ebene, indem nämlich der reelle Punkt durch zwei Punktepaare der parabolischen Involution, deren Doppelpunkt er ist,

und die reelle Gerade durch zwei Paare der parabolischen Strahleninvolution, deren Doppelstrahl sie ist, dargestellt werden kann.

Anm. Die hier angewendete Bezeichnungsweise soll eine bleibende sein.

§ 2a. Wenn für eines von zwei imaginären Elementen eine beliebige Darstellung $[ABA_1B_1]$ gegeben ist, so kann eine und nur eine von einem beliebigen Element seines Trägers $[M]$ ausgehende Darstellung $[MNM_1N_1]$ des anderen gefunden werden derart, dafs die beiden Darstellungen zu einander projectivisch sind $[ABA_1B_1 \barwedge MNM_1N_1]^2$.

Zusatz: Von zwei benachbarten Elementen (M und M') gehen Darstellungen aus $[MNM_1N_1$ und $M'N'M_1'N_1']$, deren entsprechende Elemente einander nahe liegen.

Die beigefügten Bezeichnungen beziehen sich auf den Fall zweier imaginärer Punkte **A** und **B**.

Man verbinde den beliebigen Punkt C (Fig. 1) einer durch MM_1 gehenden Curve zweiter Ordnung mit den Paaren der Involution von **B**. Auf dem Kegelschnitt entstehen die Paare einer Involution, deren Verbindungslinien durch einen auf MM_1 und innerhalb des Kegelschnittes gelegenen Punkt E gehen. Auch dieser Involution kommt ein bestimmter Sinn zu. Der Forderung

$$MEM_1F \barwedge ABA_1B_1$$

genügt ein bestimmter Punkt F, der aufserhalb des Kegelschnittes liegt, weil AA_1 und BB_1 einander trennen. Von F aus gehen also zwei Tangenten an den Kegelschnitt, deren Berührungspunkte GG_1 von MM_1 getrennt werden. Daher ist der Sinn MG_1M_1 von demjenigen MGM_1 verschieden; es möge der erstere mit dem gegebenen übereinstimmen. EG treffe den Kegelschnitt noch in H. Alsdann ist

$$MHM_1G \barwedge ABA_1B_1 \barwedge MEM_1F\,.$$

Daher wird MHM_1G von C aus in den gesuchten Wurf MNM_1N_1 projicirt. Denn es ist

$$MNM_1N_1 \barwedge MHM_1G \barwedge ABA_1B_1\,;$$

überdies stimmt der Sinn mit dem des Punktes **B** überein. Da die ganze

Procedur sich umkehren läſst, so giebt es nur diese eine Lösung der Auf-

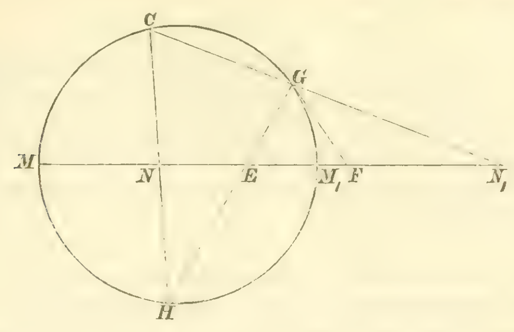


Fig. 1.

gabe. Zu einer anderen Darstellung ACA_1C_1 von A erhält man die zugehörige MON_1O_1, und es ist dann

$$AA_1BB_1CC_1\ldots \;\overline{\wedge}\; MM_1NN_1OO_1\ldots$$

Hat man an Stelle von B den conjungirten Punkt B[1] zu betrachten, so tritt für G der Punkt G_1 ein, welcher ihn von MM_1 auf dem Kegelschnitt harmonisch trennt; für N und N_1 treten die durch sie harmonisch von MM_1 getrennten Punkte N' und N_1' ein.

Für den Zusatz muſs angenommen werden, daſs zwei Geraden ihrer ganzen Ausdehnung nach einander nahe liegen, und also auf irgend einer dritten benachbarte Punkte ausschneiden, wenn irgend zwei Punkten LM der einen zwei Punkte $L'M'$ der anderen genügend genähert werden. Um keine Ausnahme aufkommen zu lassen, muſs noch angenommen werden, daſs sehr ferne Punkte einer Geraden sich ihrem unendlich fernen Punkte nähern.

Aus der Annahme folgt unmittelbar, daſs je zwei entsprechende Punkte zweier projectivischer Reihen desselben Trägers einander nahe liegen müssen, wenn irgend drei Punkten der ersteren ihre entsprechenden genügend genähert sind. Denn das Geradengefüge, welches die erste Reihe mit einer dritten in projectivische Beziehung setzt, braucht nur wenig verschoben zu werden, um auch die zweite Reihe zu dieser in Beziehung zu bringen. Daher schlieſsen sich auch die Paare einer Involution stetig an

einander. Ist nämlich C bei B gelegen, und sind AA_1, BB_1, CC_1 drei ihrer Paare, so ist

$$AA_1BC_1 \overline{\wedge}\ A_1AB_1C \overline{\wedge}\ AA_1CB_1 \ .$$

Daher liegt auch C_1 bei B_1. Geht man jetzt bei der vorstehenden Construction von einem bei M auf dem Kegelschnitt gelegenen Punkte M'' aus, so treten auch an Stelle von G, H, M_1, F ihnen benachbarte Punkte G'', H'', M_1'', F''; E aber bleibt ungeändert. Von C aus projicirt sich $M''H''M_1''G''$ in die MNM_1N_1 benachbarte und zu ihm projectivische Darstellung $M'N'M_1'N_1'$.

§ 2b. Eine Gerade aba_1b_1 geht durch einen Punkt ABA_1B_1, wenn die Strahleninvolution der Schein der Punktinvolution ist, überdies aber der Sinn ABA_1 mit dem Sinne $\mathfrak{a}$ (aba_1) übereinstimmt[3]. Zwei Punkte lassen sich stets durch e i n e Gerade verbinden, zwei Geraden haben stets einen Punkt gemeinsam[4].

Haben zwei imaginäre Punkte A und B zwei verschiedene Träger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit dem Schnittpunkt C, so gehört zu jeder Darstellung CAC_1A_1 von A eine projectivische $CA'C_1'A_1'$ von B. AA', CC_1', A_1A_1' gehen durch einen Punkt O. Bezeichnet man diese Geraden mit a, c_1, a_1, die Gerade OC aber mit c, so ist cac_1a_1 die gesuchte Gerade, und keine andere als diese genügt der gestellten Aufgabe. Sollten die imaginären Punkte demselben Träger angehören, so verbindet sie allein dieser. Einen reellen Punkt C mit einem imaginären ABA_1B_1 verbindet nur die imaginäre Gerade CA; CB; CA_1; CB_1. Vermöge des Reciprocitätsgesetzes folgt aus dem soeben Entwickelten, dafs zwei beliebige reelle oder imaginäre Geraden sich stets in einem bestimmten Punkt schneiden.

§ 3. Wir bezeichnen als einförmige Gebilde die Gesammtheit der Strahlen eines Büschels oder der Punkte einer reellen oder imaginären Geraden. Beide Gebilde sind perspectivisch, wenn jeder Strahl des Büschels den entsprechenden Punkt der Geraden enthält. Zwei einförmige, gleichartige oder ungleichartige Gebilde sind projectivisch, wenn sie Anfangs- und Endglieder einer Reihe von Gebilden sind, von denen je zwei auf einander folgende perspectivisch sind. Wir bedienen uns des Hülfsmittels der reellen Repräsentation der imaginären Elemente. Ein Strahlbüschel

mit imaginärem Centrum kann durch die reellen Punkte seiner Ebene repräsentirt werden; nämlich jeder fixirt eindeutig den imaginären Strahl, welchem er angehört. Ebenso kann man den Punkt einer imaginären Geraden durch seinen Träger, ihre Gesammtheit durch die reellen Geraden der Ebene darstellen. Um die Punkte einer reellen Geraden oder die Geraden eines Strahlbüschels mit reellem Centrum festzulegen, projicirt man erstere von einem imaginären Centrum aus, und schneidet letztere durch eine imaginäre Gerade. Das imaginäre Element eines der ersteren Gebilde wird dann durch den reellen Träger des entsprechenden Elementes in dem zugehörigen zweiten Gebilde eindeutig fixirt[5].

Zur Klarlegung der allgemeinen projectivischen Beziehung haben wir den Zusammenhang unter den reellen Gebilden der Ebene festzustellen, die ein Strahlbüschel und eine dazu perspectivische Gerade repräsentiren. Dabei sind die vier Fälle zu unterscheiden, dafs nur das Centrum oder nur die Gerade imaginär ist, oder dafs beide es sind, oder dafs endlich beide reell sind. Wegen der Repräsentation einer Punktreihe mit reellem Träger handelt es sich im ersten Falle um zwei Strahlbüschel mit den imaginären Centren A und B, die zu derselben reellen Geraden perspectivisch sind. Das zweite Problem aber nimmt die zu jener duale Gestalt an.

In den Repräsentationsebenen zweier projectivischer Gebilde sind die Hauptelemente zu beachten. Alle reellen Punkte des Trägers eines imaginären Grundpunktes bestimmen nur diese eine von ihm ausgehende Gerade und also auch nur ein Element des repräsentirten Gebildes. Allen diesen Punkten entspricht nur ein Element, das Hauptelement der zweiten Repräsentationsebene, während den Punkten aller anderen Geraden einfache Mannigfaltigkeiten zugehören. Dient eine imaginäre Gerade zur Repräsentation des ersten Gebildes, so bestimmen alle durch ihren reellen Punkt gehenden Geraden ein Element desselben. Ihnen allen gehört daher nur ein Element, das Hauptelement der zweiten Repräsentationsebene zu. Natürlich giebt es auch in der ersten Ebene ein Hauptelement.

§ 4. Hülfssatz. Die Linien, welche irgend zwei feste Punkte E, E_1 mit den Punktepaaren AA_1, BB_1, CC_1 ... einer gegebenen Involution verbinden, schneiden sich auf dem Kegelschnitt, für den die Paare

der Involution, sowie ihr Träger und EE_1 einander conjugirt sind, und der überdies E und E_1 enthält[6].

Sicher giebt es einen Kegelschnitt, welcher der zweiten Hälfte des Satzes genügt. AA_1 und seine beiden Tangenten in E und E_1 verbinden drei Paare für ihn conjugirter Punkte der beiden Seiten AE und A_1E_1. Alle drei schneiden sich, weil EE_1 und AA_1 in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt sind, in einem Punkte von AA_1. Daher sind die immer projectivischen Reihen conjugirter Punkte auf AE und A_1E_1 speciell perspectivisch. Ihr Kreuzungspunkt gehört mithin, als sich selbst conjugirt, dem Kegelschnitt an. Derselbe enthält die reellen oder conjungirt imaginären Ordnungselemente der Involution AA_1, BB_1, CC_1.

§ 5. Als Ketten einer Repräsentationsebene werden die Kegelschnitte bezeichnet, welche den Grundpunkt und seinen conjungirten enthalten, resp. den Grundstrahl und dessen conjungirten berühren. Im ersten Falle ist die Kette eine Orts-, im zweiten Falle eine Hüllcurve. Durch irgend drei reelle Punkte einer Punkt-Repräsentationsebene kann man stets e i n e Kette derselben legen. Der Träger des Grundpunktes kann dabei wie ein Punkt behandelt werden. Wenn man den vorigen die Punkte $A'B'C'$ unbegrenzt nähert, so rückt jeder einzelne Punkt D' der Kette $A'B'C'$ an irgend einen Punkt der Kette ABC heran.

Es mögen AB und AC den Träger $\mathfrak{a}$ des Grundpunktes A resp. in P und Q treffen. Es sei PQP_1Q_1 eine Darstellung desselben und A_1 der Schnittpunkt von BP_1 und CQ_1. Dann erfüllt nur der Kegelschnitt, für den die Paare der Involution PP_1, QQ_1, ferner ihr Träger und AA_1 einander conjugirt sind, und der AA_1 enthält, die gestellten Bedingungen (§ 4)[7]. Der Träger $\mathfrak{a}$ des Grundpunktes bestimmt mit irgend zwei Punkten A und B eine Kette, die aus $\mathfrak{a}$ und AB besteht. Zwei verschiedene Ketten können daher höchstens zwei Punkte aufserhalb $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}$ und einen Punkt aufserhalb $\mathfrak{a}$ gemeinsam haben.

Man beziehe auf die Kette $A'B'C'$ überhaupt die gestrichenen Buchstaben. Dann mufs (§ 2a) P' bei P, Q' bei Q gelegen sein, folglich auch P_1' bei P_1 und Q_1' bei Q_1. Der Schnittpunkt A_1' von $B'P_1'$ und $C'Q_1'$ liegt daher um so näher bei A_1, je weiter A', B', C' an A, B, C heranrücken. Ist nun RR_1 ein beliebiges Paar der Involution von A, so

schneiden sich AR und A_1R_1 in einem Punkte D der Kette ABC, $A'R$ und $A_1'R_1$ in einem bei jenem gelegenen Punkte D' der Kette $A'B'C'$. Die Tangenten der beiden Ketten in A und A' liegen einander nahe, denn sie führen nach den benachbarten Punkten von $\mathfrak{a}$, die zu den Schnittpunkten von AA_1 und $A'A_1'$ in der Involution A conjugirt sind.

§ 6. Es sei MNM_1N_1 eine Darstellung eines beliebigen imaginären Punktes B, und A ein beliebiger Grundpunkt auf irgend einer anderen Geraden. Die beiden Ketten, welche die Punkte MM_1 und NN_1 enthalten und für die $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ einander conjugirt sind, schneiden sich in den reellen Punkten F und F' der Geraden AB und AB¹. Durch dieselben gehen auch alle anderen Ketten, für die $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander conjugirt sind und die zwei hinsichtlich B conjugirte Punkte enthalten[8].

Zwei imaginäre Punkte A und A_1 werden einander genähert, indem ihre Träger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ und die Punkte MNM_1N_1 und $M'N'M_1'N_1'$ zweier Darstellungen derselben einander einzeln genähert werden. Zwei Geraden α und α_1 liegen einander nahe, wenn ihre Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sowie zwei Darstellungen aba_1b_1 und $a'b'a_1'b_1'$ einander nahe liegen. Die Gerade B_1A_1 liegt bei BA, wenn A_1 und B_1 genügend nahe bei A und B liegen. Auf jeder dritten Geraden bestimmen AB und A_1B_1 benachbarte Punkte.

Von allen Punkten des ersten Kegelschnittes aus wird MM_1 in ein Punktepaar der Involution A projicirt. Im Punkte C_1, welcher in ihr dem Schnittpunkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zugehört, treffen sich mithin seine Tangenten in M und M_1; er ist daher der Pol des Kegelschnittes bezüglich $\mathfrak{b}$. Von jedem Punkte des zweiten Kegelschnittes aus wird NN_1 in ein Paar der A zugehörigen Involution projicirt. Auch für diesen Kegelschnitt ist C_1 der Pol von $\mathfrak{b}$. Da nun MM_1 durch NN_1 getrennt werden, treffen sich die Kegelschnitte in zwei reellen Punkten F und F_1. Sie liegen mit C_1 auf einer Geraden und werden durch C_1 und $\mathfrak{b}$, also auch durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ harmonisch getrennt. Von beiden Punkten aus werden MM_1 und NN_1 in Paare der Involution von A projicirt. Die Geraden, welche sie mit A verbinden, gehen also durch B selbst oder durch seinen conjungirten B¹. Welcher von beiden der gesuchte Repräsentant von B hinsichtlich A ist, hängt allein von dem Sinn ab, in dem ersterer beschrieben ist. Zwei Seiten eines Dreiecks PC und CR, die auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gelegen sind, und deren

gemeinschaftlicher Grenzpunkt C (oder $\mathfrak{ab}$) als Endpunkt der einen und als Anfangspunkt der anderen betrachtet wird, sind in Hinsicht auf einen Punkt S, welcher in keiner der beiden Geraden liegt, in einem und demselben oder in entgegengesetztem Sinne beschrieben, je nach dem die Gerade SC den Umfang des Dreiecks in C schneidet oder berührt[9]. Wenn nun PC und CR die Sinne der Punkte B und A darstellen, FC das Dreieck PCR schneidet und F_1C es berührt, so ist F der reelle Punkt von AB, und F_1 derjenige von AB[1]. Von beiden Punkten aus werden die Involutionen A und B in einander projicirt. Alle Ketten A, die zwei hinsichtlich B conjugirte Punkte enthalten und C_1 zum Pol von $\mathfrak{b}$ haben, gehen daher durch F und F_1.

Tritt an Stelle von B oder MNM_1N_1 der nahe gelegene Punkt B_1 oder $M'N'M_1'N_1'$ (wo nicht $MNM_1N_1 \,\overline{\wedge}\, M'N'M_1'N_1'$ vorausgesetzt wird), so ist zuerst die Kette, die in M und M_1 MC_1 und M_1C_1 berührt, durch die zu ersetzen, welche in $M'M_1'$ die Geraden $M'C_1'$ und $M_1'C_1'$ berührt. Da nun C_1' mit dem Schnittpunkt $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}$ ein Paar der Involution A bildet, $\mathfrak{b}'$ aber bei $\mathfrak{b}$ liegt, so ist auch (§ 2a) C_1' bei C_1 und folglich $M'C_1'$ bei MC_1 gelegen. Die beiden zu B_1 gehörenden Ketten liegen daher den zu B gehörenden nahe (§ 5), ihre Schnittpunkte F' und F_1' also bei F und F_1. F' liegt auf der Geraden B_1A. Aus jeder Darstellung von A fliefsen zwei projectivische und einander nahe gelegene Darstellungen der Punkte B und B_1, sowie der Geraden FA (oder BA) und F'A (oder B_1A) ab. Durch zweimalige Anwendung des Bewiesenen folgt, dafs B_1A_1 bei BA liegt, wenn auch A_1 in der Nähe von A gelegen ist. Bei Durchführung der dualen Betrachtungsweise ergiebt sich, dafs zwei einander nahe liegende Geraden auf irgend einer dritten benachbarte Punkte bestimmen.

§§ 7—9. Wird eine reelle Gerade c, welche zu einem Strahlbüschel mit imaginärem Centrum A perspectivisch ist, von einem zweiten B aus repräsentirt, so entspricht jeder Kette der ersten eine zu ihr perspectivische Kette der zweiten Ebene. Einem Kettenbüschel A_1A_2 entspricht ein projectivisches B_1B_2 der zweiten Ebene. In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln A_1, A_2, B_1, B_2 gehören reelle Darstellungen der imaginären Strahlen A_1A; A_2A[1]; B_1B; B_2B[1] und also diese selbst einander zu[10].

Den Strahlen durch den Hauptpunkt J_1 der ersten Ebene entsprechen projectivisch Geraden, die durch den Hauptpunkt J_2 der zweiten gehen. Die beiden Strahlbüschel J_1 und J_2 sind reell-projectivisch so bezogen, dafs die imaginären Strahlen J_1A und J_2B[1] einander entsprechen.

Anm. In diesem besonderen Fall ist B oder $\mathfrak{bc}$ der Hauptpunkt der ersten, A oder $\mathfrak{ac}$ derjenige der zweiten Ebene.

§ 7. Vorbereitende Bemerkungen.

Alle Punkte Γ der reellen Geraden $\mathfrak{c}$ mit einerlei Richtungssinn haben ihre repräsentirenden Punkte in Bezug auf A in einem bestimmten Strahlenwinkel $\mathfrak{ca}$ und in Bezug auf B in einem bestimmten Strahlenwinkel $\mathfrak{cb}$ (§ 6). Diese von vorn herein bestimmbaren beiden Strahlenwinkel werden somit auf einander bezogen, und ebenso die beiden anderen. Die Punkte der Geraden $\mathfrak{c}$ entsprechen sich selbst. Der Schnittpunkt A von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ wird hinsichtlich B nur durch sich selbst, dagegen von A aus durch jeden Punkt der Geraden $\mathfrak{a}$ repräsentirt und ist daher (§ 3) der Hauptpunkt der Ebene B; ebenso ist der Schnittpunkt B von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Hauptpunkt der Ebene A. Alle Punkte Γ des Trägers $\mathfrak{c}$, zu deren Darstellung das Paar HH_1 gehört, werden in Bezug auf die Punkte A und B durch reelle Punkte der Ketten HH_1 repräsentirt, für welche $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, einander conjugirt sind. Derartige Ketten werden punktweise einander zugeordnet. Strahlen, welche von dem Punkte A_1 ausgehen, der mit A ein Paar der Involution A bildet, entsprechen Kegelschnitte der B-Ebene, die durch A und ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{c}$ gehen, und für die $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ einander conjugirt sind. Jede der betrachteten Ketten wird durch die Punkte H und H_1 in zwei ganz in dem einen oder anderen Strahlenwinkel $\mathfrak{ca}$ resp. $\mathfrak{ba}$ gelegene Bögen getheilt. Gehören also zwei Punkte der ersten Ebene demselben Bogen HH_1 der besonderen Kette der A-Ebene an, so gehören auch die entsprechenden demselben Bogen HH_1 der zugehörigen besonderen Kette der B-Ebene an.

§ 8. Die Strahlen der Winkel $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ac}$ gehören einander in den Ebenen A und B zu. Es seien AA_1 und BB_1 Paare der Involutionen A

und B. Irgend ein Punkt Γ der Geraden c läfst sich in einer der wesentlich verschiedenen Formen

$$AHGB \qquad \text{oder} \qquad ABGH$$

darstellen, unter AG und HB Paare seiner Involution verstanden. Mit der ersten Form, die wir behandeln, kommt die Darstellung $BAHG$ überein, denn sie stützt sich auf dieselben Paare, wie die erste und stimmt mit ihr, was dem Sinn anbelangt, überein. Es repräsentire E den Punkt Γ hinsichtlich A, und F hinsichtlich B. EH und EB einerseits, FA und FG andererseits müssen dann Paare CC_1 und DD_1 der Involutionen von A und B ausschneiden. ACA_1C_1 und BDB_1D_1 sind auch dem Sinne nach richtige Darstellungen derselben. Ferner ist

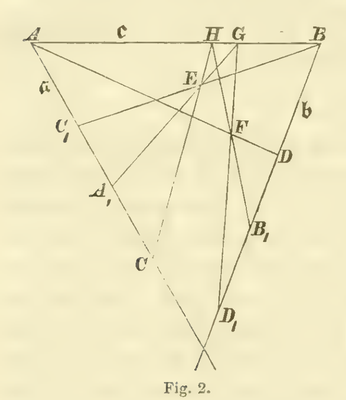


Fig. 2.

$$ACA_1C_1 \;\overline{\wedge}\; AHGB \quad \text{und} \quad BAHG \;\overline{\wedge}\; BDB_1D_1 \;.$$

Da selbstverständlich

$$AHGB \;\overline{\wedge}\; BGHA$$

ist, so ergiebt sich

$$ACA_1C_1 \;\overline{\wedge}\; BD_1B_1D \;.$$

Auf dasselbe Resultat kommt man, wenn Γ die Darstellung $ABGH$ und die synonyme $BGHA$ besitzt. BD_1B_1D ist eine Darstellung des zu B conjungirten Punktes B¹ und zwar die einzige, die von BB_1 ausgeht und zu der Darstellung ACA_1C_1 des Punktes A projectivisch ist. Ändert sich E auf der Geraden BC_1, so bewegt sich F projectivisch auf der Geraden AD. Denn CEH dreht sich um C, B_1FH aber um B_1. C_1 und A, sowie B und D entsprechen einander. Den von B ausgehenden Geraden der ersten Ebene entsprechen also projectivisch in der zweiten Ebene durch A gehende Strahlen. Die Büschel B und A sind so projectivisch, dafs jeder von BA ausgehenden Darstellung von BA eine von AB ausgehende Darstellung von AB¹ zugehört.

§ 9. Wir führen nun collinear zur Ebene B eine Hülfsebene A_1 ein. Der Wurf ACA_1C_1 derselben kann nach § 8 zu BD_1B_1D von B entsprechend gesetzt werden, also dem imaginären Punkt A der Hülfsebene der imaginäre Punkt B^1 der zweiten, jeder von AA_1 ausgehenden Darstellung des ersteren die von BB_1 ausgehende und projectivische Darstellung des letzteren. Entspricht noch dem Punkte A der zweiten Ebene der Punkt B der Hülfsebene, so gehört jeder Geraden AD_1 der Ebene B die Gerade BC in beiden Ebenen A und A_1 zu. Nach § 8 entstehen auf jedem Strahl BC in den letzteren Ebenen projectivische Reihen. Den Punkten B und C von A gehören in der Ebene B D_1 und A und folglich in der Ebene A_1 C und B zu, weshalb die Reihen in A und A_1 speciell involutorisch sind. Allen Punkten der Geraden $\mathfrak{a}$ entspricht je in der anderen Ebene der Punkt B.

Um die collineare Beziehung zwischen den Ebenen B und A_1 endgültig festzulegen, können noch, da die Gerade AB ihnen gemein ist, und AB einander wechselseitig entsprechen, zwei beliebige Punkte GH derselben einander zugeordnet werden. $AHGB$ soll die Darstellung eines imaginären Punktes Γ sein. Je zwei entsprechende Punkte von B und A_1 auf AB bilden ein Paar der hyperbolischen Involution AB, GH. Dasselbe gilt, da die Ebenen B und A die Gerade AB entsprechend gemein haben, auch von den Ebenen A und A_1. Die Ordnungspunkte J und J_1 dieser Involution sind allen drei Ebenen entsprechend gemein. Auch der Repräsentant E der Ebene A des besonderen imaginären Punktes $AHGB$ ist den Ebenen A und A_1 entsprechend gemein. In der Ebene B entspricht ihm der Punkt F der Figur 2. Zu den Strahlen B_1H und GD_1 von B, die sich in F kreuzen, gehören in A_1 die Geraden A_1G und CH, die sich in E treffen.

Jeder Kette von B entspricht eine Kette von A_1. Sind in Bezug auf erstere $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ einander conjugirt, so sind für die letztere $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ conjugirt. Der ersteren gehört aber dann auch in der Ebene A eine Kette zu, für die $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ conjugirt sind. Jeder solchen Kette von A entspricht also eine Kette derselben Art in A_1. Den beiden Schnittpunkten der ersteren mit $\mathfrak{c}$ entsprechen in der letzteren die von jenen durch J und J_1 harmonisch getrennten Punkte. Die bestimmte Kette K, welche J und J_1 enthält, für die überdies B der Pol von $\mathfrak{a}$ ist, ist beiden

Ebenen A und A_1 gemeinsam. Da B auf JJ_1 und innerhalb K liegt, so schneidet eine von ihm ausgehende Gerade jeden der Bögen JJ_1 einmal. Nach § 8 entsprechen entweder beide Punkte sich selbst oder einander wechselseitig. Da J und J_1 sich selbst entsprechen, müssen nach Art. 7 entweder alle Punkte von K sich selbst oder je zwei mit B in gerader Linie befindliche Punkte L und L_1 einander entsprechen. Da im letzteren Fall die beiden verschiedenen Bögen LL_1 von K und mithin auch J und J_1 einander wechselseitig entsprechen würden, so ist der zweite Fall ausgeschlossen. K enthält die Ordnungselemente aller der involutorischen Reihen, in welchen auf den von B ausgehenden Geraden die entsprechenden Punkte von A und A_1 angeordnet liegen. Je zwei entsprechende Punkte sind daher mit einander hinsichtlich K conjugirt, überdies aber mit B, seinem Pol bezüglich $\mathfrak{a}$, in gerader Linie gelegen. Die Beziehung ist eine wechselseitige und ordnet, wie wir schon früher sahen, den Pol B und sämmtliche Punkte von $\mathfrak{a}$ einander zu[11]. Keine durch den Punkt B gehende Gerade geniefst einen Vorzug vor der anderen. Alle Eigenschaften also, bei denen eine von ihnen eine Sonderstellung einnimmt, fahren fort zu gelten, wenn statt ihrer eine beliebige von B ausgehende Gerade eintritt. Jede Kette, deren Pol bezüglich $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{c}$ liegt, geht aber in eine Kette mit derselben Eigenschaft über. Also entspricht jeder beliebigen Kette von A in A_1 eine andere und beider Pole bezüglich $\mathfrak{a}$ liegen mit B in einer Geraden. Eine durch A_1 gehende Gerade geht in eine Kette über, die in B die Gerade BA_1 berührt; es entsteht nun aus jeder Geraden l eine Kette, die B enthält; ihre Tangente in diesem Punkte führt nach dem Schnittpunkt $l\mathfrak{a}$.

Einem durch zwei beliebige reelle und getrennte Punkte gelegten Kettenbüschel entspricht das durch die beiden entsprechenden Punkte gehende Kettenbüschel. Einem Büschel in einem reellen Punkte sich berührender Ketten entspricht in A_1 ein Büschel von Ketten, die einander in dem entsprechenden Punkte berühren. Schnitten sich irgend zwei der letzteren in zwei Punkten, so müfsten auch die beiden, aus denen sie entstehen, sich in zwei Punkten schneiden.

Eine Kette ist, jedoch nicht entsprechend, den Feldern A und A_1 gemeinsam, sobald sie zwei einander entsprechende Punkte L und L_1 enthält. Denn sie hat mit ihrer zugehörigen aufser L und L_1 auch die

beiden Punkte M und N gemeinsam, in denen sie, weil L und L_1 durch K getrennt werden, diesen Kegelschnitt treffen mufs. Die beiden entsprechenden Ketten fallen also nach § 5 zusammen, enthalten aber aufser M und N keine entsprechend gemeinen Punkte. Die durch irgend zwei Punkte E und F gehenden Ketten mit dem Grundpunkt A haben dieselbe Polare bezüglich des Schnittpunktes R von $\mathfrak{a}$ und EF; erstens geht sie durch den harmonisch von EF durch R getrennten Punkt und zweitens durch den Punkt R_1, der mit R ein Paar der Involution A bildet. Die Tangenten einer jeden Kette in E und F treffen sich auf dieser Geraden und trennen daher R und R_1 harmonisch. Bilden zwei der ersteren eine von RR_1 ausgehende Darstellung des Strahles $E\mathrm{A}$, so ergeben (§ 2a) die letzteren die projectivische von RR_1 ausgehende Darstellung von $F\mathrm{A}^1$. Die beiden Tangentenbüschel sind daher so reell-perspectivisch, dafs die imaginären Strahlen $E\mathrm{A}$ und $F\mathrm{A}^1$ einander zugehören.

Es seien nun $A_1 A_2$ und $A_1' A_2'$ entsprechende Kettenbüschel der Ebenen A und A_1. Eine Kette $A_1 A_1'$, die in A_1 einer Kette des ersteren Büschels sich anschliefst, mufs in A_1' von selbst die entsprechende Kette berühren. Die Tangentenbüschel in A_1 und A_1' sind daher so bezogen, dafs $A_1\mathrm{A}$ und $A_1'\mathrm{A}^1$ einander zugehören. Aus dem Vorhergehenden ist klar, dafs auf beide Büschel die in A_2 und A_2' so bezogen sind, dafs jenen Strahlen $A_2\mathrm{A}^1$ und $A_2'\mathrm{A}$ zugehören.

Zwei einander entsprechende Ketten K_1 und K_1' der Ebenen A und A_1 sind projectivisch auf einander bezogen. Sie mögen von den Strahlen des Büschels B in den Paaren $A_1 C_1$; $A_2 C_2$; $A_3 C_3 \ldots$ und $A_1' C_1'$; $A_2' C_2'$; $A_3' C_3' \ldots$ getroffen werden. Da alsdann

$$A_1 A_2 A_3 \ldots \barwedge C_1 C_2 C_3 \ldots \quad \text{und} \quad A_1' A_2' A_3' \ldots \barwedge C_1' C_2' C_3' \ldots$$

ist, so genügt es zu zeigen, dafs

$$C_1 C_2 C_3 \ldots \barwedge A_1' A_2' A_3' \ldots$$

ist. Die Tangenten der Ketten K_1 und K_1' in A_1 und C_1' sowie in C_1 und A_1' treffen sich auf $\mathfrak{a}$. Denn die Tangentenbüschel in A_1 und C_1' der Kettenbüschel $A_1 C_1$ und $A_1' C_1'$ sind so bezogen, dafs Darstellungen von $A_1\mathrm{A}$ und $C_1'\mathrm{A}$ einander zugehören. Da nun $A_1 C_1$, $\mathfrak{a}$ eine beiden Büschel gemeinsame Kette ist, so sind die Tangentenbüschel perspectivisch und je zwei entsprechende schneiden sich auf $\mathfrak{a}$. Setzt man nun in zwei col-

linearen Ebenen B und die Punkte $\mathfrak{A}_\lambda$ von $\mathfrak{a}$ sich selbst und $A_1 C_1'$ einander entsprechend, so gehören auch $C_1 A_1'$ einander zu. Denn allgemein ist

$$BA_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{A}_\lambda A_\lambda' C_\lambda' B \;,$$

und daher

$$BA_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \;\overline{\wedge}\; BC_\lambda' A_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda \;.$$

Der Kette K_1 entspricht mithin collinear eine andere, die C_1' und A_1' enthält, und deren Tangenten in C_1' und A_1' sich mit denen von K_1 in A_1 und C_1 auf $\mathfrak{a}$ schneiden. Diese Bedingungen erfüllt K_1', und nach § 5 nur diese Kette. Der Reihe $C_1 C_2 C_3$ auf K_1 entspricht daher eine projectivische Reihe auf K_1', deren einzelne Punkte mit jenen und B in gerader Linie liegen. Ist nun nicht immer neben

$$BA_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \;\overline{\wedge}\; BC_\lambda' A_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda \quad \text{auch} \quad BA_\lambda C_\lambda \mathfrak{A}_\lambda \;\overline{\wedge}\; BA_\lambda' C_\lambda' \mathfrak{A}_\lambda \;,$$

so kann dies nur die Reihe $A_1' A_2' A_3' \ldots$ sein und dann ist auch

$$C_1 C_2 C_3 A_1 A_2 A_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; C_1' C_2' C_3' A_1' A_2' A_3' \ldots$$

Bestehen aber beide Beziehungen gleichzeitig, so werden $A_\lambda' C_\lambda'$ durch B und $\mathfrak{A}_\lambda$ harmonisch getrennt; K_1 und K_1' haben daher beide hinsichtlich $\mathfrak{a}$ den Pol B. In diesem Fall entsprechen die Kegelschnitt-Reihen $C_1 C_2 C_3 \ldots$ und $C_1' C_2' C_3'$ einander collinear in den Feldern, die B und $\mathfrak{a}$ entsprechend gemein haben und in denen C_1 und C_1' einander zugehören. In den collinearen Gebilden werden je zwei entsprechende Punkte nicht getrennt durch B und den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinien mit $\mathfrak{a}$. Diese Bedingung aber erfüllen nur C_λ und C_λ', nicht aber C_λ und A_λ'. Da jede Gerade der Ebene A und ihre entsprechende durch B gehende Kette der Ebene A_1 zu demselben Strahlbüschel B perspectivisch sind, so sind auch diese Gebilde zu einander projectivisch.

Statt der Ebene A_1 wird rückwärts die collineare Ebene B eingeführt. Da A und B^1, sowie B und A homologe Punkte derselben sind, so entspricht zunächst jeder Kette von A_1, also auch von A, eine projectivische Kette von B, einer Geraden von A_1 und also einer durch B gehenden Kette von A eine projectivische Gerade in B, endlich einer durch B gehenden Kette in A_1 und folglich einer Geraden in A eine durch A gehende projectivische Kette von B. Ferner sind projectivische Kettenbüschel $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$, $B_1 B_2$ homologe Elemente der drei Ebenen A, A_1,

B; da in den Tangentenbüscheln der letzteren die Strahlen A'_1A¹ und B_1B, sowie A'_2A und B_2B¹ einander zugehören, so sind die vier Tangentenbüschel A_1, A_2, B_1, B_2 in der Art reell-projectivisch, dafs A_1A, A_2A¹, B_1B, B_2B¹ einander entsprechen. Damit ist der dem § 7 vorangestellte Satz völlig bewiesen, da das über die Hauptpunkte Gesagte bereits im § 8 bestätigt war.

§ 10. Wird ein Strahlbüschel mit reellem Centrum C, welches zu einer imaginären Geraden α perspectivisch ist, mit Hülfe einer zweiten imaginären Geraden β repräsentirt, so entsprechen den Tangenten einer Kette der Ebene α projectivisch die Tangenten einer Kette der Ebene β, Ketten-Schaaren $a_1 a_2$ der ersteren projectivische $b_1 b_2$ der zweiten Ebene, und zwar gehören in den reell-projectivischen Reihen der Berührungspunkte auf a_1, a_2 und b_1, b_2 die imaginären Punkte $a_1\alpha$, $a_2\alpha^1$, $b_1\beta$, $b_2\beta^1$ einander zu. Den Strahlbüscheln der Ebene α, zu denen ihr Hauptstrahl gehört, entsprechen auch in der zweiten Ebene Strahlbüschel, zu denen der Hauptstrahl derselben gehört. Die Reihen der Centren auf den beiden Hauptstrahlen sind so reell-projectivisch, dafs Schnitte von α und β' einander entsprechen.

Anm. Die Hauptstrahlen der Ebenen α und β sind in diesem Falle $C\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{A}$.

Der Satz folgt aus dem vorigen vermöge des Gesetzes der Reciprocität.

§ 11. Wenn ein Strahlbüschel mit reellem Centrum C von der imaginären Geraden β aus, und eine zu ihr perspectivische reelle Gerade c von einem imaginären Punkt A aus repräsentirt wird, so entsprechen den Tangenten einer Kette der Ebene β projectivisch die Punkte einer Kette der Ebene A. Einer Schaar der ersteren mit den reellen Grundstrahlen b_1 und b_2 entspricht ein Kettenbüschel, dessen reelle Grundpunkte A_1, A_2 jenen zugehören. Die Reihen der Berührungspunkte auf jenen und die Tangentenbüschel in diesen sind so reell-projectivisch, dafs die imaginären Punkte und Geraden $b_1\beta$, $b_2\beta^1$, A_1A und A_2A¹ einander zugehören. Strahlbüschel der β-Ebene, denen ihr Hauptstrahl i_1 angehört, entsprechen Punktreihen, denen der Hauptpunkt J_2 der zweiten Ebene angehört. Die Reihe der Centren und das Büschel der Träger sind so projectivisch, dafs Darstellungen von $i_1\beta$ und J_2A¹ einander entsprechen.

Man beziehe die Ebene der reellen Geraden c und des sie repräsentirenden Punktes A reciprok so auf eine Hülfsebene α, dafs den Punkten von c ihre Verbindungslinien mit C entsprechen, im Übrigen aber die Reciprocität ganz willkürlich ist. Dem imaginären Punkte A entspricht eine imaginäre Gerade α. An die Stelle eines imaginären Punktes von c tritt seine Verbindungslinie mit C, seinem repräsentirenden Punkt aber entspricht der Träger des Schnittpunktes der letzteren mit α. Zwischen den Ebenen α und β besteht die Beziehung des § 10, denn zwei imaginäre Geraden sind in Bezug auf einen reellen Punkt perspectivisch. Ihre Combination mit der reciproken Beziehung der Ebenen A und α ergiebt den Lehrsatz.

§§ 12—14. Unter den Repräsentationsebenen einer imaginären Geraden β und eines zu ihr perspectivischen Strahlbüschels mit imaginärem Centrum A besteht die Beziehung des § 11; nur ist der reelle Punkt $\mathfrak{B}$ von β der Hauptpunkt der Ebene A und der reelle Träger $\mathfrak{a}$ des letzteren der Hauptstrahl der Ebene β.

§ 12. Den von $\mathfrak{B}$ ausgehenden Geraden der Ebene A entsprechen Strahlbüschel mit dem Centrum auf $\mathfrak{a}$.

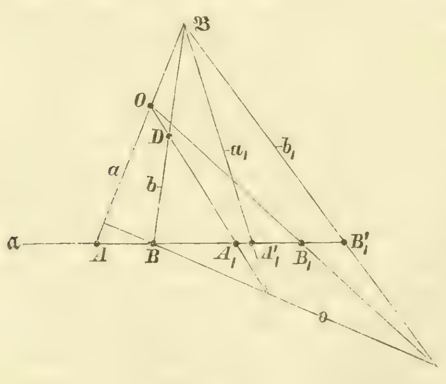


Fig. 3.

Sämmtlichen von $\mathfrak{B}$ ausgehenden Strahlen von β entspricht der einzige Punkt $\mathfrak{B}$ der Ebene A, allen Punkten der letzteren von $\mathfrak{a}$ die einzige Gerade $\mathfrak{a}$ der Ebene β. Bezieht man das Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ und die Punktreihe $\mathfrak{a}$ so auf einander, dafs Darstellungen von β und A, sowie die in einander liegenden Elemente a und A einander zugehören, so liegen noch zwei andere entsprechende Elemente b und B in einander und es sind dann (Fig. 3)

$$a b a_1 b_1 \qquad \text{und} \qquad A B A_1 B_1$$

projectivische Darstellungen von β und $\mathfrak{A}$. Einem beliebigen Punkte O des Strahles a gehört die Gerade zu, welche zu aba_1b_1 und $O\,(ABA_1B_1)$ zugleich perspectivisch ist, und die sich daher zu O projectivisch um B dreht. Jedem Strahl a gehört ein Punkt B in dieser Art zu.

Es sei $ABA_1'B_1'$ die zu ABA_1B_1 projectivische Darstellung des Schnittpunktes $\mathfrak{B}$ von β und $\mathfrak{a}$. Für einen Hülfspunkt Γ aufserhalb $\mathfrak{a}$ mögen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die reellen Punkte P und Q repräsentirt werden. Da die beiden projectivischen Reihen $ABA_1B_1 \ldots \overline{\wedge}\; ABA_1'B_1' \ldots$ durch Anwendung nur reeller Hülfspunkte und Strahlen in einander übergeführt werden können, so folgt durch wiederholte Anwendung der §§ 7 und 11, dafs die Beziehung zwischen beiden Repräsentationsebenen durch § 7 geleistet wird. Jeder Kette AB der Ebene Γ mufs daher eine Kette AB zugehören. Die entsprechenden Reihen ABA_1B_1 und $ABA_1'B_1'$ liegen aber in derselben Kette und daher enthält jede Kette AB entsprechende Punkte; auf einer solchen liegen auch P und Q. Jedes Punktepaar AB wird mithin von einer reellen Kette PQ der Ebene Γ ausgeschnitten und gehört also einer bestimmten Involution J an. Eine der Ketten hat ihren Pol bezüglich $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{a}$ und schneidet in Folge dessen ein Paar aus, welches den drei Involutionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und J gemeinsam ist. Ein anderes Paar der Involution J wird durch PQ und $\mathfrak{c}$ ausgeschnitten. Gelangt A in den Punkt M, welcher in der Involution $\mathfrak{A}$ zum Schnittpunkt $\mathfrak{a}$, PQ gehört, so fällt B mit dem Punkte N zusammen, welcher mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ ein Paar der Involution $\mathfrak{B}$ bildet. PM und PQ nämlich (Fig. 4), sowie NM und NQ treffen $\mathfrak{c}$ in einem Punktepaar der Involution Γ, und daher (§ 4) liegen MN mit PQ in einer Kette der Ebene Γ. Da auch das gemeinschaftliche Paar der Involutionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der dritten J angehört, so entspricht jedem Paare der Involution $\mathfrak{B}$ in der A-Reihe ein Paar der Involution $\mathfrak{A}$ in der B-Reihe, jeder Darstellung von $\mathfrak{B}$ entweder eine solche von $\mathfrak{A}$ oder von $\mathfrak{A}^1$. P und Q liegen aber zu verschiedenen oder gleichen Seiten von $\mathfrak{a}$, je nachdem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschiedenen oder gleichen Sinnes sind. Im ersten Falle sind A und B

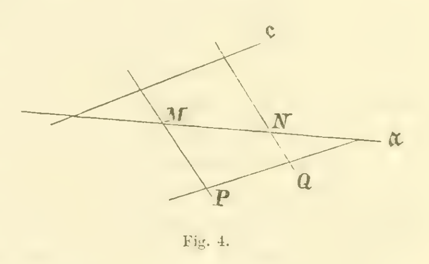


Fig. 4.

gleichläufig, im letzteren aber ungleichläufig. Daher entspricht der Punkt A¹ dem Punkte B. Die Geraden a der Ebene A sind also auf die Centren B der entsprechenden Strahlbüschel der Ebene β so bezogen, dafs den Strahlen $\mathfrak{B}$A und β der einen die Punkte $\mathfrak{a}\beta^1$ und A¹ der anderen entsprechen.

§ 13. Es giebt Geraden der Ebene A, denen die Tangenten einer Kette der Ebene β entsprechen. Sie berühren alle den Hauptstrahl $\mathfrak{a}$ der letzteren. Die Gerade OA_1 der Figur 3 (S. 32) ist eine solche. Dem Punkte O entspricht die Gerade o, der B; OA_1, a_1 und OB_1, b_1 angehören, dem Punkte A_1 aber die Gerade $\mathfrak{a}$. Dem Schnittpunkt D von OA_1 mit b gehört die Verbindungslinie von A mit o, a_1 zu. Denn es sind auch BA_1B_1A und ba_1b_1a projectivische Darstellungen der Elemente A und β und die gesuchte Gerade ist also zu $D(BA_1B_1A)$ und ba_1b_1a gleichzeitig perspectivisch. Durch den Schnittpunkt von DA_1 oder OA_1 mit a_1 geht aber auch o. Da auch A der Geraden angehört, so werden ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{a}$ und o von $\mathfrak{B}$ aus durch das Geradenpaar aa_1 projicirt. Ist nun der Satz richtig, so müssen die Geraden, welche Punkten von OA_1 entsprechen, auf $\mathfrak{a}$ und o projectivische Reihen ausschneiden und $\beta\beta^1$ die Doppelstrahlen der Büschel sein, die sie von $\mathfrak{B}$ aus projiciren. Da in letzteren a und a_1 einander entsprechen, so müssen auch alle anderen Paare der Involution β auf a und o zusammengehörige Punkte bestimmen.

Folgende Construction führt nach § 12 zu einem Paare zusammengehöriger Elemente. Es sei X ein Punkt von $\mathfrak{a}$. Es mögen x, y, z $\mathfrak{B}X$ zu Paaren der Involutionen β, $\mathfrak{B}$A, $\mathfrak{B}J$ ergänzen; Y und Z seien die Schnittpunkte y, $\mathfrak{a}$ und z, OA_1. Ist X_1 der Schnittpunkt von YZ mit x, so gehört XX_1 dem Punkte Z zu. Ist andererseits X' der Schnittpunkt von YZ mit o, so sind XX' und Z entsprechend, wenn X und X' von $\mathfrak{B}$ aus durch ein Paar der Involution β projicirt werden.

y und z bewegen sich involutorisch, und folglich Y und Z projectivisch zu $\mathfrak{B}X$. Der deshalb von YZ umhüllte Kegelschnitt mufs auch o berühren. Aus

$$ABA_1B_1 \;\overline{\wedge}\; ABA_1'B_1'$$

folgt auch

$$ABA_1B_1 \;\overline{\wedge}\; BAB_1'A_1' \;.$$

Da der letztere Wurf eine Darstellung von B′ ist, so sind (§ 12) auch

$A_1 B_1'$ und $B_1 A_1'$ zwei Paare der Involution J. Läfst man nun Z in den Schnittpunkt der drei Geraden o, $A_1 O$ und a_1 oder $\mathfrak{B} A_1'$ gelangen (§ 12), so mufs X mit B_1, Y mit B und YZ mit o zusammenfallen. Die Reihen X und X' sind daher zu einander projectivisch. Wir wissen bereits, dafs das Strahlenpaar $a a_1$ auf $\mathfrak{a}$ und o zwei zusammengehörige Punkte X und X' ausschneidet. Läfst man X nach B fallen, so geht Z in O, Y in B_1 über. OB_1 mufs sich mit b_1 (§ 12) auf o treffen. $b b_1$ schneidet daher ein zweites Paar XX' aus. Gelangt umgekehrt X nach B_1', so fällt Z mit A_1 zusammen, Y aber liegt irgendwo auf $\mathfrak{a}$. Beider Verbindungslinie $\mathfrak{a}$ trifft o in B. Somit werden drei Paare entsprechender Punkte XX' durch die Strahlenpaare $a a_1$, $b b_1$, $b_1 b$ der Involution β projicirt, jedes andere Paar derselben schneidet mithin die Punkte einer Tangente auf $\mathfrak{a}$ und o aus. Die Strahlen, die den Punkten der Geraden OA_1 zugehören, umhüllen eine Kette der Ebene β, welche von $\mathfrak{a}$ im Punkte B_1' berührt wird. Die Schnittpunkte (X) der Tangenten mit $\mathfrak{a}$ sind auf ihre entsprechenden Punkte mit Hülfe der Involution $\mathfrak{B} J$ bezogen.

§. 14. Man bezieht nun die Ebene β dergestalt reciprok auf eine Hülfsebene A_1, dafs die Träger $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{a}$ und die durch die Involution J vermittelten Darstellungen des Strahles β^1 und des Punktes A einander wechselseitig zugehören, dafs endlich dem Strahl o der Ebene β, wie in der Ebene A, auch in der Ebene A_1 der Punkt O entspricht. Paare entsprechender Punkte von A und A_1 liegen involutorisch angeordnet auf Geraden, die von $\mathfrak{B}$ ausgehen; diesem Punkte jeder Geraden entspricht ihr Schnittpunkt mit $\mathfrak{a}$. Der Geraden OA_1 gehört die Kette K_1 zu, welche O enthält und $\mathfrak{B} A_1$ in $\mathfrak{B}$ berührt. Die Beziehung zwischen den Ebenen A und A_1 ist vollständig bestimmt. Entspricht die Kette K punktweise sich selbst, welche den Punkt O enthält und $\mathfrak{B}$ zum Pole von $\mathfrak{a}$ hat, so ordnet die dann statthafte Beziehung der Ebenen A und A_1 des § 9 die Gerade OA_1 und die Kette K_1 einander zu und setzt überdies entsprechende Punktepaare der Geraden $\mathfrak{B}$ in Involution. Die neue Hülfsbeziehung deckt sich also mit der im § 9 ausführlich erläuterten. Indem man sie mit der reciproken Beziehung zwischen β und A_1 combinirt, erhält man unter den Repräsentations-Ebenen β und A den im § 11 angezeigten Zusammenhang.

§ 15. Bezieht man aus einer Reihe von abwechselnd Punkten und Geraden jedes folgende Glied perspectivisch auf das vorhergehende und repräsentirt man jedes einzelne Gebilde mit Hülfe eines imaginären Punktes oder einer imaginären Geraden, so gilt für je zwei auf einanderfolgende Repräsentations-Ebenen eine der in den §§ 7, 10 und 11 angegebenen Beziehungen. Auch für zwei in die allgemeinste projectivische Beziehung gesetzte einförmige Gebilde liefert daher einer dieser drei Sätze den Ausdruck. Sie lassen sich etwa in folgender Weise zusammenfassen: Werden zwei einförmige projectivische Gebilde von zwei imaginären Grundelementen (A und B) aus repräsentirt, so entspricht jeder Kette eine projectivische, jedem durch zwei Elemente (A_1 und A_2) der einen Ebene bestimmten einfachen System projectivisch das durch die zugehörigen Elemente (B_1 und B_2) bestimmte. Die Grundelemente bestimmen auf zwei entsprechenden der vier festen Elemente (A_1 und B_1) und ihre conjungirten auf den beiden übrigen homologe Gebilde (A_1A, A_2A^1, B_1B, B_2B^1). Die Hauptelemente gehören unendlich vielen Paaren entsprechender einförmiger Gebilde an. Die Träger derselben sind so projectivisch bezogen, dafs das erste Grundelement und das conjungirte zum zweiten homologe Elemente bestimmen.

Besonders einfach ist die Beziehung zwischen zwei Büscheln mit demselben Kreispunkt zum Centrum. Es entsprechen einander projectivische Kreise und Kreisbüschel. In den Tangentenbüscheln in entsprechenden Punkten gehören projectivische Darstellungen der Geraden einander zu, die nach dem betreffenden Kreispunkt führen. Da mithin zwei senkrechten Strahlen des einen Büschels zwei senkrechte im anderen entsprechen, tritt dies dann und nur dann ein, wenn die beiden Strahlbüschel congruent und gleich gerichtet sind. In den beiden übrigen Grundpunkten sind die Tangentenbüschel mit jenen congruent, aber entgegengesetzt gerichtet. Die Hauptpunkte der beiden Ebenen entsprechen der unendlich fernen Geraden. Jeder Geraden, welche den einen enthält, entspricht eine projectivische und von dem anderen ausgehende. Sie bilden congruente, aber entgegengesetzt gerichtete Büschel.

Haben zwei projectivische Büschel die beiden verschiedenen Kreispunkte zu Centren, so ist nur „gleich“- und „entgegengesetzt-gerichtet“ in dem vorstehenden Ausspruch zu vertauschen.

§ 16. Sollen irgend zwei einförmige Gebilde projectivisch auf einander bezogen werden, so kann man noch drei verschiedenen Elementen (ABC) des ersten die entsprechenden $(A_1 B_1 C_1)$ des zweiten Gebildes beliebig zuweisen; jedem anderen Element des ersteren ist alsdann ein bestimmtes Element des letzteren zugeordnet[12].

Zusatz 1. Entspricht zwei Elementen AB dasselbe Element A_1 der anderen Reihe, einem dritten C aber ein von A_1 verschiedenes Element C_1, so gehört jedes Glied der ersteren Reihe dem Element A_1 und jedes der letzteren dem Element C zu.

Zusatz 2. Sind in zwei Reihen desselben Trägers irgend drei Elementen der ersteren ihre entsprechenden genügend genähert, so rückt jedem anderen sein entsprechendes Element so nahe, als man nur immer will.

Die beigefügten Bezeichnungen beziehen sich auf den Fall zweier projectivischer Geraden l und l_1, auf den man nöthigenfalls durch Projection alle übrigen zurückführen kann. Auf der reellen oder imaginären Geraden AA_1 nehmen wir P und Q an. Es mögen PB und QB_1 in R, PC und QC_1 in S sich schneiden. Bezieht man auf RS die Strahlbüschel P und Q, auf diese aber beziehlich die Geraden l und l_1 perspectivisch, so entsprechen in den entstehenden projectivischen Reihen ABC und $A_1 B_1 C_1$ einander. Liefse sich nun auf das Gebilde $ABC\ldots$ in mehr als einer Weise das Gebilde $A_1 B_1 C_1 \ldots$ beziehen, so würden auf der letzteren Geraden zwei nicht zusammenfallende Reihen drei Elemente $A_1 B_1 C_1$ entsprechend gemeinsam haben. Es mögen letztere von einem imaginären Punkt A aus projicirt werden, und es seien $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \ldots$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1' \ldots$ entsprechende Punkte der beiden Repräsentationsebenen. Dann mufs die Kette $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$ sich selbst

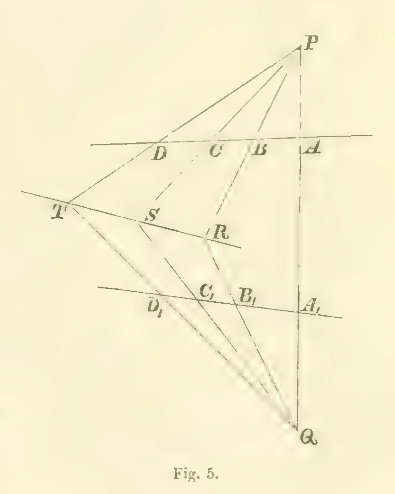


Fig. 5.

Punkt für Punkt entsprechen. Ferner müssen irgend zwei entsprechende Punkte derselben Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ angehören, da es keine zwei verschiedene projectivische Darstellungen des Strahles $\mathfrak{A}_1\mathrm{A}$ geben kann, die von der Tangente der Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ausgehen. Ebenso müssen aber entsprechende Punkte derselben Kette $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ angehören und daher zusammenfallen. Um den Zusatz 2 für eine Gerade zu beweisen, beziehe man auf die Reihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ derselben Geraden l eine dritte $A_2B_2C_2\ldots$ einer anderen Geraden l_1. Das Geradengefüge, welches $A_2B_2C_2$ zu ABC in Beziehung setzt, braucht, damit $A_1B_1C_1\ldots$ und $A_2B_2C_2\ldots$ einander entsprechen, um so weniger verschoben werden, je näher $A_1B_1C_1$ bei ABC liegen. Je zwei einander nahe liegende Geraden bestimmen daher zwei entsprechende Punkte der Reihen auf l und diese liegen also benachbart (§ 6). Mit Hülfe des § 6 folgt auch, dafs projectivische einförmige Gebilde stetig auf einander bezogen sind, dafs also, wenn $ABCD \barwedge A_1B_1C_1D_1$ ist, D_1 an C_1 beliebig heranrücken mufs, wenn C und D einander genügend genähert werden.

Wird die Anordnung des Zusatzes 1 getroffen, so fällt R mit P und RS mit PC zusammen, jedem von C verschiedenen Punkte von l gehört daher nur A, dem Punkte C aber jeder Punkt von l_1 zu.

§ 17. Zu irgend zwei Punkten A und B einer Punkt-Repräsentationsebene kann man eine Schaar beigeordneter Ketten finden, die nämlich jeden Kettenbogen AB e i n m a l treffen und so, dafs beide Tangenten ein Paar der Involution des Grundpunktes ausschneiden; ihre Schnittpunkte mit irgend einer Kette AB werden durch A und B harmonisch getrennt. Durch einen Punkt C geht nur eine solche Kette.

Man beziehe auf das Gebilde $\mathrm{A}A, \mathrm{A}B\ldots$ projectivisch ein anderes mit demselben Centrum, bei welchem dem Strahle $B\mathrm{A}$ der reelle Strahl $\mathfrak{a}$ zugehört. Dem Kettenbüschel AB entspricht dann ein Strahlbüschel A_1. Eine Kette, für welche A_1 der Pol von $\mathfrak{a}$ ist, und nur eine solche erfüllt die Bedingung, dafs in jedem ihrer Punkte B_1 die Tangente mit B_1A_1 ein Paar der Involution des Grundpunktes A ausschneidet. Ihr entspricht eine Kette der in Rede stehenden Schaar.

§ 18. Wenn drei Strahlen $\mathrm{A}A_1$, $\mathrm{A}A_2$, $\mathrm{A}A_3$ eines Büschels die Strahlen $\mathrm{B}B_1$, $\mathrm{B}B_2$, $\mathrm{B}B_3$ eines zweiten projectivischen zugehören, so ent-

spricht dem Halbkettenbüschel $A_1 A_2$ der Ebene A projectivisch das Halbkettenbüschel $B_1 B_2$ der Ebene B derart, dafs in den Tangentenbüscheln A_1, B_1, A_2, B_2 Darstellungen der Strahlen A_1A, A_2A[1], B_1B, B_2B[1] einander zugehören, dafs ferner die Halbketten $A_1 A_3 A_2$ und $B_1 B_3 B_2$ einander und vier in einerlei Sinn folgenden Halbketten $A_1 A_2$ vier in einerlei Sinn folgende Halbketten $B_1 B_2$ entsprechen. Den A_1 und A_2 beigeordneten Ketten entsprechen B_1 und B_2 beigeordnete. Auf irgend zwei Halbketten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ entstehen dabei projectivische Punktreihen.

Der Lehrsatz folgt unmittelbar aus den §§ 15, 16 und 17. Vier in einerlei Sinn folgenden Halbketten $A_1 A_2$ entsprechen vier auf einander folgende Halbketten, weil die beiden Felder $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ auf einander stetig bezogen sind. Ohne diesen Zusatz würde die Beziehung noch eine zweideutige sein, indem nur die Tangenten entsprechender Ketten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gegeben sein würden, diese aber von den bezüglichen beigeordneten Ketten in je zwei Punkten geschnitten werden. Der Zusatz aber bedingt, dafs den Halbtangenten eines gestreckten Winkels bei A_1 diejenigen eines bestimmten gestreckten Winkels bei B zugehören. Dadurch ist dann, weil den Halbketten $A_1 A_3 A_2$ und $B_1 B_3 B_2$ bestimmte Halbtangenten in A_1 und B_1 zukommen, jeder Halbkette eine Halbkette, jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B zugewiesen, da noch jeder A_1 und A_2 beigeordneten Kette eine B_1 und B_2 beigeordnete entspricht.

§ 19. Aus dem Vorstehenden resultirt folgendes wesentliche Princip. Die ganze Reihe derjenigen Resultate, welche für nur reelle Geraden und Punkte, jedoch allein durch Betrachtung projectivischer einförmiger Gebilde abgeleitet sind, gelten ganz ebenso allgemein, wenn imaginäre Elemente eingeführt werden.

Beispiel: Sind den projectivischen Reihen

1) $ABCD \ldots \wedge ABC'D' \ldots \wedge ABC''D'' \ldots$

die Elemente AB entsprechend gemeinsam, so sind auch die Reihen homologer Punkte projectivisch und haben die Elemente A und B entsprechend gemeinsam

2) $ABCC'C'' \ldots \overline{\wedge}\, ABDD'D'' \ldots \overline{\wedge}\, ABEE'E'' \ldots$

Die ersteren Reihen seien Punktreihen und auf eine andere $A_1 B_1 C_1 D_1$ nach Figur 5 (S. 37) projectivisch bezogen. An derselben braucht nur

RST projectivisch zu $ABC'C''C'''$ um R gedreht zu werden, um alle diese Beziehungen herzustellen. Die perspectivischen Reihen, die so auf $QC_1, QD_1, QE_1 \ldots$ entstehen, werden von P aus in die Reihen 2 projicirt.

§§ 20 und 21. Zwei einförmige projectivische Gebilde mit demselben Träger haben zwei Elemente entsprechend gemein[13].

§ 20. Wären den Gebilden mehr als zwei Elemente gemeinsam, so müfsten sie zusammenfallen. Es braucht nur der Fall zweier Strahlbüschel mit demselben Centrum A, das im Unendlichen liegt, betrachtet zu werden, da hierauf alles durch Projection zurückkommt. Es seien J_1 und $\mathfrak{J}_2$ die Hauptpunkte der beiden Ebenen, denen also in je der anderen Ebene die unendlich ferne Gerade zugehört. In den Halbstrahlenbüscheln $\mathfrak{J}_2$ und J_1 entsprechen einander Theile von Darstellungen der Strahlen J_1A und $\mathfrak{J}_2$A^1 und es werden dabei die Halbstrahlen gestreckter Winkel einander zugewiesen (§ 18). Den Ketten mit dem Mittelpunkt J_1 entsprechen solche mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{J}_2$ und zwar den sehr eng um J_1 zusammengeschlossenen sehr grofse Ketten der anderen Schaar. Da auf irgend zwei Halbstrahlen J_1 und $\mathfrak{J}_2$ projectivische Reihen sich ergeben, so entsprechen stetige Folgen solcher Ketten einander. In jedem beiden Feldern entsprechend gemeinen Punkte beider Reihen schneiden sich zwei entsprechende Halbstrahlen J_1 und $\mathfrak{J}_2$ und zwei entsprechende um sie beschriebene Ketten. Jeder Punkt aber, wo diese b e i d e n Eigenschaften erfüllt sind, repräsentirt einen entsprechend gemeinsamen Strahl.

Die gesuchten Punkte liegen zuerst auf Theilen einer Hyperbel, deren Asymptoten ein Paar der Involution A projiciren und die durch zwei projectivische Strahlbüschel J_1 und $\mathfrak{J}_2$ erzeugt wird, in denen Darstellungen von J_1A und $\mathfrak{J}_2$A^1 einander entsprechen. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem der Strecke $J_1\mathfrak{J}_2$ zusammen. Zwei projectivische Reihen nämlich liegen involutorisch, wenn in ihnen Darstellungen der Punkte A und A^1 sich entsprechen; je zwei zugehörige Punkte trennen alsdann ein Paar der Involution A harmonisch (§ 2a). Sind daher i und j zwei entsprechende Strahlen der Büschel J_1 und $\mathfrak{J}_2$, so müssen, weil A im Unendlichen liegt, auch die i und j parallelen, aber von $\mathfrak{J}_2$ und J_1 ausgehenden Strahlen einander entsprechen. J_1 und $\mathfrak{J}_2$ liegen auf verschiedenen Theilen der

Hyperbel. Läfst man einen Punkt A des ersteren, in dem entsprechende Halbstrahlen sich treffen, auf der Curve stetig fortschreiten, ohne J_1 zu erreichen, so bewegen auch die nach J_1 und $\mathfrak{J}_2$ führenden Halbstrahlen sich stetig und bleiben daher entsprechend. Alle so erreichbaren Punkte gehören also der betrachteten Curve an. Überschreitet der bewegliche Punkt J_1, so bewegt sich j stetig, i aber springt aus einer Richtung der Tangente in J_1 in die entgegengesetzte über. In den anderen Punkten des Theiles, zu dem J_1 gehört, schneidet daher jeder Halbstrahl i den entgegengesetzten seines entsprechenden. Einer der Theile, in die J_1 seinen Zug der Hyperbel zerlegt, gehört der untersuchten Curve an, und entsprechend einer der Theile, in die $\mathfrak{J}_2$ den seinigen zerlegt. Die erstere Reihe sich schneidender Halbstrahlen wird durch zwei zu einer Halbasymptote parallele Halbstrahlen abgeschlossen. Auch die ihnen entgegengesetzten Halbstrahlen entsprechen einander und begrenzen daher die andere Reihe sich schneidender Halbstrahlen. Die Curve besteht aus zwei Zügen, die, von J_1 und $\mathfrak{J}_2$ ausgehend, den entgegengesetzten Richtungen einer Asymptote sich anschliefsen. Nur wenn $J_1\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{J}_2 J_1$ einander entsprechen, können beide Curventheile einen Punkt gemeinsam haben. Die Hyperbel enthält dann $J_1\mathfrak{J}_2$ und die von M ausgehende Gerade, die mit ihr ein Paar der Involution des Grundpunktes ausschneidet. Die in Rede stehende Curve besteht aus den einmal bei M gebrochenen Zügen, die von J_1 und $\mathfrak{J}_2$ aus in's Unendliche führen. Beide haben nur den Punkt M gemeinsam. Man kann $J_1 M$ durch einen beliebigen der Theile ergänzen, in die durch M die andere Gerade zerlegt wird; $\mathfrak{J}_2 M$ mufs dann mit dem anderen zusammengestellt werden.

§ 21. Wir lassen nun einen Punkt den von J_1 ausgehenden Zweig durchlaufen. In jeder Lage desselben schneiden sich zwei um J_1 und $\mathfrak{J}_2$ beschriebene Ketten. Für die gesuchten Coincidenzpunkte sind dieselben entsprechende Glieder der projectivischen Reihen. Die $\mathfrak{J}_2$-Kette mufs für sie mit der anderen, welche der J_1-Kette entspricht, identisch sein. Läfst man den beweglichen Punkt von J_1 aus stetig in die Unendlichkeit gehen, so ändern sich auch die beiden $\mathfrak{J}_2$-Ketten stetig. Die beständig durch den beweglichen Punkt gehende hat zur Anfangslage die durch J_1 gehende Kette, kann nicht in den Punkt $\mathfrak{J}_2$ ausarten,

und wird, wenn sich der bewegliche Punkt genügend weit von J_1 entfernt, so grofs, wie man nur immer will. Die andere $\mathfrak{J}_2$-Kette, welche der J_1-Kette durch den beweglichen Punkt projectivisch entspricht, ist für genügend nahe bei J_1 gewählte Punkte so grofs, wie man nur immer will, verändert sich ebenfalls stetig, und wird so klein, wie man nur immer will, für genügend entfernte Lagen des beweglichen Punktes. Wir wollen eine Endlage desselben so wählen, dafs die zugehörige zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette c_1 innerhalb der kleinsten $\mathfrak{J}_2$-Kette der ersten Art liegt. Wir wollen eine Anfangslage des Punktes so nahe bei J_1 wählen, dafs die zugehörige zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette c_2 alle ersten $\mathfrak{J}_2$-Ketten umschliefst, die bis zur gewählten Grenzlage möglich sind. Während die zweite $\mathfrak{J}_2$-Kette einen stetigen Übergang von c_1 zu c_2 macht, geht die zweite, ohne die Grenzlagen c_1 und c_2 zu erreichen, von einer zwischen beiden gelegenen Anfanglage c'_1 zu einer ebenfalls zwischen c_1 und c_2 gelegenen Endlage c'_2 über. Daher mufs es wenigstens eine Kette geben, die c_1 ein- und c_2 ausschliefst, und in der eine erste mit einer zweiten $\mathfrak{J}_2$-Kette zusammenfällt. Mit ihrer entsprechenden J_1-Kette schneidet sie sich auf dem von J_1 ausgehenden Zweige der ersteren Curve in wenigstens einem Punkte. Auf dem von J_1 und ebenso auf dem von $\mathfrak{J}_2$ ausgehenden Zweige der ersteren Curve giebt es also wenigstens einen Coincidenzpunkt, so dafs ihrer im Allgemeinen genau (§ 20) zwei vorhanden sind. Besteht die Curve aus zwei einmal gebrochenen Zweigen, und ist der Mittelpunkt M selbst ein Coincidenzpunkt der beiden Reihen, so ist kein zweiter vorhanden. Da aber bei projectivischen Reihen, die einen Coincidenzpunkt bei M haben, es noch einen zweiten ebenfalls bei M gelegenen giebt, so können wir sagen, dafs in diesem besonderen Falle bei M zwei Doppelpunkte vereinigt liegen.

Zweites Capitel. §§ 22–76.

Die Involutionen.

Erster Abschnitt.

Die Involutionen zweiter Ordnung. §§ 22—30.

§ 22. Wenn in zwei projectivischen einförmigen Gebilden desselben Trägers irgend zwei Elemente (AA_1) einander wechselseitig entsprechen, so entsprechen je zwei zusammengehörige Elemente einander wechselseitig.

Zu irgend einem Punkte M einer Geraden sei M_1 der zugehörige in der zweiten Reihe, diesem aber entspreche in der zweiten Reihe M_2. Auch die Punkte M und M_2 durchlaufen projectivische Reihen. Dieselben haben A und A_1, sowie die Doppelpunkte (§ 21) der gegebenen Reihen, wenigstens also drei Punkte entsprechend gemeinsam. Die Reihen sind daher identisch, und irgend zwei zusammengehörige Punkte B und B_1 der gegebenen Reihen entsprechen einander wechselseitig.

§ 23. Eine eigentliche Involution besteht aus den Paaren, die bei zwei wechselseitig projectivisch entsprechenden Reihen desselben Trägers einander zugehören. Sie hat zwei getrennte Doppelelemente. Werden bei einer Strahleninvolution mit imaginärem Centrum dieselben durch D_1 und D_2 repräsentirt, so schneidet jede durch sie gehende Kette sich mit jeder D_2 und D_1 beigeordneten Kette in dem repräsentirenden Punktepaar AA_1 eines Strahlenpaares der Involution.

Die Involution hat (§ 20) wenigstens einen Doppelstrahl D_1A. Die Kette D_1AA_1 entspricht sich selbst, da diesen Punkten D_1, A_1 und A zugehören. Da nun (§ 15) auf dieser Kette entsprechende Punkte reell-involutorisch liegen, so entspricht auch D_2, der durch A und A_1 von D_1 harmonisch getrennte Punkt, sich selbst. Die Halbkette D_1AD_2 und ihre

ergänzende $D_1 A_1 D_2$, überhaupt also zwei ergänzende Halbketten (§ 18) $D_1 D_2$ gehören einander zu. Jede D_1 und D_2 beigeordnete Kette schneidet auf jeder durch D_1 und D_2 gehenden ein Punktepaar der Involution aus, denn diese Schnittpunkte (§ 17) werden durch D_1 und D_2 harmonisch getrennt.

Wenn D_1 und D_2 zusammenfallen sollen, so mufs von AA_1 und folglich (§ 16, Zusatz 1) auch von jedem anderen Paar ein Punkt mit D_1 zusammenfallen.

Wenn das Centrum der Involution einer der cyclischen Punkte der Ebene ist, so sind die Punktepaare Schnitte von Kreisen des Büschels DD_1 mit ihren Orthogonal-Kreisen.

§§ 24—26. Wenn in zwei projectivischen Gebilden desselben Trägers den festen Elementen A_1, B_1 des einen stets die festen Elemente B_2, A_2 des anderen entsprechen, einem dritten Element C aber andere und andere $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ zugeordnet werden, so sind die jedesmaligen Doppelpunkte Paare der Involution $A_1 A_2$; $B_1 B_2$. Diese letzteren Gruppen ergeben sich, wenn $\mathfrak{C}$ mit A_2 und B_2 zusammenfällt. Jedem Paare der Involution gehört bei der bestimmten Erzeugungsweise ein Element $\mathfrak{C}$ zu. Die verschiedenen Reihen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ und $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \mathfrak{C}_3', \mathfrak{C}_4' \ldots$, welche einer gegebenen Anordnung der Involution entsprechen, sind sämmtlich unter einander projectivisch. Zu ihnen wird daher die Involution projectivisch gesetzt werden[14].

Fällt in der obigen Erzeugungsweise A_1 mit B_2 zusammen, so beschreibt der andere veränderliche Doppelpunkt ein mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4 \ldots$ projectivisches einförmiges Gebilde.

§ 24. Folgendes ergiebt sich unmittelbar mit Hülfe des § 19 aus bekannten, auf reelle Gebilde bezogenen Sätzen: Als Kegelschnitt wird der Ort der reellen oder imaginären Punkte der Ebene bezeichnet, wo sich entsprechende Strahlen zweier projectivischer Büschel mit reellen oder imaginären Centren A und B treffen. Sind Γ und Δ irgend zwei so entstandene Punkte, so kann der Kegelschnitt auch durch zwei projectivische Strahlbüschel mit den Centren Γ und Δ erzeugt werden. Durch fünf beliebige Punkte ist derselbe daher bestimmt. Da seine Strahlbüschel auf

irgend einer Geraden a zwei projectivische Reihen bestimmen, so hat der Kegelschnitt mit jeder beliebigen Geraden zwei getrennte oder zusammenfallende Punkte gemeinsam. Die Geraden, für welche das letztere eintritt, sind Tangenten des Kegelschnittes. Jedem Curvenpunkt Γ gehört eine Tangente zu; bei der Erzeugung von Γ und Δ aus entspricht sie dem Strahle ΔΓ. Auf irgend zwei festen Tangenten schneiden die übrigen projectivische Reihen aus. Daher gehen von jedem reellen oder imaginären Punkte der Ebene an den Kegelschnitt zwei verschiedene oder zusammenfallende Tangenten. Letzteres tritt nur für Punkte des Kegelschnittes selbst ein.

§ 25. Die Punktepaare, in welchen die von einem Punkte Ω ausgehenden Geraden einen Kegelschnitt treffen, werden von einem beliebigen Punkte A desselben aus durch die Strahlenpaare einer Involution projicirt.

A sei ein imaginärer Punkt. Von Ω aus lassen sich an den Kegelschnitt zwei Tangenten legen. Ihre Berührungspunkte Δ und Δ_1 sind die Centren zweier Strahlbüschel, die den Kegelschnitt erzeugen. Die Doppelstrahlen der Büschel A, welche zu ihnen bezüglich einer beliebigen von Ω ausgehenden Geraden perspectivisch sind, führen nach den Schnittpunkten der letzteren mit dem Kegelschnitte. Nun sind aber ΔA und Δ_1A entsprechende Strahlen der beiden ersteren und also auch der beiden concentrischen Büschel. Ihre reellen Punkte D_1 und D_2 gehören in den repräsentirenden Ebenen einander zu. Bei der Erzeugung des Kegelschnittes entsprechen ferner ΔΩ und $\Delta_1\Delta$, sowie $\Delta_1\Omega$ und $\Delta\Delta_1$ einander. Auf der Geraden o entsteht daher eine Involution; nach ihren Schnittpunkten führen mithin die Doppelstrahlen AA_1; AA_2 einer Involution, von der AD_1, AD_2 ein Paar ist. A_1 und A_2 liegen also mit D_1 und D_2 auf einer Kette und trennen diese harmonisch. Ihrerseits bilden AA_2, AA_2 ein Paar der Involution mit den Doppelstrahlen AD_1 und AD_2.

§ 26. Wir erzeugen nun den Kegelschnitt durch die zu ihm perspectivischen und daher unter sich projectivischen Strahlbüschel B und Γ. Die Doppelstrahlen der Büschel, welche zu jenen bezüglich der von Ω ausgehenden Geraden perspectivisch sind, führen nach ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt. AB und AΓ sind, da sie bei der Erzeugung des letzteren einander entsprechen, zugehörige Geraden der Büschel A. B_1, Γ_1 seien die

zweiten Schnittpunkte von ΩB und ΩΓ. Sollen nun, wie es der Satz verlangt, auch $A\Gamma_1$ und AB_1 einander zugehören, so müssen für einen Curvenpunkt Φ sowohl $A\Gamma_1$ und BΦ, als auch AB_1 und ΓΦ auf der bestimmten von Ω ausgehenden Geraden sich schneiden. Durch die erstere Forderung wird Φ bestimmt; die letztere ist erfüllt, da nach Pascal's Lehrsatz (§ 19) Ω oder $(BB_1, \Gamma\Gamma_1)$; $(B\Phi, A\Gamma_1)$; $(\Gamma\Phi, AB_1)$ derselben Geraden angehören müssen.

Zu irgend einem festen Strahle α des ersten Büschels A erhalten wir den entsprechenden α_1, wenn wir den Schnittpunkt $o\alpha$ mit B verbinden, den Schnittpunkt des zugehörigen von Γ ausgehenden Strahles mit o aber wieder mit A. Mit o bewegen bei festbleibenden α die Strahlen um B und Γ sich projectivisch. Letzteres Büschel erzeugt mit o einen zweiten Kegelschnitt K_1, dem auch A angehört, weil ΩA, BA und ΓA einander zugehören. Das zum Kegelschnitt K_1 perspectivische Strahlbüschel A wird von α_1 durchlaufen; dieses ist daher zu o projectivisch. Da nun durch eine bestimmte Anordnung der Involution diejenige des Büschels o unzweideutig bestimmt ist, so folgt der dem § 24 vorausgesetzte Lehrsatz zunächst für die Involution AB, AB_1 ; $A\Gamma, \Gamma\Gamma_1$. Es ist dies aber die allgemeinste Strahleninvolution mit imaginärem Centrum A. Da jede Strahleninvolution von einer Geraden in einer projectivischen Punktinvolution geschnitten, diese aber von jedem Punkt aus durch eine Strahleninvolution projicirt wird, so folgt der Lehrsatz auch für die übrigen möglichen Fälle.

Die in ihm gegebene Definition für das projectivische Aufreihen einer Involution ist deswegen berechtigt, weil die beiden Haupteigenschaften projectivischer Gebilde gültig bleiben, wenn die Involution in ihren Kreis aufgenommen werden. Zwei Gebilde sind unter sich projectivisch, wenn sie zu derselben Involution projectivisch sind. Sind ferner irgend drei Paare der Involution drei Individuen eines projectivischen Gebildes zugewiesen, so ist auch zu jedem anderen Paare das entsprechende Glied gegeben.

§§ 27 und 28. Die Repräsentationsebene einer Strahleninvolution zweiter Ordnung mit imaginärem Centrum A wird projectivisch bezogen auf diejenige eines Strahlbüschels mit imaginärem Centrum B.

§ 27. Einer stetigen Punktfolge der Ebene B entspricht eine stetige Folge von Punktepaaren der Ebene A.

Es seien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ irgend zwei der betrachteten Paare. Die übrigen sind Doppelpunkte projectivischer Reihen

$$A_1 B_1 C \ldots \barwedge B_2 A_2 \mathfrak{C}' \ldots ,$$

wo sich $\mathfrak{C}'$ projectivisch mit dem Punkte $\mathfrak{C}$ der Ebene B verändert und für die Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ die Lagen A_2 und B_2 annimmt; diese mögen den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der B-Ebene zugehören. Zwei benachbarten Punkten $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ der letzteren entsprechen, weil

$$A_2 B_2 \mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots$$

ist, in dem C zugehörigen Felde zwei einander genäherte Punkte $\mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2'$ (§ 16). Setzt man nun

$$A_2 B_2 \mathfrak{C}_1' \ldots \barwedge A_2 B_2 \mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge B_1 A_1 C \ldots ,$$

so gehören (§ 16) auch jedem anderen Punkte der letzteren Reihe zwei benachbarte Punkte der ersteren zu. Einem Doppelpunkte D der dritten und zweiten Reihe rückt der entsprechende der ersten $\mathfrak{D}_1'$ um so näher, je mehr $\mathfrak{C}_1'$ an $\mathfrak{C}_2'$ herangerückt wird. Da nun projectivische Reihen stetig auf einander bezogen sind, so können entsprechende Punkte der Reihen 1 und 3 sich nur dann unbegrenzt nähern, wenn sie in der Nachbarschaft eines Doppelpunktes dieser Reihen sich befinden. Sind also $C_1 C_2$ die Doppelpunkte der ersten und dritten, $D_1 D_2$ die der zweiten und dritten Reihe, so liegt D_1 einem der ersteren Punkte, sagen wir C_1, nahe; da alsdann (§ 22)

$$A_1 B_1 C_1 D_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 D_2$$

ist, so mufs auch D_2 bei C_2 liegen.

Wenn die Curve in der B-Ebene sich selbst nicht schneidet und keinen der beiden Verzweigungspunkte enthält, denen die Doppelpunkte der Involution entsprechen, so gehören ihr zwei Zweige zu, die in bestimmter Weise die Paare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ verbinden, welche den Anfangs- und Endlagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Punktes $\mathfrak{C}$ entsprechen. Einem geschlossenen, sich nicht schneidenden Zuge der B-Ebene entspricht eine Curve, die aus einem einzelnen oder zwei verschiedenen geschlossenen Zügen be-

steht. Wenn die geschlossene Curve der B-Ebene sehr klein ist, so setzt sich die entsprechende A-Curve aus zwei kleinen geschlossenen Zügen zusammen.

§ 28. Diejenigen Curven des involutorischen Feldes, welche Ketten der B-Ebene entsprechen, werden als Ketten des ersteren bezeichnet. Jede Kette kann auf unendlich viele Weisen durch projectivische Kettenbüschel der Ebene A erzeugt werden. Die festen Punkte $A_1 B_1$ des einen kann man auf der Curve beliebig wählen, diejenigen des anderen ergänzen jene zu Paaren der Involution (A_2 und B_2). In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln entsprechen die imaginären Strahlen A_1A; B_1A^1; A_2A^1; B_2A einander.

Jede Kette kann ferner auf unendlich viele Weisen durch projectivische Kettenschaaren erzeugt werden, die den Punkten $C_1 D_1$ resp. $C_2 D_2$ beigeordnet sind. Das Paar $C_1 C_2$ des Involutionsfeldes kann ganz beliebig aufserhalb der Kette ausgewählt werden, das andere $D_1 D_2$ ist dann durch jenes eindeutig bestimmt.

Einem Kettenbüschel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der B-Ebene entspricht ein projectivisches Kettenbüschel $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ der Involutionsebene, und zwar entsprechen in den sechs reell-projectivischen Tangentenbüscheln die Strahlen

$$\mathfrak{A}\mathrm{B}\,,\ \mathfrak{B}\mathrm{B}^1\ ;\ A_1\mathrm{A}\,,\ A_2\mathrm{A}\ ;\ B_1\mathrm{A}^1\,,\ B_2\mathrm{A}^1$$

einander. Die beiden Ebenen sind daher in den kleinsten Theilen zu einander projectivisch[15]. Entspricht dem Punkte $\mathfrak{A}$ ein Doppelpunkt D_1 des Involutionsfeldes, so ist derselbe für alle Involutionsketten des Büschels ein Doppelpunkt. Ihre Tangenten bilden ein reelles Paar der Involution mit den Doppelstrahlen D_1A und D_1A^1. Sie ist zum Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}$ so projectivisch, dafs diesen Doppelstrahlen $\mathfrak{A}$B und $\mathfrak{A}$B^1 zugehören.

Der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigeordneten Kettenschaar entspricht eine Schaar von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ beigeordneten Involutionsketten; jede von ihnen schneidet jeden Zweig einer beliebigen Halbkette in einem Punkte so, dafs die beiden Tangenten ein Paar der Involution des Grundpunktes A projiciren. Jede einzelne trennt daher je einen der Punkte $A_1 A_2$ von wenigstens einem der Punkte $B_1 B_2$.

In der projectivischen Beziehung

$$A_1 B_1 C \ldots \overline{\wedge} B_2 A_2 \mathfrak{C}' \ldots$$

durchläuft $\mathfrak{C}'$ die Halbkette $A_2 \mathfrak{C}_1' B_2$, wenn $\mathfrak{C}$ die Halbkette $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ durcheilt, deren Anfangs- und Endlagen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zugehören. Für die Herstellung der Paare, welche Punkten des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ entsprechen, hat man also die Halbketten $A_1 C B_1$ und $B_2 \mathfrak{C}_1' A_2$ und folglich überhaupt zwei feste Halbketten $A_1 B_1$ und $B_2 A_2$ einander zuzuweisen; in den vier Tangentenbüscheln entsprechen $A_1 \mathrm{A}$; $B_1 \mathrm{A}^1$; $B_2 \mathrm{A}$; $A_2 \mathrm{A}^1$ einander. Zwei entgegengesetzten Halbketten $A_1 B_1$ gehören zwei entgegengesetzte Halbketten $B_2 A_2$ zu. Die letzteren vertauschen sich, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}$ durch die entgegengesetzte Halbkette vertreten wird. Einer ganzen Kette $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gehört daher das Erzeugnifs der Kettenbüschel zu, die den gefundenen Tangentenbüscheln sich anschliefsen. Mit der Kette $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ bewegt sich die $A_1 C B_1$ zuzuordnende Kette $B_2 \mathfrak{C}_1 A_2$ projectivisch. Hierin kann die erstere Kette $B_1 C A_1$ ganz willkürlich gewählt werden. Speciell liefert das $B_1 A_2 A_1$ zugehörige Kettenbüschel $A_2 B_2$ das Tangentenbüschel des untersuchten Büschels $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bei A_2, und das $B_1 B_2 A_1$ zugehörige Büschel $A_2 B_2$ dasjenige bei B_2. Dieselben sind also (§ 18) zu den Tangentenbüscheln der Ketten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ so reell-projectivisch, dafs die imaginären Strahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}$; $\mathfrak{B}\mathrm{B}^1$; $A_2 \mathrm{A}$; $B_2 \mathrm{A}^1$ einander entsprechen; natürlich sind, da sich A_1, B_1 gegen A_2, B_2 vertauschen lassen, die Büschel bei A_1 und B_1 zu jenen projectivisch, und es entsprechen den vorigen imaginären Strahlen $A_1 \mathrm{A}$ und $B_1 \mathrm{A}^1$. Die Tangenten in A_1 und A_2 bewegen sich daher in einer, und die in B_1 und B_2 in der entgegengesetzten Richtung, wenn A im Unendlichen liegt. Von jeder Halbkette $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ werden die Halbtangenten nach Aufsuchung von irgend vier zusammengehörigen durch die Festsetzung fixirt, dafs die Halbstrahlen gestreckter Winkel bei A_1, A_2, B_1, B_2 einander zugehören. Tritt an die Stelle von $B_1 B_2$ der eine Doppelpunkt D_1, so ist

$$A_1 C D_1 \ldots \overline{\wedge} D_1 \mathfrak{C}^1 A_2 \ldots$$

In den Tangentenbüscheln der projectivischen Kettenbüschel $A_1 D_1$ und $D_1 A_2$ gehören die imaginären Strahlen $A_1 \mathrm{A}$; $D_1 \mathrm{A}^1$; $D_1 \mathrm{A}$; $A_2 \mathrm{A}^1$ einander zu. Im Punkte D_1 ergeben sich, weil die beiden Strahlbüschel D_1 entgegengesetzten Sinnes sind, zwei verschiedene sich selbst entsprechende

Strahlen. Sie bilden, da D_1A und D_1A^1, sowie D_1A^1 und D_1A einander zugehören, ein Paar der Involution mit den Doppelstrahlen D_1A und D_1A^1. Von den vier Halbstrahlen, die man bei D_1 so erhält, gehören je zwei ergänzende d_1 und d_1' derselben Halbkette an. Denn ist d_1 ein Doppel-Halbstrahl der einen, so ist auch d_1' ein solcher. Da ferner auch die Halbstrahlenbüschel entgegengesetzten Sinnes sind, so werden nun irgend zwei entsprechende von d_1 und d_1' getrennt. Für die ergänzende Halbkette sind d_1 und d_1' wechselseitig entsprechende Halbstrahlen. Beim Büschel $D_1 D_1, A_1 A_2$ bleibt hinsichtlich $A_1 A_2$ alles wie vorher, bei D_1 aber ergeben sich andere und andere Paare der Involution. In dem Tangentenbüschel in D_1, dessen Strahlen der festen Tangente der Kette $A_1 D_1 C$ nach und nach zugeordnet werden, entsprechen D_1A und D_1A^1 den Strahlen 𝔅B und 𝔅B^1. Die Involution D_1 ist daher (§§ 24—26) so reell-projectivisch zum Strahlbüschel 𝔅, dafs den Doppelstrahlen D_1A und D_1A^1 die Strahlen 𝔅B und 𝔅B^1 zugehören. Man bemerke noch, dafs die einzelnen Strahlen der Involution D_1 in gleichem Sinne mit der beweglichen Tangente in D_1 der Kette $D_1 A_2$, die einer festen Kette $A_1 D_1$ zugeordnet wird, sich bewegen, also in entgegengesetztem Sinne mit den Tangentenbüscheln in A_1, A_2 des Kettenbüschels $A_1 A_2, D_1 D_2$, wenn A im Unendlichen liegt. Die genannten Strahlen sind zwei entgegengesetzt gerichteten Büscheln gemeinsam. Wird nun eine kleine Verschiebung des letzteren vorgenommen, so treten an Stelle eines Doppelstrahls zwei sehr nahe gelegene. Zwischen beiden liegt ein Doppelstrahl der beiden neuen Reihen, der sich also in demselben Sinne verschiebt, wie der irgend einem festen Strahle des ersten Büschels zugehörige bewegliche.

Von dem einer beliebigen Kette B beigeordneten Punktepaar 𝔆𝔇 kann man noch einen 𝔆 beliebig wählen, der andere 𝔇 ist dann eindeutig bestimmt. Bezieht man nämlich das Strahlbüschel B projectivisch so auf ein concentrisches, dafs B𝔆 und 𝔟 einander entsprechen, so gehört der gegebenen Kette eine andere zu, aus deren Pol 𝔇$'$ bezüglich 𝔟 der gesuchte Punkt 𝔇 entsteht. Die entsprechenden Paare seien $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$. Die übrigen Paare der Involution entstehen als Coincidenzpunkte der Reihen

$$C_1 D_1 E \ldots \barwedge D_2 C_2 \mathfrak{C}' \ldots$$

Da der Punkt 𝔆$'$ die Lagen D_2 und C_2 einnehmen mufs, wenn die Paare $D_1 D_2$ und $C_1 C_2$ entstehen sollen, so mufs er eine C_2 und D_2 beigeordnete

Kette des Feldes A durchlaufen, wenn die Involutionskette entstehen soll, welche der $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ beigeordneten entspricht. Die erstere ist daher das Erzeugnifs zweier projectivischer, $C_1 D_1$ und $D_2 C_2$ resp. beigeordneter Kettenschaaren. Sie schneidet jeden Zweig einer jeden Halbkette $C_1 C_2$, $D_1 D_2$ einmal so, dafs die Tangenten beider ein Paar der Involution A ausschneiden. Die Halbkette gehört nämlich einer Halbkette $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ der Ebene B zu, welche die $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ beigeordnete Kette in einem Punkte $\mathfrak{F}$ trifft. Die Punkte des ihm entsprechenden Paares sind beiden Curven der Involutionsebene gemeinsam und vertheilen sich (§ 27) auf die beiden verschiedenen Zweige der Halbkette. Da die Tangenten in $\mathfrak{F}$ in der Punktebene B ein Paar der Involution B ausschneiden, so treffen die Tangenten in einem Punkte des entsprechenden Paares die unendlich ferne Gerade in einem Paare der Involution A. Die $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$ beigeordnete Kette scheidet daher jeden der Punkte C_1 und C_2 von wenigstens einem der Punkte D_1 und D_2 ab.

§ 29. Werden zwei Paaren $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ einer Involution diejenigen $A_1' A_2'$ und $B_1' B_2'$ einer zweiten desselben Trägers (A) genügend genähert, so rückt an ein beliebiges Paar $C_1 C_2$ der ersteren ein Paar der anderen beliebig nahe heran ($C_1' C_2'$). Setzt man je drei einander nahe gelegene Paare als homologe Glieder projectivischer Reihen, so nähern sich irgend zwei entsprechende Paare derselben ($D_1 D_2$ und $D_1' D_2'$).

D_1 und D_2 sind Doppelpunkte der Reihen

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \barwedge B_2 A_2 \mathfrak{D} \ldots, \qquad 1)$$

D_1' und D_2' diejenigen der Reihen

$$A_1' B_1' C_1' \ldots \barwedge B_2' A_2' \mathfrak{D}' \ldots \qquad 2)$$

Die drei gegebenen Paare der ersten Reihe entspringen aus den Lagen $A_2 B_2 C_1$ von $\mathfrak{D}$, die entsprechenden aus den Lagen $A_2' B_2' C_1'$ von $\mathfrak{D}'$. Daher ist

$$B_2 A_2 C_1 \mathfrak{D} \ldots \barwedge B_2' A_2' C_1' \mathfrak{D}' \ldots \qquad 3)$$

und $\mathfrak{D}'$ rückt so nahe, als man nur immer will, an $\mathfrak{D}$ heran (§ 16, Zusatz 2), wenn man $B_2 A_2 C_1$ und $B_2' A_2' C_1'$ einander genügend nähert. Setzt man nun

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \barwedge A_1' B_1' C_1' \ldots \qquad 4)$$

und folglich auch

$$B_2 A_2 \mathfrak{D} \ldots \barwedge B'_2 A'_2 \mathfrak{D}' \ldots, \qquad 5)$$

so liegen je zwei entsprechende Punkte von 4) und auch von 5) einander nahe, wenn man noch $A_1 B_1$ und $A'_1 B'_1$ einander nähert. Einem Doppelpunkt der Reihen 2) liegen alsdann zwei entsprechende Punkte der festen Reihen 1) nahe. Daher mufs jedes Paar $D'_1 D'_2$ der zweiten sich dem entsprechenden $D_1 D_2$ der ersten Involution nähern.

§ 29a. Hält man ein Paar $A_1 A_2$ einer Involution fest, von einem zweiten $B_1 B_2$ aber nur einen Punkt B_2, so nähert sich gleichzeitig mit B_1 auch von jedem anderen Paare $C'_1 C'_2$, $D'_1 D'_2$, $E'_1 E'_2$ ein Punkt C'_1, D'_1, E'_1 dem Punkte A_1, das Feld $A_2 B_2 C'_2 D'_2 E'_2$ aber einem zur Involution projectivischen Felde $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \ldots$

Der Satz ist, weil $A_1 A_2$, $A_1 B_2$, $A_1 C_2 \ldots$ eine zur ersteren projectivische Involution ist, nur ein Corollar des vorhergehenden.

§ 30. In den beiden involutorischen Feldern des § 29 liegt jeder Kette ihre entsprechende nahe, und in irgend zwei benachbarten Punkten derselben nähern sich die Tangenten ihrer ganzen Ausdehnung nach, wenn man es nicht mit einem Doppelpunkt der festen Involution zu thun hat.

Verbindet man die Punkte eines kleinen Bereiches mit den Paaren $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ durch Ketten des Feldes $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, so rücken alle Tangenten, welche in Punkten des Bereiches berühren, bei genügender Verkleinerung desselben beliebig nahe an einander, falls derselbe nicht einen Doppelpunkt des Feldes oder einen der Punkte A oder B einschliefst.

Die Kette $A_1 A_2$, $C_1 C_2$, $B_1 B_2$ entsteht aus den projectivischen Büscheln $A_1 C_1$ und $C_2 A_2$. In denselben entsprechen die nach B_1 führenden Ketten einander; die Tangente in C_1 kommt der Kette $A_1 C_1$ zu, welche $C_2 C_1 A_2$ zugehört. Ersetzt man nun die gewöhnlichen Buchstaben durch die gestrichenen, so treten an Stelle der früheren Ketten ihnen nahe gelegene $A'_2 C'_2 B'_1$, $A'_2 C'_2 C'_1$, $A'_1 C'_1 B'_1$. Die beiden ersteren mögen in A'_2 die Tangenten t'_3 und t'_4 haben, die letztere in C'_1 die Tangente t'_2. Die gesuchte t'_1 entspricht t'_4, wenn man die Strahlbüschel A'_2 und C'_1 so projectivisch bezieht, dafs die von t'_3 und t'_2 ausgehenden Darstellungen der Strahlen $A'_2 \mathrm{A}$ und $C'_1 \mathrm{A}$ einander zugehören. Da nun $t'_2 t'_3 t'_4$ bei den ent-

sprechenden Geraden $t_2 t_3 t_4$ liegen (§ 5), so befindet auch t_1' sich bei t_1. Da aber die Kette $A_2 C_2 C_1$ unbestimmt wird, wenn an die Stelle des Paares $C_1 C_2$ ein Doppelpunkt tritt, so darf in diesem Falle der Schlufs nicht mehr gemacht werden.

Der Zusatz ergiebt sich, wenn $A_1' A_2'$ mit $A_1 A_2$, $B_1' B_2'$ mit $B_1 B_2$ zusammenfällt, C_1' und C_1 aber beweglich bleiben.

Zweiter Abschnitt.

Lehrsätze über Involutionen nter Ordnung. §§ 31—39.

§ 31. Unsere Aufgabe ist es nun, auf dem bereits Gewonnenen fufsend, eine Theorie der allgemeinen Involutionen aufzubauen. Es wird aber zweckmäfsig sein, eine kurze Erläuterung des Gedankenganges an der Involution dritter Ordnung vorauszuschicken. Wir erhalten ihre Gruppen, wenn wir auf alle Arten die projectivische Beziehung

I) $$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \barwedge \mathrm{I}_\alpha)\; B_2\,, A_2\,, \mathfrak{C}_2' \ldots\,,$$

wo nur $\mathfrak{C}_2'$ beweglich ist, zwischen einer Involution zweiter Ordnung und einem einförmigen Gebilde desselben Trägers (A) herstellen und jedesmal die Coincidenzelemente eines solchen Reihenpaares zusammenfassen. Ein Element, das nicht mit einem der A_λ oder B_λ zusammenfällt, kommt in einer Gruppe vor. Wenn $\mathfrak{C}_2'$ mit A_2 zusammenfällt, so entsprechen dem letzteren zwei verschiedene und daher alle Paare der Involution I. Da dann auch AA_1 zwei und damit alle Elemente von I_α zugehören, so besteht eine Gruppe der Involution aus A, A_1, A_2 und eine andere aus B, B_1, B_2.

Der ersten Erzeugungsweise können sofort noch andere zugesellt werden. Die Involutionsgruppen

$$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\,, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'\,, \mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1'' \ldots$$

entstehen als Coincidenzpaare der festen Reihe

II) $$AB\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 \ldots$$

und der projectivischen einförmigen Gebilde

$$\mathrm{II}_1)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \ldots \barwedge \mathrm{II}_2)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2' \ldots \barwedge \mathrm{II}_3)\; B_1 A_1 \mathfrak{C}''\mathfrak{C}_1''\mathfrak{C}_2'' \ldots$$

Zu der Involution I sind die Reihen gleichstelliger Glieder

$$\mathrm{II}'_1)\quad A_1 B_1 \mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}'' \ldots \quad \mathrm{II}'_2)\ A_1 B_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}'_1 \mathfrak{E}''_1 \ldots \quad \mathrm{II}'_3)\ A_1 B_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}'_2 \mathfrak{E}''_2 \ldots$$

projectivisch, deren Elemente nämlich je den Gliedern $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \ldots$ von II nach und nach zugeordnet werden müssen, damit die gegebene Anordnung von I entsteht. In ihnen allen gehören A_1 und B_1 den Paaren AA_1 und BB_1 zu. Mit ihnen projectivisch ist daher auch die Reihe I_α, die irgend ein Glied der Involution dritter Ordnung mit der Involution I gemeinsam hat. Die gesuchten Elemente können noch in anderer Weise definirt werden. Die Reihen II; II_1, II_2, $\mathrm{II}_3 \ldots \mathrm{II}_\beta$ und I_α stehen nämlich in trilinearer Beziehung[17]. In jedem Tripel zusammengehöriger Elemente ist das dritte nach Festsetzung von irgend zweien eindeutig bestimmt; irgend zwei von ihnen können noch projectivische Reihen beschreiben, wenn das letzte Element des Tripels beliebig festgehalten wird. In der That, irgend einem Gliede $\mathfrak{F}_\gamma$ von I_α ordnet sich ein bestimmtes Glied der Involution zweiter Ordnung zu und damit das bestimmte Reihenpaar II und II_γ, welche eben dieses Glied erzeugen. Irgend einem Gliede $\mathfrak{D}_\delta$ von II aber gehört in II_γ das bestimmte Glied $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ zu. Wenn $\mathfrak{D}_\delta$ festgehalten wird, und $\mathfrak{F}_\gamma \mathrm{I}_\alpha$ durchläuft, so mufs $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ die zu ihm und zur gegebenen Involution I projectivische Reihe II'_δ durchlaufen. Sehr leicht ist auch zu zeigen, dafs, wenn das Element $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ festgehalten wird, wobei es die verschiedenen Bezeichnungen $\mathfrak{E}_{\delta_1}^{\gamma_1}$, $\mathfrak{E}_{\delta_2}^{\gamma_2}$, $\mathfrak{E}_{\delta_3}^{\gamma_3} \ldots$ erfährt, die Paare $\mathfrak{D}_{\delta_1}\mathfrak{F}_{\gamma_1}$, $\mathfrak{D}_{\delta_1}\mathfrak{F}_{\gamma_2} \ldots$ $\mathfrak{D}_{\delta_3}\mathfrak{F}_{\gamma_3} \ldots$ projectivische Reihen durchlaufen. Man setze zu diesem Zwecke, wenn $\mathfrak{F}_\gamma$, $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ zusammengehören und P, Q, R, S vier feste Punkte einer Ebene sind,

$$A_2 B_2 \mathfrak{F}_\gamma \ldots \;\overline{\wedge}\; P(QRS \ldots)$$
$$AB\mathfrak{D}_\delta \ldots \;\overline{\wedge}\; Q(RPS \ldots)$$

endlich für die Reihen $\mathrm{II}_\alpha \mathrm{II}_\gamma$ jedesmal

$$B_1 A_1 \mathfrak{E}_\delta^\gamma \ldots \;\overline{\wedge}\; R(QPS \ldots)$$

Das Strahlbüschel, welcher so aus II entsteht, erzeugt mit denen, die aus den Reihen $\mathrm{II}_1 \mathrm{II}_2 \ldots$ sich ergeben, Strahlen $p_1 p_2 p_3$, die durch den Punkt P gehen. Dies Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3$ ist zu den Reihen II' projectivisch; insbesondere erzeugen die Strahlbüschel, die aus I und II_δ entstehen, PS und es gehören PQ und PR den Elementen A_1 und B_1 der Reihen II' zu; $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und $P(QRS\ldots)$ sind also identisch. Daher ent-

sprechen jedem Tripel $\mathfrak{E}_\delta^\gamma \mathfrak{D}_\delta \mathfrak{F}_\gamma$ drei Geraden, die einen bestimmten Punkt der Ebene mit P, Q, R verbinden. Aus der Symmetrie dieser Beziehung folgt, dafs irgend zwei Elemente des Tripels sich projectivisch bewegen, wenn das dritte festbleibt. Es gehört also jeder Zusammenstellung $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ ein Element $\mathfrak{F}_\gamma$, jedem Paare $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$ und $\mathfrak{F}_\gamma$ ein Element $\mathfrak{D}_\delta$ zu.

Eine Ausnahme hiervon machen allein die Paare AB_2 und A_2B der Reihen II und I_α, A_2B_1 und B_2A_1 der Reihen I_α und II_λ, und endlich die Zusammenstellungen AB_1 und A_1B der Reihen II und II_λ, denen je unendlich viele Elemente zugeordnet werden. So entspricht z. B. B_2 dem Gliede AA_1 der Involution I, und um diese Gruppe entstehen zu lassen, hat man A_1 jedem beliebigen Element von II zuzuordnen.

Alle Coincidenzelemente der Involution I mit der Reihe I_α, und keine anderen Elemente vereinigen in sich drei zusammengehörige Elemente $\mathfrak{E}_\delta^\gamma$, $\mathfrak{D}_\delta$ und $\mathfrak{F}^\gamma$. Wir können sie daher ermitteln, wenn wir jede Reihe II_δ' mit der einen Reihe I_α zur Coincidenz bringen, woraus Glieder der Involution III_α A_1A_2, B_1B_2 entstehen, und feststellen, wie oft ein Paar das Element $\mathfrak{D}_\delta$ enthält, dem es zugehört. Die Involution erscheint aber in einer Anordnung, welche zu den Reihen homologer Glieder II_γ der Reihen II_γ' und darum auch zu der einen Reihe II projectivisch ist. Den Paaren A_1A_2 und B_1B_2 gehören in allen charakterisirenden Reihen II_γ die Elemente A_1 und B_1 und darum in II die Elemente B und A zu. Die Elemente also, welche den Reihen gleichzeitig angehören

$$\text{I)} \qquad A_1A, B_1B, \mathfrak{C}_1\mathfrak{C} \ldots \overline{\wedge}\ \mathrm{I}_\alpha)\ B_2, A_2, \mathfrak{C}_2' \ldots,$$

sind auch den beiden Reihen

$$\text{II)} \qquad A, B, \mathfrak{D} \ldots \wedge\ \mathrm{III}_\alpha)\ B_1B_2, A_1A_2, \mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_2' \ldots$$

gemeinsam. $\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_2'$ verändert sich projectivisch zu $\mathfrak{C}_2'$, weil es der festen Reihe II_1' mit I_α gemeinsam ist. Die unter einander projectivischen Reihen III_1', III_2', $\mathrm{III}_3' \ldots$, welche aus homologen Gliedern der Reihen III_α entstehen, sind also auch mit den Reihen I_α' projectivisch. Da alle Reihen III_α Anordnungen derselben Involution sind, so kann man ganz dasselbe erreichen, wenn man auf irgend eine von ihnen III alle projectivischen Anordnungen $\mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_2\ \mathrm{IV}_3 \ldots \mathrm{IV}_\alpha$ von II bezieht, bei welchen B und A den Gliedern A_1A_2 und B_1B_2 von III zugeordnet werden. Die Reihen

homologer Glieder IV'_α werden sich projectivisch zu den I'_α ergeben, wenn III und IV_α dieselbe Gruppe erzeugen, wie II und III_α und wie I und I_α.

Die übrigen Elemente der Gruppe, zu denen C_2 gehört, sind den beiden Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{E}C_2 \ldots \barwedge B_2, A_2, C_2 \ldots$$

gemeinsam. Für diese Gruppe allein kann man $\mathfrak{E}C_2$ und C_2 diejenige Rolle spielen lassen, die vorher BB_1 und A_2 inne hatten. Die gesuchten Elemente müssen daher zwei projectivischen Reihen

$$C_2B_2, C_2A_1 \ldots \barwedge A, \mathfrak{E} \ldots$$

gemeinsam sein. Die Involution zerfällt aber in C_2 und in eine zu ihr und $A, \mathfrak{E} \ldots$ projectivische Reihe $B_2, A_1 \ldots$ Aufser C_2 enthält mithin die untersuchte Gruppe noch ein bestimmtes Paar der Involution zweiter Ordnung $AA_1, \mathfrak{E}B_2$, das natürlich auch der Involution $\mathfrak{E}A_2, BB_1$ angehört. Mit Ausnahme einzelner besitzt daher jede vorhandene Involutionsgruppe drei verschiedene Elemente C, C_1, C_2; D, D_1, D_2; ...

Irgend zwei beliebige dieser Gruppen können dazu dienen, alle anderen zu erzeugen. Um nämlich die Paare DD_1 und $D'D'_1$ zu erhalten, die D_2 zu je einer Gruppe von AA_1A_2, BB_1B_2 und AA_1A_2, CCC_2 ergänzen, hat man zuerst die Glieder $D_2\mathfrak{D}$ und $D_2\mathfrak{D}'$ der Involutionen AA_1, $BB_1, \mathfrak{E}C_2$ und $AA_1, B_2\mathfrak{E}, CC_1$ aufzusuchen. Alsdann gehört DD_1 zur Involution $AA_1, B_2\mathfrak{D}$ und D'_1D' zur Involution $AA_1, C_2\mathfrak{D}'$. Beiden Involutionen ist aufser AA_1 nach dem Vorigen noch das Paar gemeinsam, welches D_2 zu einem Gliede der Involution $AA_1M, B_2\mathfrak{E}C_2$ ergänzt. Da DD_1 und $D'D'_1$ mit AA_1, aber ebenso auch mit A_1A_2 und A_2A zu je einer Involution gehören, so fallen sie zusammen.

Diesen Schlufs mehrmals anwendend erkennt man, dafs aus irgend zwei Gruppen CC_1C_2 und DD_1D_2 die Reihenpaare

$$CC_1, DD_1, \mathfrak{E}\mathfrak{E}_1 \ldots \barwedge D_2, C_2, \mathfrak{E}'_2 \ldots,$$

wo nur $\mathfrak{E}'_2$ variabel ist, sich herstellen lassen, deren Coincidenzgruppen sämmtlich Glieder der untersuchten Involution sind, und dafs die letzteren alle in dieser Art darstellbar sind. Irgend eine Reihe von Gruppen derselben bedingt eine ganz bestimmte Anordnung $\mathfrak{E}'_2\mathfrak{E}''_2\mathfrak{E}'''_2 \ldots$ von Elementen, die, damit sie entstehen, $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ zugeordnet werden müssen. Die verschiedenen einförmigen Gebilde, welche auf diese Weise eindeutig auf die Anordnung

der Involution dritter Ordnung bezogen sind, entsprechen auch einander eindeutig. Es ist ungemein wichtig, zu zeigen, dafs alle diese Reihen unter sich projectivisch sind. Weil aber die bezüglichen Schlüsse sich später wörtlich wiederholen, so wollen wir diese Überlegung hier nicht durchführen. Offenbar kann man dann die Involution dritter Ordnung zu ihren charakterisirenden Feldern projectivisch setzen.

Der Hauptsatz der Involutionstheorie wird aber der sein, dafs nicht nur jeder Gruppe ein Element in jedem charakterisirenden Felde entspricht, sondern auch umgekehrt jedem Elemente des letzteren eine Gruppe zugehört. Dabei braucht man diesen Nachweis nur für irgend ein einförmiges Gebilde zu leisten. Wählt man ein Strahlbüschel mit imaginärem Centrum als Beispiel, so kommt es auf den Nachweis an, dafs ein Involutionsfeld der §§ 27—30 mit einem projectivischen Punktfelde im Allgemeinen drei, stets aber überhaupt gemeinsame Punkte hat. Hierbei würden sich die singulären Punkte, welche in ihren Gruppen mehrfach zählen, als sehr störend erweisen, wenn nicht gezeigt werden könnte, dafs es ihrer nur eine endliche Anzahl (höchstens vier) geben kann. Für das Involutionsfeld dritter Ordnung gelten ähnliche Stetigkeitsbetrachtungen, wie für dasjenige zweiter Ordnung.

Von diesen Sätzen sind die nachstehend für Involutionen $n$ter Ordnung aufgestellten Theoreme Verallgemeinerungen. Wir werden dieselben durch Schlüsse von n auf $n+1$ darthun.

§ 32. Auf eine feste Gliederung einer Involution $n-m$ter Ordnung werde eine Involution $m$ter Ordnung desselben Trägers projectivisch so bezogen, dafs zwei bestimmten Gruppen

$$A_1 A_2 \dots A_{n-m} \quad , \quad B_1 B_2 \dots B_{n-m}$$

der ersteren stets die Gruppen

$$B_{n-m+1} B_{n-m+2} \dots B_n \quad , \quad A_{n-m+1} A_{n-m+2} \dots A_n$$

entsprechen, einer dritten Gruppe $\mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}'_2 \dots \mathfrak{C}'_{n-m}$ aber eine veränderliche Gruppe $\mathfrak{C}_{n-m+1} \dots \mathfrak{C}_n$ der zweiten zugehört. Wenn man von speciellen Lagen der letzteren absieht, haben beide Reihen genau n Coincidenzelemente $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$, welche eine Gruppe der Involution

$$A_1 A_2 \dots A_n \quad , \quad B_1 B_2 \dots B_n$$

bilden. Sie ist eindeutig bestimmt durch die Gruppe $\mathfrak{G}_{n-m+1} \ldots \mathfrak{G}_n$, welche der Gruppe $\mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}'_2 \ldots \mathfrak{G}'_{n-m}$ zugeordnet werden mufs, damit sie entstehe[16].

§ 33. Um eine solche Erzeugungsweise der Involution zu erhalten, kann man erstens zwei Gruppen derselben $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ willkürlich auswählen, und alsdann, nachdem m ($< n$) beliebig festgesetzt ist, in irgend einer Weise die Gruppen in je zwei andere

$$\begin{array}{ll} A_1 A_2 \ldots A_{n-m} & A_{n-m+1} \ldots A_n \\ B_1 B_2 \ldots B_{n-m} & B_{n-m+1} \ldots B_n \end{array}$$

zerlegen. Wenn dann jeder der beiden Gruppen von $n-m$ Elementen die kreuzweis stehende zugeordnet wird, einer dritten Gruppe der ersteren Involution aber nach und nach jede Gruppe der letzteren, so ergeben sich stets die Gruppen der Involution $n$ter Ordnung.

Ist eine feste Gruppe $\mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}'_2 \ldots \mathfrak{G}'_{n-m}$ ausgewählt, so entspricht einer bestimmten Anordnung der Involution $n$ter Ordnung eine bestimmte Aufreihung der Involution $m$ter Ordnung.

$$A_{n-m+1} \ldots A_n \quad , \quad B_{n-m+1} \ldots B_n \, ,$$

jeder Gruppe der ersteren diejenige der letzteren, welche $\mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}'_2 \ldots \mathfrak{G}'_{n-m}$ zugeordnet werden mufs, damit sie entstehe. Den Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 \ldots B_n$ entsprechen $A_{n-m+1} \ldots A_n$ und $B_{n-m+1} \ldots B_n$. Alle diese für die Anordnung der Involution charakteristischen Reihen sind mit einander projectivisch. Zu ihnen wird die Involution projectivisch gesetzt.

Zusatz 1. Die Involution ist durch irgend zwei ihrer Gruppen bestimmt.

Zusatz 2. Irgend ein Element des Trägers gehört entweder nur einer Gruppe an oder allen. Im letzteren Falle zerfällt die Involution in eine solche $n-1$ter Ordnung und dies gesonderte Element.

Zusatz 3. Sind $U_1, U_2, U_3, U_4 \ldots$ und $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots$ Involutionen $n-m$ter und $m$ter Ordnung resp., und ist eine Gruppe G von n Punkten ein Glied aller Involutionen $U_1 V_2$, $V_1 U_2$; $U_1 V_3$, $V_1 U_3$; $U_1 V_4$, $V_1 U_4$; ..., so ist $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots \barwedge V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots$

§ 34a. Wenn von einer Gruppe der Involution nur ein Element C_1 gegeben ist, und $C_1 \mathfrak{G}_3 \mathfrak{G}_4 \ldots \mathfrak{G}_n$ ein Glied der Involution $A_2 A_3 \ldots A_n$,

$B_2 B_3 \ldots B_n$ ist, so bilden $C_2, C_3, \ldots C_n$ eine Gruppe der beiden Involutionen:

1) $A_2 A_3 \ldots A_n$, $B_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_n$ und 2) $B_2 B_3 \ldots B_n$, $A_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_n$.

Sie sind die Doppelelemente der Reihen

$$A_3 A_4 \ldots A_n, \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_4 \ldots \mathfrak{C}_n, \ldots \barwedge B_1, A_2, \ldots,$$

wenn auf das durch B_2 bestimmte Glied der Involution das Element C_1' bezogen wird, das mit C_1 ein Paar der Involution $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bildet. Hat die den Involutionen 1) und 2) gemeinsame Gruppe bei C_1 ein $p-1$ faches Element, so ist C_1 ein p faches Element in der untersuchten Gruppe der Involution $n$ter Ordnung. Solche Gruppen werden als singuläre Gruppen, die mehrfachen Elemente als singuläre Elemente der Involution bezeichnet. Es kann in einer Involution $n$ter Ordnung höchstens $2(n-1)$ Elemente solcher Art geben.

§ 34b. Bei einer Involution mit einem $n$fachen Element D_1 als Gruppe giebt es im Allgemeinen $n-1$ gewöhnliche Doppelelemente. Findet man l verschiedene $p_1, p_2, \ldots p_l$ fach zählende singuläre Elemente, so ist

$$p_1 + p_2 + \ldots p_l = n - 1 + l.$$

Bei einer allgemeinen Involution können neben einem $p_1$fachen Elemente noch $2n - 1 - p_1$, neben einem $p_1$fachen und einem $p_2$fachen noch $2n - p_1 - p_2$ andere singuläre Elemente auftreten.

§ 35. Eine Strahleninvolution wird von jeder Geraden in einer projectivischen Punktinvolution $n$ter Ordnung geschnitten, diese aber von jedem Punkt aus durch eine projectivische Strahleninvolution projicirt. Daher kann alles Übrige zurückgeführt werden auf die Betrachtung von Strahleninvolutionen mit einem beliebigen imaginären Mittelpunkt A. Wir nehmen ihn in der Unendlichkeit an. Alsdann wird eine Strahlengruppe durch den unendlich fernen Strahl und $n-1$ reelle Punkte der Endlichkeit repräsentirt, jede andere Gruppe aber durch n im Endlichen liegende Punkte. Die Betrachtung der Involutionen kann also ersetzt werden durch die Betrachtung reeller in einer Ebene ausgebreiteter Gruppen zu n Punkten, bei welchen aber der involutorische Charakter erhalten bleibt, dafs jeder Punkt nur in einer Gruppe auftritt. Eine solche Gesammtheit wollen

wir ein involutorisches Punktfeld $n$ter Ordnung nennen und zwei solche Felder projectivisch, wenn sie geeignet sind, zu einander projectivische Involutionen mit den Grundpunkten als Centren darzustellen. Sie sind alsdann stetig auf einander bezogen.

Anm. Diesem Falle war die Bezeichnung in den §§ 32—34 angepafst; $A_\lambda B_\mu \mathfrak{C}_\nu$ bezeichnen in der Ebene veränderliche Punkte.

§ 36a. Ein involutorisches Feld $n$ter Ordnung ist durch zwei Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n \qquad B_1 B_2 \ldots B_n$$

vollständig bestimmt. C_1 gehört mit $n-1$ anderen Punkten $C_2 C_3 \ldots C_n$ zu einer Gruppe. Wird C_1 genügend nahe bei A_1 genommen, so rücken von den übrigen einzelne an einfache, und je p verschiedene an $p$fache Punkte der Gruppe $A_2 A_3 \ldots A_n$ so nahe heran, wie man nur immer will.

b. Liegen von einer Gruppe $B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ m Punkte bei A_1, A_2, $\ldots A_m$, die Übrigen $B'_{m+1}, B'_{m+2}, \ldots B'_n$ aber $m-n$ Stellen $B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots B_n$ des Involutionsfeldes nahe, welche von $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots A_n$ endlich entfernt sind, so nähern sich von jeder anderen Gruppe der Involution $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B'_1 B'_2 \ldots B'_n$ m Punkte den Stellen $A_1 A_2 \ldots A_m$ und $n-m$ andere einer bestimmten Gruppe der Involution $A_{m+1} \ldots A_n$; B_{m+1}, $B_{m+2} \ldots B_n$.

§ 37. Das involutorische Feld sei auf ein Punktfeld mit dem Centrum **B** projectivisch so bezogen, dafs den Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ resp. entsprechen. Die den Halbketten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entsprechenden involutorischen Halbketten $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ bestehen mit Ausnahme einzelner aus je n ganz im Endlichen liegenden Zweigen, welche in bestimmter Weise die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ mit den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_n$ verbinden. Nur in einem $p$fachen Punkt der Involution fliefsen p von ihnen in einen $2p$strahligen Stern zusammen. Die p Strahlen, welche vom Mittelpunkt desselben aus nach Punkten der ersteren Gruppe führen, werden von denjenigen getrennt, welche nach Punkten der zweiten Gruppe führen. Die $2p$ Halbtangenten in dem $p$fachen Punkt ergänzen einander zu je zweien und bilden eine reelle Gruppe einer Hauptstrahlen-Involution $p$ter Ordnung, die nämlich zwei

p fache nach dem Grundpunkt und seinem conjungirten führende p fache Strahlen besitzt. Keine zwei Halbketten des Büschels haben aufser $A_1, A_2, \dots A_n$ und $B_1, B_2, \dots B_n$ gemeinsame Punkte. Eine von ihnen enthält die ganze unendlich ferne Gerade; alle übrigen liegen ganz im Endlichen. Mit der Halbkette $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verändert auch die entsprechende $A_1 A_2 \dots A_n$, $B_1 B_2 \dots B_n$ sich stetig in ihrem Büschel. Die Tangenten in $A_1, A_2, \dots A_n$ drehen sich dabei alle in einer, die in $B_1, B_2, \dots B_n$ alle in der entgegengesetzten Richtung. In den reell-projectivischen Büscheln entsprechen die imaginären Strahlen

$$A_1 \mathrm{A}, A_2 \mathrm{A}, \dots A_n \mathrm{A}, B_1 \mathrm{A}^1, B_2 \mathrm{A}^1, \dots B_n \mathrm{A}^1, \mathfrak{A}\mathrm{B}, \mathfrak{B}\mathrm{B}^1$$

einander. Beide Felder sind daher in den kleinsten Theilen wie die Felder zweier projectivischer Strahlbüschel bezogen.

Enthält die Gruppe $A_1 A_2 \dots A_n$ einen p fachen Punkt D, so ist die Hauptinvolution, welche die Tangenten in diesem Punkte bilden, reell-projectivisch auf das Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}$ so bezogen, dafs den p fachen imaginären Strahlen $D\mathrm{A}$, $D\mathrm{A}^1$ die Strahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}$, $\mathfrak{A}\mathrm{B}^1$ zugehören. Die Tangenten in D bewegen sich in gleicher Richtung mit denen in $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots A_n$, in entgegengesetzter Richtung zu denen in $B_1, B_2, \dots B_n$. Liegt D im Unendlichen, so geht jede Halbkette mit p Zweigen in's Unendliche. Ihre p Halbasymptoten führen alle nach einem bestimmten Punkte E der Ebene und gehören einer Gruppe der Hauptinvolution p ter Ordnung um E an. Dieselbe ist auf das Büschel in $\mathfrak{A}$ so bezogen, dafs den p fachen Strahlen $E\mathrm{A}$ und $E\mathrm{A}^1$ die Strahlen $\mathfrak{A}\mathrm{B}^1$ und $\mathfrak{A}\mathrm{B}$ zugehören. Die Asymptoten bewegen sich daher in entgegengesetzter Richtung zu den Tangenten in $A_{p+1}, \dots A_n$ und in gleicher mit denen in $B_1, B_2, \dots B_n$.

§ 38. Nur eine der Ketten $A_1 A_2 \dots A_n \circ B_1 B_2 \dots B_n$, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beigeordneten Ketten $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ entsprechen, enthält die unendlich ferne Gerade. Jede andere besteht aus höchstens n verschiedenen, ganz im Endlichen gelegenen, geschlossenen Zügen, von denen nur in einem p fachen Punkte p zusammenfliefsen können. Mit der Kette $A \circ \mathfrak{B}$ ändert sich auch die entsprechende $A_1 A_2 \dots A_n \circ B_1 B_2 \dots B_n$ stetig. Wenn jene sich um einen der Punkte $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ zusammenzieht, schliefst diese sich mit n getrennten kleinen Zügen um die Punkte $A_1, A_2, \dots A_n$ resp. $B_1, B_2,$

$\dots B_n$. Durch Angabe eines Punktes ist ein Individuum der $A_1 A_2 \dots A_n$ und $B_1 B_2 \dots B_n$ beigeordneten Schaar bestimmt.

Mit jeder Halbkette $A_1 A_2 \dots A_n$, $B_1 B_2 \dots B_n$ hat jede Kette $A_1 A_2 \dots A_n \circ B_1 B_2 \dots B_n$ die Punkte einer Gruppe gemeinsam; sie entspricht dem einzigen Schnittpunkte der Curven $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$, denen jene zugehören. Von einer nicht singulären Gruppe liegt auf jedem Zweige der Halbkette genau ein Punkt; in jedem schneiden die beiden Tangenten der Curven ein Paar des imaginären Grundpunktes A aus. Jede Curve $A_1 A_2 \dots A_n \circ B_1 B_2 \dots B_n$ trennt daher jeden Punkt der ersteren Gruppe von wenigstens einem der letzteren.

§ 39. Liegen zwei gegebenen Gruppen

$$A_1 A_2 \dots A_n \qquad \text{und} \qquad B_1 B_2 \dots B_n$$

zwei andere

$$A'_1 A'_2 \dots A'_n \qquad \text{und} \qquad B'_1 B'_2 \dots B'_n$$

in der Art genügend nahe, dafs bei einem $p$fachen Punkte p getrennte oder zum Theil zusammenfallende (des zweiten Involutionsfeldes) sich finden, so kann man irgend einer Gruppe $C_1 C_2 \dots C_n$ der ersten Involution eine solche $C'_1 C'_2 \dots C'_n$ der zweiten beliebig nähern, und wenn man die bisherigen Paare entsprechend setzt, auch jeder vierten Gruppe ihre zugehörige.

Zusatz 1. Bei der Darstellung zweier solcher Involutionen mit demselben imaginären Centrum liegen nicht nur entsprechende Ketten, sondern auch in benachbarten Punkten derselben ihre Tangenten einander nahe, wenn man von den singulären Punkten des festen Feldes absieht.

Zusatz 2. Zwei Ketten eines involutorischen Feldes, die zwei nicht singuläre benachbarte Punkte desselben mit zwei Gruppen $A_1 A_2 \dots A_n$ und $B_1 B_2 \dots B_n$, verbinden, haben in jenen einander nahe liegende Tangenten.

Anm. Im folgenden Abschnitte werden wir von vorne herein den Fall der Strahleninvolutionen mit imaginären Centren betrachten.

Dritter Abschnitt.

Erweisung der vorstehenden Sätze durch Schlüsse von n auf $n+1$.
§§ 40—70.

§ 40. Die Sätze des Abschnittes II sind im Abschnitt I für Involutionen zweiter Ordnung ($n = 2$) vollständig bewiesen. § 32 ergiebt unter solchen Umständen eine Definition der Involution dritter Ordnung; die §§ 33—39 stellen Lehrsätze über sie auf. Sind dieselben erprobt, so kann man unmittelbar zu den Involutionen vierter Ordnung übergehen. Wir wollen zeigen, dafs Definitionen und Lehrsätze für Involutionen $n+1$ter Ordnung vereinbar sind, wenn dies für alle Involutionen bis zur $n$ten Ordnung hinauf der Fall ist. Die Glieder einer neuen Reihe mögen also aus den Coincidenzpunkten der projectivischen Involutionen desselben Trägers A

I) $A_1 \ldots A_{n-m+1}$, $B_1 \ldots B_{n-m+1}$, $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' \ldots \mathfrak{G}_{n-m+1}', \ldots \overline{\wedge}$
II) $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$, $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$, $\mathfrak{G}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{G}_{n+1}, \ldots$

bestehen. Ein einzelnes Glied wird durch die Gruppe $\mathfrak{G}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{G}_{n+1}$ festgelegt, welche der festen Gruppe $\mathfrak{G}_1' \ldots \mathfrak{G}_{n-m+1}'$ der ersten Involution zugeordnet werden mufs, damit es entstehe. Ein Punkt, der nicht beiden Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ gemeinsam ist, gehört nur einer Gruppe der Involution $n+1$ter Ordnung an. Denn er bestimmt, wenn er mit keinem der A_λ oder B_μ zusammenfällt, je eine neue Gruppe der beiden erzeugenden Involutionen. Da dieselben einander entsprechen müssen, so ist auch die projectivische Beziehung der beiden Reihen gegeben, und damit auch die Gruppe $\mathfrak{G}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{G}_{n+1}$. Fällt der Punkt aber etwa mit A_1 zusammen, welche Stelle der Gruppe B nicht angehört, so bestimmt er nur das eine Glied $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ der ersten und ein von $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ verschiedenes Glied der zweiten Involution. Die beiden letzteren und folglich (§ 16, Zusatz 1) alle Glieder der zweiten Involution werden somit $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ zugewiesen. Ebenfalls nach § 16 werden aber ebenso dem einen Gliede $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ der zweiten Reihe alle Glieder, unter ihnen auch $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' \ldots \mathfrak{G}_{n-m+1}'$, der ersten Involution zu-

geordnet. Daraus folgt, dafs $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ ein Glied der Involution ist und durch $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ charakterisirt wird. Aus denselben Gründen ist $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ eine durch $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ charakterisirte Gruppe der Involution.

§ 41. Die Involution $n+1$ter Ordnung ergiebt sich auch aus den projectivischen Reihen:

$$\begin{array}{ll} \text{III)} & A_1 A_2 \ldots A_{n-m}\,,\; B_1 B_2 \ldots B_{n-m}\,,\; \mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}'_2 \ldots \mathfrak{D}'_{n-m} \ldots \;\barwedge \\ \text{IV)} & B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}\,,\; A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}\,,\; \mathfrak{D}_{n-m+1} \ldots \mathfrak{D}_{n+1}\,, \end{array}$$

und zwar wird in beiden Fällen dasselbe Glied der Involution erhalten, wenn

$$\begin{array}{l} B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}\,,\; A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}\,,\; \mathfrak{C}'_{n-m+2} \ldots \mathfrak{C}'_{n+1}\,,\; \mathfrak{C}_{n-m+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots \;\barwedge \\ B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}\,,\; A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}\,,\; \mathfrak{D}'_{n-m+1} \ldots \mathfrak{D}'_{n+1}\,,\; \mathfrak{D}_{n-m+1} \ldots \mathfrak{D}_{n+1}, \ldots \end{array}$$

gesetzt wird, die Gruppen mit gestrichenen Buchstaben aber so bestimmt werden, dafs irgend ein Element $\mathfrak{A}$ ein Coincidenzelement zweier Reihenpaare I, II und III, IV ist.

Auf eine Anordnung I der Involution $n-m+1$ter Ordnung des § 40 haben wir, um alle Glieder der Involution $n+1$ter Ordnung zu erhalten, alle zu ihr projectivischen Anordnungen II_1, II_2, $\text{II}_3 \ldots \text{II}_\alpha$ der Involution II zu beziehen, welche die Gruppen $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ und $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ entsprechend gemein haben. Die Gruppen, welche in den verschiedenen Reihen II_α je derselben Gruppe der Involution I angehören, bilden unter sich projectivische Reihen II'_1, II'_2, $\text{II}'_3 \ldots$, welche die Gruppen $A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ und $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ entsprechend gemein haben, und von denen die homologen Punkte den Reihen II_γ angehören. Bezieht man nämlich die Involution projectivisch auf die Punkte einer Geraden, so entstehen aus den Anordnungen II_1, II_2, $\text{II}_3 \ldots$ der Involution projectivische Punktreihen, welche zwei Punkte M und N entsprechend gemein haben. Die homologen Punkte derselben liegen nach § 19 projectivisch geordnet; ihnen entsprechen rückwärts die Reihen II'_δ. Durch irgend ein Glied der Reihe II'_δ ist eine Gruppe der Involution V $n+1$ter Ordnung eindeutig bestimmt. Denn bei der projectivischen Zuordnung zwischen I und II mufs es dem bestimmten Gliede g von I zugesellt werden, aus dem II'_δ

entsprang. Daher werden II_1', II_2', II_3', ... als charakteristische Reihen der Involution V bezeichnet.

Wegen $n+1>2$ ist bei passender Bezeichnung $n-m$ wenigstens gleich 1. Die Gruppen der Involution I) oder $A_1 A_2 \dots A_{n-m+1}$, $B_1 B_2 \dots B_{n-m+1}$ $n-m+1$ ter Ordnung sind nach § 32 der festen Anordnung III der Involution $n-m$ ter Ordnung

$$A_1 A_2 \dots A_{n-m}\,,\; B_1 B_2 \dots B_{n-m} \dots$$

mit sämmtlichen projectivischen Reihen

$$B_{n-m+1}\,,\; A_{n-m+1} \dots\,,$$

$I_1, I_2, I_3 \dots$ gemeinsam. Dabei sind A_{n-m+1}, B_{n-m+1} ganz beliebige Punkte ihrer Gruppen (§ 33). Die homologen Punkte aller Reihen I_δ ergeben die charakteristischen Reihen

$$I_1',\; I_2',\; I_3',\; \dots\,,$$

welche alle die Punkte A_{n-m+1} und B_{n-m+1} entsprechend gemein haben, und deren homologe Punkte wieder in den Reihen I_δ vereinigt liegen. Sie sind zu der gegebenen Anordnung I der Involution $A_1 A_2 \dots A_{n-m+1}$, $B_1 B_2 \dots B_{n-m+1}$ und also auch zu den Reihen

$$II_1,\; II_2,\; II_3,\; \dots II_\sigma$$

projectivisch. Den Gruppen $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$ und $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ der letzteren gehören in allen Feldern I_λ' die gemeinsamen Punkte B_{n-m+1} und A_{n-m+1} derselben zu. Denn die jenen entsprechenden Gruppen $B_1 \dots B_{n-m+1}$ und $A_1 \dots A_{n-m+1}$ werden in allen Feldern I_ε' durch diese charakterisirt (§ 40).

Um eine bestimmte Gruppe der Involution V $(n+1)$ter Ordnung zu erhalten, mufs man die ihm entsprechende Reihe II_δ auswählen. Zwei beliebige Gruppen g_α und h_β der Involutionen III und II_δ bestimmen einen zugehörigen Punkt, der nämlich in der Reihe I_β der Gruppe g_α entspricht, oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, in der Reihe I_α' der Gruppe h_β[17]. Alle Punkte der gesuchten Gruppe G_δ entsprechen den beiden Gruppen der Involutionen III und II_δ, denen sie angehören. Um sie zu bestimmen, kann man also erst die Coincidenzgruppen zwischen II_δ und I_1', I_2', I_3', ... aufsuchen und alsdann feststellen, wie oft eine solche

Coincidenzgruppe mit der Gruppe $g_1, g_2, g_3 \ldots$ von III, der sie zugehört, einen Punkt gemein hat. Alle diese Punkte müssen, und keine anderen können den Reihen I und II_δ gemeinsam sein. Die Reihe II_δ hat aber mit $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \mathrm{I}_3' \ldots$ die Gruppen der Involution IV oder $B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}, A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}$ gemeinsam, und zwar erhält man sie (§ 33) projectivisch mit den Reihen homologer Glieder $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ der I', also auch projectivisch zu der Reihe III. Da dem Gliede $A_1 A_2 \ldots A_{n-m}$ der letzteren für $A_1 A_2 \ldots A_{n-m+1}$ (§ 40) jedes beliebige Element des Trägers zugehört, diesem Gliede von I aber $B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ entspricht, so gehört in IV_δ $B_{n-m+1} B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ der Gruppe $A_1 \ldots A_{n-m}$ und ebenso $A_{n-m+1} A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ der Gruppe $B_1 \ldots B_{n-m}$ zu. Die Aufgabe, die Coincidenzpunkte der Reihen I und II_δ aufzusuchen, läfst sich mithin vollständig ersetzen durch die andere, die projectivischen Reihen

III)	$A_1 A_2 \ldots A_{n-m}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n-m}, \ldots$	und
IV_δ)	$B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}$, $A_{n-m+1} \ldots A_{n+1}, \ldots$	

zur Coincidenz zu bringen. Wird nun die ursprüngliche Beziehung, also II_δ, geändert, so werden einer festen Gruppe g_α der Involution III nach und nach die Coincidenzgruppen ihrer Reihe I_α' mit den Reihen $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3, \ldots$ zugeordnet. Daher ergeben sich die Gruppen von IV, welche g_α für die verschiedenen Glieder der Involution V $(n+1)$ter Ordnung zugeordnet werden, in einer zu den Feldern $\mathrm{II}_1', \mathrm{II}_2', \mathrm{II}_3', \ldots$ projectivischen Anordnung. Auch hier mufs man g_α die Gruppen $A_{n-m+1} A_{n-m+2} \ldots A_{n+1}$ beziehlich $B_{n-m+1} B_{n-m+2} \ldots B_{n+1}$ zuordnen, damit $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ entstehen. Damit ist der aufgestellte Lehrsatz völlig bestätigt.

§ 42. Man zerlege die beiden ausgezeichneten Gruppen irgendwie in je zwei Gruppen

$$\begin{array}{ll} A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} \ldots A_{i_{n-r+1}} & A_{i_{n-r+2}} \ldots A_{i_{n+1}} \\ B_{k_1} B_{k_2} B_{k_3} \ldots B_{k_{n-r+1}} & B_{k_{n-r+2}} \ldots B_{k_{n-1}} \end{array}$$

zu $n-r+1$ und r Punkten. Jeder Gruppe ordne man die kreuzweis stehende, einer dritten festen Gruppe $\mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_2' \ldots \mathfrak{C}_{n-r+1}'$ der ersteren Involution aber nach und nach alle Gruppen $\mathfrak{C}_{n-r+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ der letzteren zu. Die gemeinsamen Punkte je zweier so projectivisch bezogener Reihen bilden je eine Gruppe der Involution $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$. Die

Gruppen $\mathfrak{C}_{n+r+2} \dots \mathfrak{C}_{n+1}$, die bei verschiedenen Zerlegungen demselben Gliede der Involution $(n+1)$ter Ordnung zugehören, sind homologe Glieder projectivischer Reihen, in welchen die aus $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \dots B_{n+1}$ entnommenen Bestandtheile einander entsprechen.

Der Beweis folgt aus der mehrmaligen Anwendung von § 41.

§ 43. Es mögen jetzt Gruppen von $n-1$ Elementen mit A, B', C'', $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}', \mathfrak{C}''$ u. s. w. bezeichnet werden, die Punkte $\mathfrak{A}_\lambda B'_\mu C''_\nu$ u. s. w. der Ebene aber nach wie vor einzelne Elemente des Trägers A anzeigen.

Durch irgend ein Element C_2 des Trägers ist eine Gruppe CC_1C_2 von $n+1$ Elementen der Involution $n+1$ter Ordnung AA_1A_2, BB_1B_2 bestimmt. Ist $\mathfrak{C}C_2$ ein Glied der Involution AA_1, BB_1, ist B_1 in dem Gliede $\mathfrak{B}$ der Involution $A, \mathfrak{C}$ enthalten, ist endlich $C_1'C_2$ ein Glied der Involution A_1A_2, B_1B_2, so sind CC_1 die Coincidenzpunkte der beiden Reihen:

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C} \dots \barwedge B_2 C_1' A_1 \dots$$

Für viele Fälle reicht es aus, dafs CC_1 ein Glied der Involution $\mathfrak{C}B_2$, AA_1, sowie der analogen (z. B. von $\mathfrak{C}A_2, BB_1$) ist[18].

Anm. Es wird vorausgesetzt, dafs AA_1A_2 und BB_1B_2 nicht zusammenfallen.

Die Gruppe CC_1C_2 besteht (§ 42) aus den Coincidenzpunkten der beiden Reihen:

$$AA_1, \mathfrak{C}C_2, BB_1 \dots \barwedge B_2, C_2, A_2 \dots, \qquad 1)$$

und gehört daher (§ 40) der Involution

$$AA_1C_2 \quad , \quad \mathfrak{C}C_2B_2 \qquad 2)$$

an. Ihre Gruppen sind die Doppelpunkte der Reihen:

$$A, \mathfrak{C} \dots \barwedge C_2B_2, C_2A_1 \dots \text{ (§ 42).} \qquad 3)$$

Die letztere Involution zerfällt in das Element C_2 und die Reihe $B_2, A_2 \dots$, welche zu $A, \mathfrak{C}, \dots$ projectivisch ist (§§ 24—26). CC_1 ist mithin die Coincidenzgruppe zweier Reihen

$$A, \mathfrak{C} \dots \barwedge B_2, A_1 \dots, \qquad 4)$$

gehört der Involution $AA_1, \mathfrak{C}B_2$ an und besteht daher (§ 32) im Allgemeinen und höchstens aus n Punkten. Nach der Entwickelung von § 41 finden wir zu irgend einer Gruppe g von $A, \mathfrak{C}$ sein entsprechendes Glied

in 3), wenn wir die charakterisirende Reihe der Involution $AA_1, \mathfrak{C}C_2$, welche g bei der Erzeugungsweise $A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge C_2, A_1 \ldots$ zugehört, mit der projectivisch entsprechenden Reihe $B_2, C_2 \ldots$ zur Coincidenz bringen. Der besonderen Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$ (welche B_1 enthält), müssen aber, damit $AA_1, \mathfrak{C}C_2, BB_1$ entstehen, A_1, C_2 und B_1 zugeordnet werden; für die Erzeugung 3) von CC_1C_2 gehören ihr folglich die Doppelelemente $C_1'C_2$ der Reihen

$$A_1C_2B_1 \ldots \barwedge B_2C_2A_2 \ldots$$

zu, welche ein Paar der Involution (§§ 24—26) A_1A_2, B_1B_2 bilden. CC_1 besteht, wie behauptet wurde, aus den Coincidenzpunkten der Reihen

$$A\mathfrak{C}\mathfrak{B} \ldots \barwedge B_2A_1C_1' \ldots$$

Im Allgemeinen gehört C_2 der Gruppe CC_1 nicht an, und es besteht dieselbe aus n von einander verschiedenen Punkten $C_1, C_3, \ldots C_{n+1}$; CC_1C_2 enthält dann $n+1$ verschiedene Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{n+1}$. Es kann aber auch CC_1 bei C_2 einen p_2-1fachen, bei C_1 einen $p_1$fachen, bei C_3 einen $p_3$fachen, endlich bei C_l einen $p_l$fachen Punkt haben, wo dann

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_l = n + 1$$

ist. Alsdann sagen wir, dafs die zu C_2 gehörende Gruppe nur die l Punkte $C_1, C_2, \ldots C_l$ enthält, die aber $p_1$fach, $p_2$fach, $\ldots p_l$fach zählen. Vorläufig hängen die l Zahlen noch ab von der Art, wie wir die beiden ersten Gruppen eintheilten, davon, ob wir AA_1A_2 oder BB_1B_2 den Vorzug einräumten, endlich auch von dem Punkte, welchen wir von der untersuchten Gruppe als ursprünglich gegeben betrachteten und mit C_2 bezeichneten. Es könnten an die Stelle von $p_1, p_2, p_3, \ldots p_l$ die Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots q_l$ treten, wenn wir innerhalb der angegebenen Grenzen eine Veränderung eintreten lassen. Die Punkte $C_1, C_2, \ldots C_l$ selbst bleiben aber nach § 42 ungeändert. Später wird sich indessen ergeben, dafs die einzelnen Zahlen p von der besonderen Erzeugung der Involution unabhängig sind. Übrigens giebt es nur eine endliche Anzahl solcher singulärer Involutionsgruppen.

Unbestimmt kann die Gruppe CC_1 dann allein werden, falls AA_1A_2 und BB_1B_2 nur verschiedene Anordnungen derselben Gruppe von $n+1$ Punkten sind. Wenn die beiden etwa gemeinsame Gruppe nicht mehr als $n-2$ Punkte enthält, so kann sie nach § 42 in A resp. B hinein-

genommen werden. A_1 und A_2 sind dann von B_1 und B_2 verschieden. Daher kann $\mathfrak{C}$ den Punkt A_1 nicht enthalten, und es ist auch CC_1 als Gruppe von $\mathfrak{C}B_2, AA_1$ nicht unbestimmt. Ist aber AA_1A_2 und BB_1B_2 eine Gruppe $n$ter Ordnung $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ gemeinsam, die durch zwei verschiedene Elemente A_1 und B_1 ergänzt wird, so ist die Gruppe CC_1C_2 den beiden Reihen

$$\mathfrak{D}A_1, \mathfrak{D}B_1, \mathfrak{D}C_2 \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1, C_2$$

coincident und daher auch in diesem Falle völlig bestimmt ($\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1C_2$). Sind aber AA_1A_2 und BB_1B_2 nur verschiedene Anordnungen derselben Gruppe, ist also etwa A mit B, A_1 mit B_2, B_1 mit A_2 identisch, so hat man jeden einzelnen Punkt als der Beziehung

$$AA_1, AA_2, AC_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; A_1, A_2, C_2 \ldots$$

genügend anzusehen.

§ 44. Es seien AA_1A_2, BB_1B_2 und CC_1C_2 drei Gruppen derselben Involution, deren Erzeugung auf die beiden ersteren sich stützt, und es sei D_2 irgend ein anderer Punkt des Involutionsfeldes. Man müsse in den projectivischen Reihen

$$AA_1, BB_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2 \ldots$$

einer festen Gruppe die Punkte Y_1 und Z_1 zuordnen, damit $\mathfrak{C}C_2$ und C_2, sowie $\mathfrak{D}D_2$ und D_2 einander entsprechen; man müsse ferner einer festen Gruppe von AA_1, CC_1 die Elemente X_2 und Z_2 zuordnen, damit in den Reihen

$$AA_1, CC_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; C_2, A_2 \ldots$$

$B_2\mathfrak{C}$ und B_2, oder $\mathfrak{D}'D_2$ und D_2 einander entsprechen. Alsdann ist stets:

$$A_2B_2X_1Z_1 \;\overline{\wedge}\; A_2X_2C_2Z_2 \;.$$

Die festen Gruppen können nach der Entwickelung des § 41 beliebig ausgewählt werden; aus AA_1, BB_1 nehmen wir $\mathfrak{C}C_2$. Wir müssen ihr die Punkte A_2 uud B_2 zuordnen, wenn AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehen sollen, Y_1 fällt mit C_2 zusammen. Z_1 ergiebt sich aus der Beziehung

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2 \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, Z_1, D_2 \;.$$

Der eine Wurf ist also hier

$$A_2B_2C_2Z_1 \;.$$

Die Involution $AA_1, \mathfrak{C}C_2$ entsteht aus der Beziehung

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge C_2, A_1 \ldots$$

Der dritten Gruppe $\mathfrak{B}$, welche B_1 enthält, müssen A_1, B_1, C_2 zugeordnet werden, damit sich die Gruppen $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2$ ergeben. Es gehöre D_2 der Gruppe $\mathfrak{D}''$ der Involution $A, \mathfrak{C}$ an, und es sei

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'' \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 \ .$$

Nach § 33 ist dann

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2 \barwedge A_1, B_1, C_2, E_1 \ .$$

Man hat daher Z_1 aus

$$A_1 B_1 C_2 E_1 \barwedge B_2 A_2 Z_1 D_2$$

zu bestimmen.

Alsdann ist $A_2 B_2 C_2 Z_1$ der erste charakteristische Wurf, dessen Punkte also bei der von AA_1A_2 und BB_1B_2 ausgehenden Erzeugungsweise $AA_1, BB_1 \ldots \barwedge B_2, A_2 \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{C}C_2$ zugeordnet werden müssen, damit die zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen sich ergeben.

Die zweite Erzeugungsweise ist:

$$AA_1, CC_1 \ldots \barwedge C_2, A_2 \ldots$$

Der dritten Gruppe $B_2\mathfrak{C}$ (§ 43) der Involution AA_1, CC_1 müssen die Punkte A_2, B_2, C_2 zugeordnet werden, wenn die drei ersten Gruppen der Involution $(n+1)$ter Ordnung entstehen sollen. Die vierte Gruppe stellt sich ein, wenn man setzt:

$$AA_1, \mathfrak{C}B_2, CC_1, \mathfrak{D}'D_2 \barwedge C_2, Z_2, A_2, D_2 \ .$$

Die vier zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen der zweiten Erzeugungsweise sind also projectivisch zu $A_2 B_2 C_2 Z_2$, so dafs X_2 mit B_2 zusammenfällt. Nach unserer Behauptung mufs

$$A_2 B_2 C_2 Z_1 \barwedge A_2 B_2 C_2 Z_2$$

sein, also Z_1 mit Z_2 übereinstimmen. Die Involution $AA_1, \mathfrak{C}B_2, CC_1, \mathfrak{D}'D_2$ enthält die Coincidenzgruppen der Reihen:

$$A, \mathfrak{C} \ldots \barwedge B_2, A_1 \ldots$$

Der dritten Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$, die B_1 enthält, müssen die Punkte A_1 oder B_2 entsprechen, wenn die Gruppen AA_1 oder $\mathfrak{C}B_2$ entstehen sollen,

für CC_1 mufs ihr der Punkt C_1' zugeordnet werden, der mit C_2 ein Paar der Involution $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bildet (§ 43), so dafs

$$C_1' A_1 B_1 C_2 \barwedge C_1' B_2 A_2 C_2$$

ist. Endlich werde noch gesetzt:

$$A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'' \barwedge B_2 F_1 A_1 D_2 \barwedge C_2 E_1 A_1 D_2 \ ,$$

so ist nach § 33

$$AA_1 \, , \mathfrak{C}B_2 \, , CC_1 \, , \mathfrak{D}'D_2 \barwedge A_1 \, , B_2 \, , C_1' \, , F_1$$

und

$$A_1 B_2 C_1' F_1 \barwedge C_2 Z_2 A_2 D_2 \ .$$

Die Behauptung ist also an die nachstehende Folge projectivischer Beziehungen geknüpft:

$$\begin{array}{lcl} A\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}'' & \barwedge & C_2 E_1 A_1 D_2 \\ C_2 E_1 A_1 D_2 & \barwedge & B_2 F_1 A_1 D_2 \\ A_1 B_1 C_2 E_1 & \barwedge & B_2 A_2 Z_1 D_2 \\ C_1' A_1 B_1 C_2 & \barwedge & C_1' B_2 A_2 C_2 \\ A_1 B_2 C_1' F_1 & \barwedge & C_2 Z_2 A_2 D_2 \\ A_2 B_2 C_2 Z_1 & \wedge & A_2 B_2 C_2 Z_2 \ . \end{array}$$

§ 45. Fortsetzung. Die Gruppen A und B gewinnen nur durch die erste Reihe Einflufs. Nachdem E_1 durch den Wurf $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ aus C_2, A_1 und D_2 bestimmt worden ist, erfolgt Alles lediglich durch Combination des neu gewonnenen Punktes mit A_1, B_1, A_2, B_2, C_2 und D_2. Das System der Relationen bleibt also richtig oder falsch, wenn die Involution $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ zu sich selbst projectivisch geändert wird. Ist $A'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}''' \barwedge A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ ein Wurf einer anderen Involution von nicht höherer als der $n-1$ten Ordnung, enthalten $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{D}'''$ die Elemente B_1 und D_2, und ist $B'B_1$ ein Glied der Involution $A'A_1$, $\mathfrak{C}'C_2$, so knüpft sich der entsprechende Satz für die Involution $A'A_1 A_2$, $B'B_1 B_2$ an ganz dieselben Beziehungen.

Wir ersetzen nun $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}''$ durch den projectivischen Punktwurf $B_2 B_1 \mathfrak{C}_0 D_2$ und erhalten demgemäfs, falls $B_0 B_1$ in der Involution $B_2 A_1$, $\mathfrak{C}_0 C_2$ liegt, die Involution dritter Ordnung

$$B_2 A_1 A_2 \quad , \quad B_0 B_1 B_2 \ .$$

Auch alle anderen Glieder derselben, z. B. $C_0 B_2 C_2$ und $D_0 B_2 D_2$, enthalten den Punkt B_2. Ein charakteristischer Wurf der vier zu A_2, B_2, C_2, D_2 gehörenden Gruppen bleibt aber (§ 43) sich selbst projectivisch, wenn man eine neue Entstehungsweise der Involution auf dieselben beiden Gruppen, stützt, wie die ältere. Die beiden Würfe können daher aus den beiden Erzeugungsweisen

$$B_2 A_1, B_2 B_0, \ldots \wedge B_1, A_2, \ldots$$

und

$$B_2 A_2, B_2 C_0, \ldots \overline{\wedge} C_2, A_1, \ldots$$

entnommen werden. Also hat man es mit zwei charakteristischen Würfen der Involution

$$A_1 A_2, B_0 B_1, C_0 C_2, D_0 D_2$$

zu thun, deren einer den Paaren $A_1 A_2$ und $B_0 B_1$, deren anderer den Paaren $A_1 A_2$ und $C_0 C_2$ zugehört. Beide sind, wie wir auf ganz anderem Wege in den §§ 24—26 gesehen haben, unter einander projectivisch. Für diese besondere Involution ist mithin der Satz richtig. Selbst in diesem Falle aber zieht er die Folge projectivischer Beziehungen nach sich.

Zuerst entstehen die Gruppen aus

$$B_2 A_1, B_0 B_1 \ldots \overline{\wedge} B_2, A_2 \ldots,$$

und setzt man

$$B_2 A_1, B_0 B_1, \mathfrak{C}_0 C_2, \mathfrak{D}_0 D_2 \overline{\wedge} B_2, A_2, Z_1, D_2,$$

so ist $A_2 B_2 C_2 Z_1$ der erste Wurf. Die Involution $B_2 A_1$, $\mathfrak{C}_0 C_2$ enthält die Coincidenzpaare aller Reihenpaare

$$B_2, \mathfrak{C}_0 \ldots \overline{\wedge} C_2, A_1 \ldots;$$

aus

$$B_2 B_1 \mathfrak{C}_0 D_2 \overline{\wedge} C_2 E_1 A_1 D_2$$

folgt dann:

$$B_2 A_1, B_0 B_1, \mathfrak{C}_0 C_2, \mathfrak{D}_0 D_2 \overline{\wedge} A_1, B_1, C_2, E_1.$$

Die zweite Erzeugungsweise ist hier:

$$B_2 A_1, C_0 B_2, \ldots \overline{\wedge} C_2, A_2, \ldots$$

Dem Paare $\mathfrak{C}_0 B_2$ müssen, damit $B_2 A_1 A_2$ und $C_0 C_2 B_2$ sich ergeben, A_2 resp. C_2 zugeordnet werden. $B_0 B_2 B_1$ entsteht, wenn ihm B_2 zugeordnet wird; denn die Doppelpunkte der beiden Reihen

$$A_1 \mathfrak{C}_0 C_0 \ldots \overline{\wedge} C_2 B_2 A_2 \ldots$$

bilden ein Paar beider Involutionen

$$A_1A_2\,,\,C_0C_2 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{C}_0C_2\,,\,A_1B_2\;;$$

sie fallen also mit B_0B_1 zusammen. Ist noch

$$B_2A_1\,,\,B_2\mathfrak{C}_0\,,\,B_2C_0\,,\,B_2D_2 \barwedge C_2\,,\,Z_2\,,\,A_2\,,\,D_2\;,$$

so ist $A_2B_2C_2Z_2$ der zweite Wurf. Die Paare der Involution $B_2A_1\,,\,B_2\mathfrak{C}_0$ entstehen aus den Reihen

$$B_2\,,\,\mathfrak{C}_0\ldots \barwedge B_2\,,\,A_1\ldots$$

Dem Punkte B_1 der ersteren Reihe müssen wir $B_2\,,\,A_1\,,\,C_1'$ zuordnen, um $B_2\mathfrak{C}_0\,,\,B_2A_1\,,\,B_2C_0$ zu erhalten. Letzteres ergiebt sich hier als specieller Fall des in § 43 Bewiesenen. Setzt man endlich

$$B_2B_1\mathfrak{C}_0D_2 \barwedge B_2F_1A_1D_2 \barwedge C_2E_1A_1D_2\;,$$

so folgt:

$$B_2A_1\,,\,B_2\mathfrak{C}_0\,,\,B_2C_0\,,\,B_2D_2 \barwedge A_1\,,\,B_2\,,\,C_1'\,,\,F_1\;.$$

Daher gilt hier folgende Gruppe von projectivischen Beziehungen:

$$\begin{array}{c}
\underline{B_2B_1\mathfrak{C}_0D_2 \barwedge C_2E_1A_1D_2} \\
C_2E_1A_1D_2 \barwedge B_2F_1A_1D_2 \\
A_1B_1C_2E_1 \barwedge B_2A_2Z_1D_2 \\
C_1'A_1B_1C_2 \barwedge C_1'B_2A_2C_2 \\
A_1B_2C_1'F_1 \barwedge C_2Z_2A_2D_2 \\
A_2B_2C_2Z_1 \barwedge A_2B_2C_2Z_2
\end{array}$$

Dieselben sind ihrer zweiten Herkunft nach alle erfüllt. Da aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'' \barwedge B_2B_1\mathfrak{C}_0D_2$$

ist, so ist E_1 dasselbe Element in beiden Reihen (§§ 44 und 45), und es gelten daher auch die ersteren Beziehungen. Diese ihrerseits beweisen den Lehrsatz des § 44.

§ 46. Ist CC_1C_2 eine dritte Gruppe der Involution $AA_1A_2\,,\,BB_1B_2$, so kann man jedes andere Glied derselben als Coincidenzgruppe der Reihen

$$AA_1\,,\,BB_1\,,\ldots \barwedge B_2\,,\,A_2\,,\ldots$$

und

$$AA_1\,,\,CC_1\,,\ldots \barwedge C_2\,,\,A_2\,,\ldots$$

erhalten, wenn es aus $n+1$ verschiedenen Punkten des Involutionsfeldes

besteht. Auch die singulären Gruppen ergeben sich in beiden Fällen übereinstimmend, wenn irgend zwei Gruppen $D_1 D_2 \dots D_{n+1}$ und $E_1 E_2 \dots E_{n+1}$ der Involution aus $n+1$ verschiedenen Punkten bestehen. Die Elemente, welche zwei festen Gliedern von AA_1, BB_1 und AA_1, CC_1 zugeordnet werden müssen, damit dieselbe Gruppe der Involution $AA_1 A_2$, $BB_1 B_2$ entsteht, sind homologe Glieder projectivischer Reihen.

$CC_1 C_2$ und $BB_1 B_2$ mögen resp. aus den Beziehungen entstehen

$$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1' \dots \barwedge B_2\,, A_2\,, \mathfrak{C}_2 \dots$$
$$AA_1\,, \mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'\,, CC_1 \dots \barwedge C_2\,, \mathfrak{B}_2\,, A_2 \dots$$

Ist nun

$$A_2 B_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \barwedge A_2 \mathfrak{B}_2 C_2 \mathfrak{D}_2'\,,$$

so ergeben

$$AA_1\,, BB_1\,, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_2 \dots \barwedge B_2\,, A_2\,, \mathfrak{D}_2 \dots$$

und

$$AA_1\,, \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\,, CC_1 \dots \barwedge C_2\,, \mathfrak{D}_2'\,, A_2 \dots$$

entweder dieselben Coincidenzpunkte, oder beide haben überhaupt keine solchen (§ 45). Jede reguläre Gruppe von $n+1$ Elementen der Involution $AA_1 A_2, BB_1 B_2$ ist daher auch eine Gruppe von $AA_1 A_2, CC_1 C_2$. Die Punkte einer singulären Gruppe der ersteren Involution gehören alle auch einer Gruppe der zweiten Involution an, möglicherweise aber mit einer anderen Disposition über die vielfachen Elemente. Es sei $FF_1 F_2$ die zu F_2 gehörende singuläre Gruppe, die aus $AA_1 A_2$ und $BB_1 B_2$ entsteht. Die Involution kann dann auch von $AA_1 A_2$ und $FF_1 F_2$ aus entstehen, und, wenn $EE_1 E_2$ eine Gruppe von $n+1$ verschiedenen Punkten ist, von dieser und von $FF_1 F_2$ aus. Dabei ergiebt sich sicher die aus $n+1$ verschiedenen Elementen bestehende Gruppe $DD_1 D_2$. Ist daher $D_2 \mathfrak{F}$ eine Gruppe der Involution EE_1, FF_1, so gehören EE_1, DD_1 und $F_2 \mathfrak{F}$ zu einer Involution. Dadurch ist zunächst $\mathfrak{F}$ unzweideutig bestimmt, und darnach FF_1, da man dieser einen Bestimmung noch eine zweite von EE_2 ausgehende an die Seite stellen kann. Ganz denselben Bedingungen genügt aber auch die Gruppe $F'F_1'$, die man als Ergänzung zu F_2 von den beiden Gruppen $AA_1 A_2$ und $CC_1 C_2$ aus erhält; beide sind daher mit einander identisch. Es könnte ferner den einzelnen Punkten von $FF_1 F_2$ eine verschiedene Werthigkeit zukommen, je nachdem der eine oder andere

ihrer Punkte ursprünglich gegeben ist. Wenn nun F_2 gegeben und alsdann FF_1 ermittelt war, so ist DD_1D_2 die Coincidenzgruppe der Reihen

$$E, \mathfrak{F}', F \ldots \barwedge F_1F_2, \mathfrak{F}_1D_2, E_1E_2 \ldots,$$

wo $\mathfrak{F}'$ neben D_2 noch $n-2$ andere Punkte $\mathfrak{D}_3, \mathfrak{D}_4, \ldots \mathfrak{D}_n$ enthält. Da aber dann DD_1 der Involution $E\mathfrak{F}_1, F_1F_2\ \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 \ldots \mathfrak{D}_n$ angehört, so ist zuerst die Gruppe $\mathfrak{F}'$, und dann F in einer Weise bestimmt, welche davon unabhängig ist, ob ursprünglich F_1 oder F_2 gegeben war.

§ 47. Sind $C_1C_2 \ldots C_{n+1}$ und $D_1D_2 \ldots D_{n+1}$ irgend zwei Gruppen der Involution $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}, B_1B_2B_3 \ldots B_{n+1}$ mit wenigstens zwei regulären Gruppen, so können alle ihre Glieder auch als Coincidenzgruppen der projectivischen Reihen

$$C_1C_2 \ldots C_{n-r+1}, D_1D_2 \ldots D_{n-r+1}, \ldots \barwedge D_{n-r+2} \ldots D_{n+1}, C_{n-r+2} \ldots C_{n+1}, \ldots$$

aufgefafst werden. Die einzelne Gruppe der Involution $(n+1)$ter Ordnung kann durch die bestimmte Gruppe $\mathfrak{C}_{n-r+2} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ charakterisirt werden, die man einer fest ausgewählten Gruppe der ersteren Involution zuordnen mufs, damit sie als Coincidenzgruppe entstehe. Zwei Gruppen, welche bei zwei verschiedenen Erzeugungsweisen dieselbe Gruppe charakterisiren, sind entsprechende Elemente projectivischer Gebilde. Wir bezeichnen eine gegebene Anordnung von Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung als projectivisch mit allen denjenigen unter sich projectivischen Involutionen, welche diese Anordnung charakterisiren.

Zusatz 1. Die Involution ist durch zwei ihrer Glieder bestimmt.

Zusatz 2. Ist ein Element zwei Gruppen gemeinsam, so ist es allen Gruppen gemeinsam.

Zusatz 3. Gehört eine Gruppe G von $n+1$ Punkten gleichzeitig den Involutionen

$$U_1V_2, V_1U_2 \ ; \ U_1V_3, V_1U_3 \ ; \ U_1V_4, V_1U_4 \ ; \ U_1V_\lambda, V_1U_\lambda$$

an, sind $U_1U_2U_3 \ldots$ Glieder einer Involution $(n-r)$ter Ordnung, $V_1, V_2, V_3 \ldots$ Glieder einer Involution $r$ter Ordnung, so ist

$$U_1U_2U_3 \ldots U_\lambda \ldots \barwedge V_1V_2V_3 \ldots V_\lambda \ldots,$$

und G die Coincidenzgruppe dieser Reihen.

Der Lehrsatz selbst, wie auch Zusatz 1, folgt aus § 46 und § 42, der Zusatz 2 aus § 33, 2, wenn man das gemeinsame Element in die Gruppen $C_1 \dots C_{n-r+1}$ und $D_1 D_2 \dots D_{n-r+1}$ aufnimmt.

Gehört für den Zusatz 3 irgend ein Element P von G den Gruppen U und V der Involutionen an, so ist G die Coincidenzgruppe der Reihen

$$U U_1 U_2 \dots \;\overline{\wedge}\; V V_1 V_2 \dots \quad ; \quad U U_1 U_3 \dots \;\overline{\wedge}\; V V_1 V_3 \dots$$
$$U U_1 U_4 \dots \;\overline{\wedge}\; V V_1 V_4 \dots ; \dots ; \; U U_1 U_\lambda \dots \;\overline{\wedge}\; V V_1 V_\lambda \dots$$

Daher mufs

$$U U_1 U_2 U_3 U_4 \dots U_\lambda \dots \;\overline{\wedge}\; V V_1 V_2 V_3 V_4 \dots V_\lambda \dots$$

sein; im anderen Falle würden die verschiedenen Reihenpaare verschiedene Gruppen der Involution $U V_1, V U_1$ ergeben.

Hiermit ist § 33 mit allen seinen Zusätzen von n auf $n+1$ übertragen.

§§ 48—56. *Von den singulären Gruppen der Involutionen $n+1$ter Ordnung.*

§ 48. Neben zwei $(n+1)$fachen Elementen kann eine Involution $(n+1)$ter Ordnung nur noch reguläre Gruppen enthalten. Sind $\mathrm{A}D_1$ und $\mathrm{A}D_2$ die $(n+1)$fachen Strahlen einer Strahleninvolution mit imaginärem unendlich fernen Centrum A, so liegen die $n+1$ reellen Punkte je einer Gruppe auf je einer D_1 und D_2 beigeordneten Kette der Punktebene A, ausgeschnitten durch $n+1$ von einander verschiedene Halbketten D_1, D_2 derselben. Je zwei verschiedene Sätze von $n+1$ Halbketten trennen einander. Irgend $n+1$ zusammengehörige Halbtangenten schliefsen sich mit einem anderen derartigen Satze zu einer reellen Gruppe der Involution mit den $(n+1)$ fachen Strahlen $D_1\mathrm{A}$ und $D_1\mathrm{A}^1$ zusammen. Das Punktfeld eines projectivischen Strahlbüschels $\mathrm{A}E, \mathrm{A}E_1$ ist stetig auf das Involutionsfeld so bezogen, dafs Halbketten E_1, E_2 und Gruppen von $n+1$ Halbketten D_1, D_2, sowie E_1, E_2 und D_1, D_2 beigeordnete Ketten einander entsprechen. In den reell-projectivischen Tangentenbüscheln in E_1, E_2 und D_1, D_2 entsprechen die Strahlen und Strahlengruppen $E_1\mathrm{A}, E_2\mathrm{A}^1, (D_1\mathrm{A})^{n+1}, (D_2\mathrm{A}^1)^{n+1}$ einander. Die

Tangenten in D_1 und E_1 bewegen sich in einer, diejenigen in D_2 und E_2 in der entgegengesetzten Richtung.

Da der Satz für $n = o$ und $n = 1$ (§§ 27—30) richtig ist, so braucht nur noch von n auf $n + 1$ geschlossen werden. Irgend eine der betrachteten Involutionsgruppen ist den projectivischen Feldern

$$D_1^n D_2^n \ldots \;\overline{\wedge}\; D_2 D_1 \ldots$$

gemeinsam. Jeder D_1 und D_2 beigeordneten Kette des Involutionsfeldes entspricht eine D_2 und D_1 beigeordnete Kette im Punktfelde. Mit dem Übergange der ersten von D_1 nach D_2 ist der umgekehrte bei der zweiten Reihe verknüpft. Beide begegnen einander daher einmal, und auf dieser Kette liegt die untersuchte Gruppe.

Andererseits entspricht je einer Gruppe von n Halbketten D_1, D_2 eine Halbkette D_2, D_1. Schreiten die n Halbtangenten in D_1 in einer Richtung fort, so mufs die Tangente in D_2 der entsprechenden Halbkette in derselben, diejenige in D_1 also in der entgegengesetzten Richtung sich bewegen. Während diese eine volle Umdrehung macht, beschreibt jede einzelne jener Halbtangenten in der entgegengesetzten Richtung einen der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Halbstrahlen der Anfangsgruppe. Man erhält daher $n + 1$ beiden entsprechend gemeinsame Halbstrahlen. Von ihnen liegen zwei in demjenigen der bezeichneten n Winkel, in welchem der der Anfangsgruppe entsprechende Halbstrahl liegt, und je einer befindet sich in jedem der $n - 1$ übrigen Winkel. Bei der Beziehung, aus welcher die $n + 1$ Halbstrahlen entstehen, werden den Gruppen $(D_1 \mathrm{A})^n$ und $(D_1 \mathrm{A}^1)^n$ die Strahlen $D_1 \mathrm{A}^1$ und $D_1 \mathrm{A}$ zugeordnet. Die $n + 1$ gefundenen Halbstrahlen bilden daher Theile einer Gruppe der Involution mit den $(n + 1)$fachen Strahlen $(D_1 \mathrm{A})^{n+1}$ und $(D_1 \mathrm{A}^1)^{n+1}$ (§ 40).

Will man eine zweite Gruppe betrachten, so kann man das Involutionsfeld festhalten, das Punktfeld aber so verschieben, dafs D_2 und D_1 fest bleiben. Diese Verschiebung soll sehr gering sein, so dafs die Halbtangenten aller Halbketten in D_1 in derselben Richtung um einen kleinen Winkel gedreht werden. An die Stelle einer gemeinsamen treten zwei einander nahe gelegene und zugeordnete Halbketten. Zwischen beiden liegt eine den neuen Gebilden gemeinsame Halbkette, die also in demselben Sinne verschoben ist, wie alle Halbketten D_1, D_2. Die Invo-

lution $(n+1)$ter Ordnung ist aber, wie zu dem Strahlbüschel $\mathrm{A}E_1, \mathrm{A}E_2$, so zu allen Strahlbüscheln $\mathrm{A}D_1, \mathrm{A}D_2$ projectivisch, welche festen Strahlengruppen der Involution $n$ter Ordnung $(\mathrm{A}D_1)^n, (\mathrm{A}D_2)^n$ zugeordnet werden müssen, damit sie entsteht. Da hierbei $E_1\mathrm{A}$ und $D_1\mathrm{A}$, sowie $E_1\mathrm{A}^1$ und $D_1\mathrm{A}^1$ in den Tangentenbüscheln an E_1 und D_1 einander entsprechen, so gehören den Strahlen $E_1\mathrm{A}$ und $E_1\mathrm{A}^1$ die Gruppen $(D_1\mathrm{A})^{n+1}$ und $(D_1\mathrm{A}^1)^{n+1}$ zu. Ferner bewegen sich die $n+1$ Halbtangenten in D_1 auch in demselben Sinne, wie diejenige in E_1. Für zwei entgegengesetzte Halbketten E_1, E_2 werden jeder Halbkette D_1^n, D_2^n zwei entgegengesetzte Halbketten D_1, D_2 zugeordnet. Beide Halbketten D_1^{n+1}, D_2^{n+1} schliefsen sich daher in D_1 und D_2 je derselben Strahlengruppe an.

Aus einer analogen Betrachtung folgt leicht, dafs den E_1 und E_2 beigeordneten Ketten D_1 und D_2 beigeordnete entsprechen, die sich mit jenen stetig verschieben.

§ 49. Die Elemente, welche den Reihen

$$1)\ AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 \ldots \barwedge 2)\ B'B_1'B_2', A'A_1'A_2', C'C_1'C_2' \ldots$$

gemeinsam sind, bilden auch eine Coincidenzgruppe zweier Reihen

$$3)\ AA_1A_2', BB_1B_2 \ldots \barwedge 4)\ B'B_1'B_2', A'A_1'A_2 \ldots$$

Die Glieder der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 entstehen, wenn man auf eine feste Anordnung I der Involution $AA_1, BB_1 \ldots$ unendlich viele zu ihr und daher unter sich projectivische Anordnungen $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_4 \ldots$ des einförmigen Gebildes $B_2, A_2 \ldots$ bezieht. Gleichstellige Glieder fassen sich zu Reihen $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \mathrm{I}_3', \mathrm{I}_4' \ldots$ zusammen, die alle die Gruppen A_2 und B_2 entsprechend gemeinsam haben und zu der gegebenen Anordnung AA_1A_2, $BB_1B_2 \ldots$ projectivisch sind. Jeder Gruppe G_α von AA_1, BB_1 gehört eine solche Reihe zu. Entsprechend entstehen die Gruppen der Involution $A'A_1'A_2', B'B_1'B_2'$, indem man auf eine fest gegebene Anordnung II der Involution $B'B_1', A'A_1' \ldots$ die zu ihr und daher unter sich projectivischen Anordnungen $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3, \mathrm{II}_4 \ldots$ bezieht, die alle A_2 und B_2 als $B'B_1'$ und $A'A_1'$ entsprechende Gruppen mit einander gemein haben. Gleichstellige Elemente der Reihen II schliefsen sich zu Reihen $\mathrm{II}_1', \mathrm{II}_2', \mathrm{II}_3' \ldots$ zusammen, die alle zu der gegebenen Anordnung der Involution $B'B_1'B_2'$,

$A'A'_1A'_2\ldots$ projectivisch sind und als diesen Gruppen entsprechend B'_2 und A'_2 mit einander gemein haben. Dem Paare G_α und H_β der Involutionen I und II kann man jedes Paar entsprechender Elemente der Reihen I'_α und II'_β zuordnen. Jeder gemeinsame Punkt der beiden projectivischen Involutionen $(n+1)$ter Ordnung ist vier entsprechenden Gebilden gemeinsam. Es genügt daher, der Zusammenstellung G_α, H_β das I'_α und II'_β gemeinsame Paar der Involution $A_2A'_2, B_2B'_2$ zuzuordnen. Elemente, welche drei Gebilden gemeinsam sind, die so zusammengehören, genügen der gestellten Aufgabe. Hält man G_α und damit I'_α fest, läfst aber H_β die Reihe $H_1H_2H_3\ldots$ durchlaufen, so treten $\mathrm{II}'_1, \mathrm{II}'_2, \mathrm{II}'_3\ldots$ an die Stelle von II'_β. Da nun einem festen Elemente von I'_α die Elemente einer zu $H_1H_2H_3\ldots$ oder II projectivischen Reihe II_δ nach und nach zugeordnet werden, so ergeben sich nun die Paare der Involution $A_2A'_2, B_2B'_2$ in einer zu II projectivischen Anordnung III_α. Den Gruppen $A'A'_1$ und $B'B'_1$ von II gehören dabei, wie G_α auch gewählt ist, die Gruppen $B_2B'_2$ und $A_2A'_2$ von III_α zu. Dem Elemente $A'A'_1$ nämlich wird jedes beliebige Element zugeordnet, wenn $A'A'_1A'_2$ entstehen soll. Das ihm zugehörige Glied BB_1B_2 der ersten Involution $(n+1)$ter Ordnung wird aber in der Reihe I'_α durch B_2 charakterisirt. B_2 ist daher ein Theil des $A'A'_1$ zugehörenden Paares. Da $A'A'_1$ für jede von $A'A'_1A'_2$ verschiedene Gruppe der zweiten Involution $(n+1)$ter Ordnung B'_2 zugehört, und diesem Punkte des Feldes also jede Gruppe von I'_α entspricht, so ist B'_2 der andere Theil des $A'A'_1$ für jede Gruppe G_α zugehörigen Paares $B_2B'_2$. Die verschiedenen Reihen III_α haben daher alle $B_2B'_2$ und $A_2A'_2$ als $A'A'_1$ und $B'B'_1$ entsprechende Paare gemein. Da nun Ähnliches auch gilt, wenn man ein Element H_β von II fixirt, so ist folgende Beziehung erfüllt: Irgend zwei Gruppen der Involutionen

$$\text{I) } AA_1, BB_1\ldots \qquad \text{II) } A'A'_1, B'B'_1\ldots$$

entspricht ein bestimmtes Paar der Involution

$$\text{III) } B_2B'_2, A_2A'_2\ldots;$$

dasselbe beschreibt, wenn die eine Gruppe festgehalten wird, eine mit der anderen projectivische Reihe.

Die gesuchten Punkte gehören drei zusammengehörigen Gebilden gleichzeitig an. Die ganze Betrachtung kann, nachdem die symmetrisch

auftretenden Gröfsen A_2, A'_2 vertauscht sind, rückwärts gemacht werden; sie zeigt dann, dafs die gesuchten Punkte auch einem Reihenpaare

$$AA_1A'_2, BB_1B_2 \ldots \barwedge B'B'_1B'_2, A'A'_1A_2 \ldots$$

gemeinsam sind.

§ 50. Zwei projectivische Involutionen $(n+1)$ter Ordnung desselben Trägers haben höchstens $2(n+1)$ Elemente mit einander entsprechend gemein.

Im Allgemeinen hat man für die beiden Involutionen die Erzeugungsweisen

1) $$LL_1, MM_1, \mathfrak{N}'\mathfrak{N}'_1 \ldots \barwedge M_2, L_2, \mathfrak{N}_2 \ldots$$

und

2) $$PP_1, QQ_1, \mathfrak{N}'\mathfrak{N}'_1 \ldots \barwedge Q_2, P_2, \mathfrak{N}_2 \ldots$$

zu wählen, die nicht von Paaren entsprechender Gruppen ausgehen; $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}_2$ durchlaufen die projectivischen Reihen

$$\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}'_2\mathfrak{N}''_2\mathfrak{N}'''_2 \ldots \barwedge \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}'_2\mathfrak{N}''_2\mathfrak{N}'''_2 \ldots,$$

in denen im Allgemeinen den Elementen L_2, M_2 nicht P_2, Q_2 entsprechen. Jeder Gruppe der ersten Involution gehört eine Erzeugungsweise 1, folglich ein Punktepaar $\mathfrak{N}_2^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{N}_2^{(\lambda)}$ zu. Es ist aber nicht ausgemacht, ob den Reihen 2)

$$PP_1, QQ_1, \mathfrak{N}\mathfrak{N}_1 \ldots \barwedge Q_2, P_2, \mathfrak{N}_2^{(\lambda)} \ldots,$$

die wir so erhalten, eine Gruppe der zweiten Involution gemeinsam ist. Jeder Coincidenzpunkt der beiden Involutionen bedingt aber zwei wirkliche entsprechende Gruppen (§ 43). Haben beide Reihen weniger als zwei Paare entsprechender wirklicher Gruppen, so ist der Satz selbstverständlich. Giebt es zwei Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2, denen wirkliche Gruppen $A'A'_1A'_2$ und $B'B'_1B'_2$ der zweiten Involution entsprechen, so können die Erzeugungsweisen des § 49 benutzt werden. Ist das Element C_2 zwei entsprechenden Gruppen CC_1C_2 und $C'C'_1C_2$ gemeinsam, so ist

$$AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, \ldots \barwedge A'A'_1A'_2, B'B'_1B'_2, C'C'_1C_2, \ldots;$$

also gehören (§ 49) die gesuchten Punkte auch einem Reihenpaar

$$AA_1C_2, CC_1C_2 \ldots \barwedge A'A'_1A'_2, C'C'_1A_2$$

gleichzeitig an. Neben C_2 kommen noch die etwa vorhandenen Coincidenzpunkte der Reihen

$$AA_1, CC_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; A'A'_1A'_2, C''C''_1A_2 \ldots$$

in Betracht. Ist ein weiterer Doppelpunkt vorhanden, so sind die übrigen zwei projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung entsprechend gemein. So weiter schliefsend, gelangt man zu dem Lehrsatze.

§ 51. In zwei projectivisch bezogenen einförmigen Gebilden entspricht jeder Involution AA_1A_2, BB_1B_2 $(n+1)$ter Ordnung eine zu ihr projectivische aa_1a_2, bb_1b_2 gleicher Ordnung[19].

Die gegebene Involution entsteht aus den projectivischen Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}'_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \mathfrak{C}_2 \ldots,$$

wo nur $\mathfrak{C}_2$ beweglich ist, und zu ihm die Gruppe der Involution sich projectivisch ändert. Die entsprechende Involution entsteht aus den beiden Gebilden

$$aa_1, bb_1, \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; b_2, a_2, \mathfrak{c}_2 \ldots.$$

Wird nun vorausgesetzt, dafs aus der Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}'\mathfrak{C}'_1$ die projectivische $aa_1, bb_1, \mathfrak{c}'\mathfrak{c}'_1$ entsteht, so folgt dasselbe nach der im § 47 acceptirten Definition auch für die Involutionen $(n+1)$ter Ordnung weil $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{C}_2$ zu einander sich projectivisch bewegen.

Anm. Da somit jede gerade Involution von allen Punkten aus durch eine projectivische Strahleninvolution projicirt, jede Strahleninvolution durch jede Gerade in einer Punktinvolution geschnitten wird, so genügt es wirklich, den einen Fall des Strahlbüschels mit imaginärem Centrum A zu behandeln.

§ 52. In einem aus zwei verschiedenen Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehenden Involutionsfeld bestimmt irgend ein genügend nahe bei A_2 gelegener Punkt C_2 eine Gruppe CC_1C_2 von $n+1$ verschiedenen Punkten, von denen je einer bei einem einfachen und p verschiedene bei einem $p$fachen Punkte der Gruppe AA_1A_2 liegen. Daher giebt es in jeder Involution Gruppen aus $n+1$ von einander verschiedenen Punkten.

Wenn $\mathfrak{C}C_2$ der Involution AA_1, BB_1 angehört, so ist CC_1 (§ 43) ein Glied von $\mathfrak{C}B_2, AA_1$. Da $\mathfrak{C}$ bei A (§ 36a), B_2 aber von allen Punkten A und A_1 getrennt liegt, so müssen (§ 36b) auch von CC_1 sich $n-1$ Punkte der Gruppe A nähern. A_1 ist aber in AA_1 beliebig; es liegen somit bei allen Punkten von AA_1A_2, und nur bei diesen, Punkte von CC_1C_2.

Ist nun irgend ein einfacher Punkt, sagen wir A_1, in AA_1A_2 enthalten, so möge $\mathfrak{C}'C_1$ zu AA_2, BB_2, und folglich CC_2 zu $AA_2, \mathfrak{C}'B_1$ gehören. $\mathfrak{C}'$ nähert sich, wenn C_2 an A_2 heranrückt, der Gruppe $\mathfrak{D}$, welche mit A_1 ein Glied von AA_2, BB_2 bildet, und deren Punkte daher von AA_2 endlich entfernt liegen. Da folglich $AA_2, \mathfrak{C}'B_1$ eine Involution mit zwei getrennten Gruppen ist, so enthält sie (§ 36a) in der Nähe von AA_2 nur reguläre Gruppen, von denen p verschiedene Punkte bei einem $p$fachen von AA_2 liegen.

Enthält AA_1A_2 zwar verschiedene Punkte, die aber alle mehrfach zählen, so sei A_1 ein $p$facher Punkt, und $(A)^{n-p}$ die Gruppe der übrigen. BB_1B_2 zerlege man in zwei Gruppen $(B)^p$ und $(B)^{n-p}$. Sind dann $C_1(\mathfrak{C})^{p-1}$ und $C_1(\mathfrak{C})^{n-p-1}$ Gruppen von $A_1^p, (B)^p$ und $(A)^{n-p}, (B)^{n-p}$, so gehört CC_2 als Glied zu der Involution $(A)^{n-p}(\mathfrak{C})^{p-1}, (B)^p(\mathfrak{C})^{n-p-1}$. Bei genügender Annäherung von C_1 an A_1 nähern sich $A^{n-p}(\mathfrak{C})^{p-1}$ und $(\mathfrak{C})^{n-p-1}(B)^p$ den Gruppen $(A)^{n-p}A_1^{p-1}, (B)^p(\mathfrak{D})^{n-p-1}$, wo $A_1(\mathfrak{D})^{n-p-1}$ der Involution $(A)^{n-p}, (B)^{n-p}$ angehört. Da nun $(\mathfrak{D})^{n-p-1}$ sicher keinen Punkt von $(A)^{n-p}$ und nur ausnahmsweise A_1 enthalten kann, so geht die Involution, zu der CC_2 gehört, an der Grenze in eine solche mit zwei endlich von einander entfernten Gruppen über. Daher mufs (§ 36a) CC_2 aus n von einander verschiedenen Punkten bestehen, von denen $p-1$ bei A_1 liegen.

Ist AA_1A_2 ein $(n+1)$facher Punkt, so besteht (§ 48) höchstens noch eine Gruppe nur aus einem $(n+1)$fachen Punkte. Daher mufs es Gruppen geben, die (wenigstens zwei) verschiedene Punkte bei A_1, sonst aber überhaupt keine Punkte besitzen. Dafs sie in Wahrheit $n+1$ verschiedene Punkte bei A_1 haben, soll später gezeigt werden.

Durch die vorstehenden Überlegungen ist dargethan, dafs es in jeder beliebigen Involution unendlich viele reguläre Gruppen giebt.

§ 53. Höchstens $2n$ Gruppen einer Strahleninvolution $(n+1)$ter Ordnung gehören Strahlenpaare an, welche in zwei projectivischen Strahlbüscheln desselben Trägers, ohne zusammenzufallen, einander zugehören. In einer Involution giebt es n bestimmte derartige Paare, wenn sie einen $(n+1)$fachen Strahl als Gruppe hat, der mit einem Doppelstrahl der beiden Büschel zusammenfällt.

Wir betrachten, das Centrum wieder imaginär vorausgesetzt, statt der Involution und der beiden Strahlbüschel das Involutionsfeld und die

Punktfelder. Es seien D_1, D_2 die Doppelpunkte, A_λ und A'_λ entsprechende Punkte, B und B' entsprechende Gruppen derselben. Aus der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 $(n+1)$ter Ordnung entsteht die projectivische $A'A'_1A'_2$, $B'B'_1B'_2$ (§ 51), die aufser D_1 und D_2, welche nothwendig entsprechenden Gruppen gemeinsam sind, noch höchstens $2n$ Coincidenzpunkte haben (§ 50). Diese letzteren, und keine anderen gehören mit ihren entsprechenden des ersten Feldes paarweise derselben Involutionsgruppe an. Enthält die Involution bei D_1 einen $(n+1)$fachen Punkt D_1^{n+1}, so sind alle $2n+2$ Punkte den Reihen

$$D_1^{n-1}, AA_1A_2, \ldots \barwedge D_1^{n-1}, A'A'_1A'_2, \ldots$$

gemeinsam, aber auch (§ 49) den Reihen

$$D_1^{n+1}, D_1AA_1, \ldots \barwedge D_1^n A_2, A'A'_1A'_2, \ldots ;$$

oder, wenn man links einmal von D_1 absieht, den Reihen

$$D_1^n, AA_1, \ldots \barwedge D_1^n A_2, A'A'_1A'_2, \ldots$$

Durch wiederholte Anwendung des § 49 ergiebt sich, dafs die Punkte aufserhalb D_1 den Reihen

$$A'A'_1, AA_1, \ldots \barwedge A_2, A'_2, \ldots$$

gleichzeitig angehören. Unter ihnen findet sich aber noch D_2, und der Aufgabe genügen daher nur die bestimmten n Punkte der Ebene, welche D_2 zu einer Gruppe der Involution $AA_1A_2, A'A'_1A'_2$ ergänzen. Wir nennen diese Punkte $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, ihre Gruppe ZZ_1.

§ 54. In einem Involutionsfelde $(n+1)$ter Ordnung mit einem $(n+1)$fachen Punkte giebt es im Allgemeinen und höchstens n verschiedene Punkte, in deren beliebiger Nähe zwei derselben Gruppe angehörige Punkte liegen.

Es sei $B_1B'_1$ ein solches Paar und

$$D_1A_1B_1D_2 \barwedge D_1A'_1B'_1D_2 .$$

B'_1 gehört dann der Gruppe $Z'Z'_1$ der Punkte an, die mit ihren entsprechenden der ersten Reihe in dieselbe Involutionsgruppe gehören. Je näher B_1 und B'_1 bei einander liegen, desto näher rücken auch A_1 und A'_1 einander (§ 16, 2). Jede Involution $(n+1)$ter Ordnung enthält (§ 52) Gruppen von $n+1$ verschiedenen Punkten; AA_1A_2 sei eine solche. Aus AA_1A_2 und $A'A'_1A'_2$ bestimmt man die zu D_2 gehörige Ergänzungsgruppe, indem man

zuerst die Gruppe $D_2\mathfrak{D}'$ der Involution $AA_1, A'A'_1$ aufsucht, alsdann die Gruppe $\mathfrak{E}'$ der Involution $A, \mathfrak{D}'$ bestimmt, der A'_1 angehört. Ist dann $D_2\mathfrak{E}'_1$ die durch D_2 bestimmte Gruppe der Involution $A_1A_2, A'_1A'_2$, so sind nach § 43 die gesuchten Punkte den Reihen

1) $$A\mathfrak{D}'\mathfrak{E}' \ldots \overline{\wedge}\ A'_2A'_1\mathfrak{E}'_1 \ldots$$

gemeinsam. Wenn nun A'_1 an A_1 heranrückt, so nähern sich $\mathfrak{D}', \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'_1$ bestimmten Grenz-Gruppen und -Lagen. Denn $\mathfrak{D}'$ hat dieselbe Bedeutung für die Involution D_1^n, AA_1, wie die gesuchte Gruppe für D_1^{n+1}, AA_1A_2; sie nähert sich daher einer Gruppe $\mathfrak{D}$ von $n-1$ Punkten, in der jeder Doppelpunkt von D_1^n, AA_1 einfach, jeder $p$fache Punkt derselben aber $(p-1)$fach vorkommt. Da AA_1 aus n verschiedenen Punkten besteht, so kommt A_1 in $\mathfrak{D}$ nicht vor. $\mathfrak{E}'$ nähert sich der durch A_1 bestimmten Gruppe $\mathfrak{E}$ der Involution $A, \mathfrak{D}$. Der Punkt $\mathfrak{E}'_1$ endlich, da er für D_1^2, A_1A_2 dieselbe Bedeutung hat, wie die untersuchte Gruppe für D_1^{n+1}, AA_1A_2, nähert sich dem zweiten Doppelpunkt $\mathfrak{E}_1$ der Involution D_1^2, A_1A_2. Die untersuchte Gruppe liegt der Coincidenzgruppe der Reihen

2) $$A\mathfrak{D}\mathfrak{E} \ldots \overline{\wedge}\ A_2A_1\mathfrak{E}_1 \ldots$$

nahe. Denn setzt man

3) $$A\mathfrak{D}'\mathfrak{E}' \ldots \overline{\wedge}\ A\mathfrak{D}\mathfrak{E} \ldots$$

und folglich auch

4) $$A_2A'_1\mathfrak{E}'_1 \ldots \overline{\wedge}\ A_2A_1\mathfrak{E}_1 \ldots,$$

so liegen je zwei entsprechende Gruppen der beiden Reihen 3) und auch zwei entsprechende Punkte der Reihen 4) einander nahe (§§ 39 u. 16, 2). Bei einem Coincidenzpunkte P der Reihen 1) liegen daher zwei benachbarte Punkte P' und P'', so dafs P'' in der Gruppe liegt, welche P' durch 2) zugeordnet wird. Beide Punkte können sich also, weil diese Reihen stetig auf einander bezogen sind (§ 35), nur in der Nähe eines Coincidenzpunktes derselben befinden, und dasselbe ist daher mit P der Fall. Es sei nun $Z_1Z_2 \ldots Z_n$ die den Reihen 2 gemeinsame Gruppe. Nach § 39 liegt $Z'_1Z'_2 \ldots Z'_n$ derselben in der Art nahe, dafs bei einem $p$fachen Punkt der ersteren p verschiedene oder theils zusammenfallende Punkte der letzteren liegen. Die Punkte $Z_1Z_2 \ldots Z_n$ allein genügen daher der gestellten Aufgabe.

§ 55. In einem beliebigen Involutionsfeld $(n+1)$ter Ordnung giebt es höchstens $2n$ Stellen, in deren Nähe sich Punktepaare finden, die derselben Involutionsgruppe angehören.

Es sei $B_1 B_1'$ ein solches Paar; man setze alsdann

$$D_1 A_1 B_1 D_2 \barwedge D_1 A_1' B_1' D_2 \, .$$

Nach den Entwickelungen und Bezeichnungen des § 53 kommt dann B_1' unter den von D_1 und D_2 verschiedenen Coincidenzpunkten der beiden Reihen

$$A A_1 A_2 \, , B B_1 B_2 \ldots \barwedge A' A_1' A_2' \, , B' B_1' B_2' \ldots \qquad 1)$$

vor, oder auch unter denen von zwei bestimmten Reihen (§ 49)

$$A A_1 A_2 \, , A' A_1' A_2' \ldots \barwedge B B_1 B_2 \, , B' B_2' B_2' \ldots \, , \qquad 2)$$

denen ebenfalls D_1 und D_2 entsprechend gemeinsam sind.

Es seien $D_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'$ und $D_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}''$ Gruppen von $A A_1 A_2 \, , A' A_1' A_2'$, und $D_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}'$ und $D_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}''$ Gruppen von $B B_1 B_2 \, , B' B_1' B_2'$. Es seien ferner $A_2 E$ und $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}'''$ Gruppen von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}''$; die letztere aber so gewählt, dafs

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' \, , A_2 E \, , \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' \, , \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}''' , \ldots \barwedge D_2 \, , A_2 \, , D_1 \, , D_3 , \ldots \qquad 3)$$

ist. Entsprechend sei

$$\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' \, , B_2 F \, , \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' \, , \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}''' , \ldots \barwedge D_2 \, , B_2 \, , D_1 \, , D_3 , \ldots \qquad 4)$$

Die aufser D_1 und D_2 etwa vorhandenen Punkte betrachteter Art sind den Reihen

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' \, , \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' \, , \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}''' \ldots \barwedge \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' \, , \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' \, , \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}''' \ldots \qquad 5)$$

entsprechend gemein. Denn jedenfalls entstehen zwei zusammengehörige Gruppen der ursprünglichen Involutionen 2), wenn man auf die Reihen 5) zwei projectivische $D_2, D_1 \ldots$ bezieht. Den entsprechenden Gruppen $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ mufs D_1 resp. D_2 zugeordnet werden, wenn $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}' D_1$ und $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}' D_1$ resp. $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}'' D_2$ und $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}'' D_2$ entstehen sollen. Es mufs ihnen aber, wie aus 3) und 4) hervorgeht, auch derselbe Punkt D_λ zugeordnet werden, wenn die entsprechenden Gruppen $A A_1 A_2$ und $B B_1 B_2$ entstehen sollen. Mithin sind die charakteristischen Felder, welche den Gruppen $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ für die beiden projectivischen Reihen 2) zugehören, identisch, und man erhält überhaupt zwei entsprechende Gruppen von 2), wenn man auf die beiden Felder 5) dieselbe Punktebene $D_2, D_1 \ldots$ projectivisch bezieht. Sollte nun $\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ ein Punkt P

gemeinsam sein, so ist P auch denjenigen beiden entsprechenden Gruppen von 2) gemeinsam, die aus den Beziehungen

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'', \mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}, \ldots \barwedge D_2, D_1, P, \ldots$$

und

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}, \ldots \barwedge D_2, D_1, P, \ldots$$

entstehen. Ist umgekehrt P zwei entsprechenden Gruppen der Reihen 2) gemeinsam, so kann man sie in der vorstehenden Form darstellen, und es mufs dann $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ auch derselbe Punkt zugeordnet werden, damit A_2A_1A und B_2B_1B entstehen; daher entsprechen $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ einander in 5).

Wenn nun A_1' und A_1 einander genähert werden, so rücken (§ 54) $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}''$ bestimmten Gruppen X_1X' und X_2X'' nahe; A_2E nähert sich der Gruppe A_2X der Involution X_1X', X_2X''; $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'$ nähert sich der bestimmten aus

$$X_1X', A_2X, X_2X'', X_3X''' \barwedge D_2, A_2, D_1, D_3$$

hervorgehenden Gruppe X_3X''' (§ 39). Die Gruppen $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}'''$ nähern sich entsprechend zu bestimmenden Gruppen Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''' einer Involution. Setzt man jetzt

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'', \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}''', \mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)} \ldots \barwedge X_1X', X_2X'', X_3X''', X_\lambda X^{(\lambda)} \ldots$$

und andererseits

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}', \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_3\mathfrak{B}''', \mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)} \ldots \barwedge Y_1Y', Y_2Y'', Y_3Y''', Y_\lambda Y^{(\lambda)} \ldots,$$

so nähern auch $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ sich den Gruppen $X_\lambda X^{(\lambda)}$ und $Y_\lambda Y^{(\lambda)}$ in beliebigem Grade, sobald man A_1' an A_1 genügend heranrückt. Enthalten nun $\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ einen gemeinsamen Punkt P, so findet in $X_\lambda X^{(\lambda)}$ und $Y_\lambda Y^{(\lambda)}$ sich je ein jenem naher Punkt P' resp. P''. Dieselben rücken einander um so näher, je weiter A_1' an A_1 herangetrieben wird. Da aber an dieser Veränderung die projectivischen Reihen X_1X', $X_2X'', X_\lambda X^{(\lambda)} \ldots$ und $Y_1Y', Y_2Y'', Y_\lambda Y^{(\lambda)} \ldots$ nicht Theil nehmen, so finden sich etwa mögliche Paare $P'P''$ jedenfalls nur bei Doppelpunkten dieser Felder, deren Zahl nicht gröfser als $2n$ sein kann (§ 50). Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

§ 56. Eine Involution $(n+1)$ter Ordnung besitzt höchstens $2n$ Doppelpunkte, ein etwa vorhandener $p$facher Punkt vertritt $p-1$ ge-

trennte Doppelpunkte. Ist ein $(n+1)$facher Punkt vorhanden, so giebt es aufserdem noch n Doppelpunkte, wenn man in einem $p$fachen Punkte des Feldes $p-1$ Doppelpunkte vereinigt denkt.

Nach § 52 giebt es in jeder Nähe eines mehrfachen Punktes Punktepaare, die einer und derselben Gruppe angehören. Dieselben finden sich aber nur bei höchstens $2n$ (§ 55) und im zweiten Falle bei n Punkten (§ 54). Diese Punkte allein sind daher die Doppel- oder mehrfachen Punkte der Involution.

Ist AA_1A_2 irgend eine Gruppe einer Involution mit $(n+1)$fachen Punkte D_1, so sucht man (§ 54) zuerst die Doppelpunktsgruppe Z' der Involution AA_1, D_1^n auf; die gesuchte Gruppe ZZ_1 gehört dann der Involution AA_1, A_2Z' an. Enthält AA_1 einen $p$fachen Punkt D_p, daneben noch die Gruppe $(G)^{n-p}$ von $n-p$ Punkten, so kommt D_p $(p-1)$fach in Z oder $D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}$ vor. Die etwa vorhandenen Doppelpunkte bilden ein Glied der Involution $(n-p+1)$ter Ordnung $D_p\,(G)^{n-p}, A_2(G_1)^{n-p}$. Da nur eines der zwei gegebenen Glieder D_p enthält, so kommt unter den übrigen singulären Punkten D_p nicht mehr vor, welcher also $p-1$ gewöhnliche Doppelpunkte auch für die Involution $(n+1)$ter Ordnung vertritt.

Um zu zeigen, dafs l zusammen auftretende $p_1, p_2, p_3, \ldots p_l$fache singuläre Punkte $p_1+p_2+\ldots p_l-l$ gewöhnliche Doppelpunkte vertreten, ersetze man AA_1 durch andere nahe Gruppen $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1'', \mathfrak{A}'''\mathfrak{A}_1'''; \ldots$ von D_1^n, AA_1. Alsdann wird B_2 durch Gruppen $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1'', \mathfrak{B}'''\mathfrak{B}_1''' \ldots$ der zur vorigen projectivischen Involution D_1^n, BB_1 zu Gliedern der Involutionen

$$D_1^{n+1}, AA_1A_2 \;:\; D_1^{n+1}, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'A_2 \;:\; D_1^{n+1}, \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1''A_2 ; \ldots$$

ergänzt. Wenn nämlich $B_2\mathfrak{D}$ ein Glied von D_1^n, AA_1 ist, so erhalten wir $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'$ als Coincidenzgruppe der Reihen

$$D_1^n, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', B_2\mathfrak{D}, \ldots \;\overline{\wedge}\; A_2, D_1, B_2, \ldots$$

Es entstehen dabei aber projectivisch zu $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ Glieder der Involution $D_1^n, A_2\mathfrak{D}$ (§ 47).

Indem man den Grenzübergang des § 54 wiederholt, kann man einsehen, dafs die Doppelpunktsgruppen der so entstehenden Involutionen $(n+1)$ter Ordnung alle zu einer Involution $n$ter Ordnung $(ZZ_1, Z'Z_1', Z''Z_1'', Z'''Z_1''')$ gehören. Mit Ausnahme einzelner bestehen dieselben also

aus je n von einander verschiedenen Punkten. Wenn noch $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ genügend nahe bei AA_1 liegt, so rücken die n verschiedenen Punkte von $Z'Z_1'$ den m Punkten von ZZ_1 nahe. Aus dem Vorangegangenen folgt aber, dafs die erstere Gruppe zur Involution

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}A_2$$

gehören mufs, denn $D_p^{p-1}(G_1)^{n-p}$ ist von der Involution $D_1^n, \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1', AA_1$ die Doppelpunktsgruppe. Nun liegen aber p Punkte von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$ bei D_p (§§ 36a und 52). Die Gruppe $(G_2)^{n-p}$ der übrigen nähert sich dem Gliede $(G)^{n-p}$, das AA_1 neben dem $p$fach zählenden D_p noch enthält. Daher müssen (§ 36a) $p-1$ Punkte von $Z'Z_1'$ bei D_p liegen, die $n-p+1$ übrigen aber liegen einem dritten Gliede von $A_2(G_1)^{n-p}, D_p(G)^{n-p}$ nahe und sind daher von D_p endlich entfernt. Sind l Punkte vorhanden, die in ihren Gruppen $p_1, p_2, p_3, \dots p_l$fach zählen, so legen sich $p_1-1, p_2-2, \dots p_l-1$ der n verschiedenen Punkte $Z'Z_1'$ neben sie; es ist sonach

$$p_1+p_2+p_3\cdots p_l = n+l\,.$$

Die einzelnen Punkte können daher als Vertreter von $p_1-1, p_2-1, \dots$ endlich von p_l-1 gewöhnlichen Doppelpunkten angesehen werden.

Ein ähnlicher Satz gilt für die allgemeine Involution, ohne doch schon hier bewiesen werden zu können. Dafs neben einem $p_1$fachen und einem $p_2$fachen singulären Punkte nicht mehr als $2n-p_1-p_2+2$ andere in einer Involution auftreten können, folgt, wenn man beim Grenzübergange im § 55 D_1 und D_2 mit diesen Punkten zusammenfallen läfst.

Es ist nunmehr selbstverständlich, dafs es reguläre Gruppen in der Nähe jeder singulären geben mufs.

§§ 57—64. Eine Involution $n$ter Ordnung $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ hat mit dem projectivischen Gebilde $B_2, A_2, \mathfrak{C}_2$ desselben Trägers, wenn man von höchstens $2n$ Speciallagen von $\mathfrak{C}_2$ absieht, $n+1$ gemeinsame Elemente C, C_1, C_2.

§ 57. Wir beschränken uns auch hier auf den Fall eines Strahlbüschels mit unendlich fernem Centrum A, dem die Bezeichnungen ja schon angepafst sind. Die $n+1$ Punkte bilden, wenn sie vorhanden sind, eine Gruppe der Involution AA_1A_2, BB_1B_2. Wird $\mathfrak{C}_2$ projectivisch zu dem

Punkte $\mathfrak{C}_0$ der Ebene B bewegt, so wird behauptet, dafs nicht nur jeder Gruppe der Involution ein Punkt der Ebene B, sondern auch jedem Punkte von B eine Gruppe der Involution entspricht. Sind DD_1D_2 und EE_1E_2 irgend zwei andere Gruppen, so kann man die Involution auch aus den Beziehungen

$$DD_1\,,\, EE_1\,,\, \mathfrak{F}'\mathfrak{F}'_1\,,\,\ldots\; \overline{\wedge}\; E_2\,,\, D_2\,,\, \mathfrak{F}_2\ldots$$

entstehen lassen. Wenn $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{C}_2$ einander richtig projectivisch entsprechen, so bestimmen irgend zwei Reihenpaare der ersten, und die entsprechenden der zweiten Art entweder dieselben oder beide keine gemeinsamen Punkte. Die erste Aufgabe kann daher durch die zweite vertreten, oder über AA_1A_2 und BB_1B_2 vorausgesetzt werden, dafs sie aus je $n+1$ verschiedenen Punkten bestehen. Ferner soll kein Punkt der einen mit allen der anderen in einer Kette der Punktebene A liegen, wenn es auch Involutionen giebt (§ 48), bei denen je die $n+1$ Punkte einer Gruppe einer Kette der Punktebene A angehören.

§ 58. Entsprechen die Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 den Punkten $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ der Ebene B, so liegen alle Gruppen, welche Punkten einer beliebigen Halbkette $\mathfrak{A}_0\,,\,\mathfrak{B}_0$ etwa zugehören können, auf dem Erzeugnifs zweier projectivischer Halbkettenbüschel $AA_1\,,\,BB_1 \;\overline{\wedge}\; B_2\,,A_2$. Die $2n+2$ Tangentenbüschel sind so unter einander reell-projectivisch, dafs den von $A\,,\,A_1\,,\,B_2$ nach A führenden Strahlen die von $B\,,\,B_1\,,\,A_2$ nach A[1] führenden Strahlen entsprechen.

Der veränderliche Punkt $\mathfrak{C}_2$, welcher der festen Gruppe $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ zugeordnet werden mufs, damit die gesuchten Involutionsgruppen entstehen, bewegt sich mit dem Punkte $\mathfrak{C}_0$ der Ebene B projectivisch und durchläuft eine Halbkette, wenn dieser die Halbkette $\mathfrak{A}_0\,,\,\mathfrak{B}_0$ durchläuft. Aber jenen Endpunkten $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ entsprechen A_2 und B_2. Diese nämlich müssen $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ zugeordnet werden, damit AA_1A_2 und BB_1B_2 entstehen. Also gehört für die besonderen Punkte von B der Halbkette $AA_1\,,\,\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\,,\,BB_1$ die bestimmte Halbkette $B_2\,,\,\mathfrak{C}_2\,,\,A_2$ zu. Weil nun für die Erzeugung jeder Gruppe AA_1 und B_2, sowie BB_1 und A_2 einander entsprechen, so gehört auch jeder anderen Halbkette $AA_1\,,\,BB_1$ eine bestimmte B_2,A_2 zu. In den Tangentenbüscheln in $A\,,\,A_1$ und B_2 gehören die nach A führenden Strahlen einander zu. Die den beiden Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \overline{\wedge}\ B_2, A_2, \mathfrak{C}_2 \ldots$$

etwa gemeinsamen Punkte müssen dem Erzeugnifs der beiden Halbkettenbüschel angehören.

§ 59. Wenn D_2 ein einfacher Punkt seiner Gruppe ist, so kann bei passender Bezeichnung der Gruppen AA_1A_2, BB_1B_2 die Halbkette AA_1, D_2, BB_1 weder bei D_2 einen mehrfachen Punkt, noch auch dieselbe Tangente wie B_2, D_2, A_2 haben.

DD_1 und $\mathfrak{D}$ mögen D_2 zu Gruppen der Involutionen AA_1A_2, BB_1B_2 und AA_1, BB_1 ergänzen. DD_1D_2 ist die Coincidenzgruppe der Reihen

$$AA_1, \mathfrak{D}D_2, BB_1 \ldots \overline{\wedge}\ B_2, D_2, A_2 \ldots$$

Man halte B_2 und D_2 fest und bewege A_2 über die ganze Kette B_2, D_2, A_2. Alle diese Reihen haben aufser D_2 noch Gruppen der Involution AA_1, $\mathfrak{D}B_2$ gemeinsam, die einer Kette ihres Involutionsfeldes angehören. Sie entsteht, indem man die Kettenbüschel I) $AA_1, \mathfrak{D}D_2$ und II) B_2, D_2 so projectivisch auf einander bezieht, dafs in den Tangentenbüscheln in den Punkten der Gruppe $\mathfrak{D}D_2$ und in D_2 die nach A führenden Strahlen einander zugehören. Von den Punkten BB_1 kann die Kette nur die enthalten, welche gleichzeitig auch der $AA_1, \mathfrak{D}D_2, BB_1$ entsprechenden Kette B_2, D_2, A_2 angehören.

Die Curven $AA_1, \mathfrak{D}D_2$ entstehen nun, wenn man auf eine feste Anordnung III der Ketten $A, \mathfrak{D}$ die Büschel $\mathrm{III}_1, \mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3 \ldots$ von Ketten D_2, A_1 projectivisch so bezieht, dafs in den Tangentenbüscheln in A und D_2 die nach A führenden Strahlen einander entsprechen. Alle Tangentenbüschel in D_2 der $\mathrm{III}_1, \mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3, \ldots$ sind also unter sich projectivisch und haben die Strahlen D_1A und D_1A[1] entsprechend gemein. Die Reihen gleichstelliger Tangenten sind daher (§ 19, Beispiel) in derselben Weise projectivisch und ergeben neue Reihen $\mathrm{III}'_1, \mathrm{III}'_2, \mathrm{III}'_3 \ldots \mathrm{III}'_\beta$ der Ketten D_2, A_1. Die Ketten irgend einer Reihe III'_β müssen einer festen Kette des Büschels $A, \mathfrak{D}$ nach und nach zugeordnet werden, damit die vorgegebene Anordnung der Curven $AA_1, D_2\mathfrak{D}$ sich ergiebt. Eine von den Reihen gehört zu der Curve $A, D_2, \mathfrak{D}$ und zeigt daher in D_2 das Tangentenbüschel des Kettenbüschels $AA_1, \mathfrak{D}D_2$, falls D_2 in $\mathfrak{D}D_2$ nur einfach, in $\mathfrak{D}$ also nicht mehr vorkommt. Diese und folglich jede andere Reihe III′ ist mithin auch zu der einen Reihe II von Ketten D_2, B_2 so projectivisch, dafs

in den Tangentenbüscheln in D_2 die Strahlen $D_2\mathrm{A}$ und $D_2\mathrm{A}^1$ sich selbst entsprechen. III'_β schneidet sich mit II in einer Kette A_1, B_2. Eine solche nämlich erzeugen zwei projectivische Strahlbüschel A_1 und B_2, in denen $A_1\mathrm{A}$ und $B_2\mathrm{A}$ einander entsprechen (§ 4). Setzt man jetzt $\mathfrak{a}$ und $\mathrm{A}D_2$ in zwei projectivischen Strahlbüscheln mit dem Centrum A einander, $\mathrm{A}A_1$ und $\mathrm{A}B_2$ aber sich selbst entsprechend, so geht die erzeugte Kette A_1, B_2 in eine andere A_1, B_2 über. Sie wird durch zwei projectivische Kettenbüschel A_1, D_2 und B_2, D_2 erzeugt (§ 15), deren Tangentenbüschel in D_2 zu den beiden Strahlbüscheln bezüglich $\mathfrak{a}$ perspectivisch sind, und in denen daher $D_2\mathrm{A}$ und $D_2\mathrm{A}^1$ sich selbst entsprechen. Die neue Kette A_1, B_2 geht durch D_2, wenn die beiden Strahlbüschel A_1 und B_2 das Geradenpaar $A_1B_2, \mathfrak{a}$ erzeugten, also beide hinsichtlich $\mathfrak{a}$ perspectivisch waren. Die Tangentenbüschel in D_2 der Kettenbüschel D_2, A_1 und D_2, B_2, welche A_1, D_2, B_2 erzeugen, stimmen mithin überein. Dieser letztere Kegelschnitt kann also nur dann der besonderen Kette $A, D_2, \mathfrak{D}$ zugehören, wenn das Büschel $AA_1, \mathfrak{D}D_2$ bei D_2 dasselbe Tangentenbüschel hat, wie D_2, B_2, oder nur dann, wenn AA_1, D_2, BB_1 und B_2, D_2, A_2 einander berühren.

Mit der Kette $A, \mathfrak{D}$ ändert sich das Kettenbüschel III', welches der festen Anordnung II der Ketten D_2, B_2 zugeordnet wird. Einer festen Kette der letzteren Reihe werden dabei die Ketten D_2, A_1 in einer der Anordnungen III_α, welche zum Büschel $A, \mathfrak{D}$ projectivisch sind, zugeordnet. Eine der Reihen III_α, deren Curven der Kette B_2, A_1, D_2 zugeordnet werden, liefert in A_1 das Tangentenbüschel der Reihe IV der Ketten A_1, B_2. Das Tangentenbüschel ist daher auf die $n-1$ Tangentenbüschel in A von $A, \mathfrak{D}$ so bezogen, dafs der von A_1 nach A^1 und die $n-1$ von den Punkten A nach A führenden Strahlen einander zugehören. Denn es entsprechen in den projectivischen Tangentenbüscheln in A der Ketten III und dem Tangentenbüschel von III_α in D_2 die nach A führenden Strahlen einander; in den Tangentenbüscheln in D_2 und A_1 des letzteren Büschels aber gehören $D_2\mathrm{A}$ und $A_1\mathrm{A}^1$ einander zu. Die beiden Kettenbüschel $A, \mathfrak{D}$ (III) und B_2, A_1 (IV) sind daher so projectivisch, dafs in den n Tangentenbüscheln in A und B_2 die nach A führenden Strahlen einander zugehören. Sie erzeugen also eine Kette $AA_1, \mathfrak{D}B_2$, auf der die gesuchte Gruppe DD_1 sich befindet. Sie enthält den Punkt D_2 selbstverständlich, wenn er noch in $\mathfrak{D}$ vorkommt, mithin AA_1, D_2, BB_1 in D_2 eine Verzweigung hat.

Aufserdem gehört D_2 nur dann der Kette an, wenn AA_1, D_2, BB_1 und B_2, D_2, A_2 in D_2 dieselbe Tangente haben; nur dann entsprechen nämlich die Ketten $A, D_2, \mathfrak{D}$ und B_2, D_2, A_1 von III und IV einander.

Die Kette B_2, D_2, A_2 kann nicht alle Punkte von BB_1 enthalten, da sonst A_2 nicht auf ihr liegen könnte. Ist B_1 nicht auf ihr und folglich auch nicht auf der bereits gewonnenen Kette $AA_1, \mathfrak{D}B_2, DD_1$ gelegen, so erhalten wir eine zweite Kette $AA_1, \mathfrak{D}'B_1, DD_1$, wo $\mathfrak{D}'D_2$ eine Gruppe der Involution AA_1, BB_2 ist. Diese Kette mufs D_2 enthalten, wenn $AA_1, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ bei D_2 entweder eine Verzweigung oder eine Berührung mit $B_1D_2A_2$ hat. Beide Ketten $AA_1, \mathfrak{D}B_2, DD_1$ und $AA_1, \mathfrak{D}'B_1, DD_1$ haben, als demselben Involutionsfelde AA_1, DD_1 angehörig, aufser AA_1 nur die Gruppe DD_1 gemeinsam. Wissen wir, dafs D_2 kein mehrfacher Punkt seiner Gruppe DD_1D_2 ist, so darf eine von beiden den Punkt D_2 nicht enthalten. Wenn wir die Bezeichnung der Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 richtig wählen, wird AA_1, D_2, BB_1 weder bei D_2 eine Verzweigung noch eine Berührung mit B_2, D_2, A_2 haben, wie es der Satz behauptet.

§ 60. Jede Halbkette $A_1A_2 \ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ oder AA_1A_2, BB_1B_2 besteht, neben etwaigen geschlossenen, aus $n+1$ getrennten ungeschlossenen Zügen (Ranken), welche die $2n+2$ Punkte A_λ, B_μ unter einander verbinden. Die verschiedenen Halbketten $A_1A_2 \ldots A_{n+1}, B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ schliefsen sich stetig an einander.

Da je nur eine Halbkette AA_1, BB_1 und A_2, B_2 unendlich ferne Punkte enthält, giebt es auch nur eine derartige im Büschel $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$, denn erstere müssen, wenn sie sich ergeben soll, einander entsprechen. Aufser dieser schliefsen wir noch die höchstens $2n$ Halbketten aus, auf denen singuläre Gruppen liegen. Es sei D_2 ein beliebiger Punkt einer der übrigen. Dann kann man (§§ 37 und 59) aus den Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2 je zwei Punkte A_{i_1}, A_{i_2} resp. B_{i_1}, B_{i_2} so aussondern, dafs die Halbkette $A^iA_{i_1}, D_2, B^iB_{i_1}$, wo A^i und B^i zusammenfassend je die übrigen $n-1$ Punkte bezeichnen, nach D_2 eine einfache Ranke A_{i_1}, D_2, B_{i_1} sendet, die in D_2 eine andere Tangente hat, als B_{i_2}, D_2, A_{i_2}. Beide Gebilde schneiden daher einander in D_2; zu jeder Seite der einen liegen bei D_2 Punkte der anderen. Halbketten, die nahe bei B_{i_2}, D_2, A_{i_2} liegen, entsprechen solche, die nahe bei AA_{i_1}, D_2, BB_{i_1} liegen. Wenn die An-

näherung genügend weit getrieben wird, enthalten diese je eine Ranke A_{i_1}, B_{i_1}, die A_{i_1}, D_2, B_{i_1} so nahe liegt, wie man nur immer will. Sie mufs mit ihrer entsprechenden Halbkette B_{i_2}, A_{i_2} in der Nähe von D_2, aber nur in einem Punkte, sich schneiden, weil die Tangenten in dem Schnittpunkte (§§ 39, 2 und 5) denen in D_2 nahe liegen, also verschieden von einander sein müssen. Die Ranken A_{i_1}, B_{i_1} eines schmalen A_{i_1}, D_2, B_{i_1} einschliefsenden Bandes schneiden das zu untersuchende Gebilde in je einem bei D_2 gelegenen Punkte. Dieser gehört also einem bestimmten unverzweigten Theile derselben an.

Alle Punkte A_λ, B_μ gehören der Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 an. Denn die Halbkette B_2, A_1, A_2 z. B. hat mit ihrer entsprechenden AA_1, BB_1 den Punkt A_1 nothwendig gemeinsam. Haben beide Curven in B_1 dieselbe Tangente, so kann man eine Zerlegung $A^iA_1A_{i_2}$ und $B^iB_{i_1}B_{i_2}$ der beiden Gruppen so finden, dafs B_{i_2}, A_1, A_{i_2}, eine andere Tangente in A_1 zeigt, als die entsprechende besondere Kette $A^iA_1, B^iB_{i_1}$, deren Halbtangente in A_1 zugleich der untersuchten Curve angehört. Die besondere Halbkette A^iA_1, B^iB_{i1} und alle ihr benachbarten haben die A_1 zunächst liegenden Theile auf der durch ihre Halbtangente bestimmten Seite der Kette B_{i_2}, A_1, A_{i_2}. Die entsprechenden Halbketten B_{i_2}, A_{i_2} liegen zum Theil auf dieser, zum Theil aber auf der anderen Seite von B_{i_2}, A_1, A_{i_2}. Die ersteren, aber nur diese, können ihre entsprechenden Gebilde in je einem Punkte schneiden, der beliebig nahe an A_1 heranrücken kann. A_1 und ebenso jeder andere Punkt A_λ oder B_μ ist daher Anfangs- oder Endpunkt eines Curvenbestandtheils.

Von irgend einem Curvenpunkt D_2 aus ist auf derselben ein continuirlicher Fortschritt nach beiden Seiten möglich. Man könnte dabei zunächst einem Punkte S sich unbegrenzt nähern, ohne ihn doch je zu erreichen. S mufs aber der Curve angehören. Entsprächen die Curven $A^iA_{i_1}, S, B^iB_{i_1}$ und B_{i_2}, S, A_{i_2} sich nicht, so würden die beiden zugehörigen Curven je des anderen Büschels von S endlich entfernt sein, und es läge daher auch in einer bestimmten Umgebung von S kein Curvenpunkt. Da man also nach dem bereits Erledigten auch über einen solchen Grenzpunkt fortschreiten könnte, giebt es derartige Punkte überhaupt nicht. Schreiten wir von irgend einem Punkte D_2 aus auf dem betreffenden Curventheil vorwärts, so müssen wir bei stetiger Bewegung entweder nach D_2

zurück oder zu einem der Punkte A_λ, B_μ gelangen. Die Curve kann daher aufser $n+1$ Ranken, welche die Punkte A_λ, B_μ unter einander verbinden, nur noch geschlossene Züge enthalten.

§ 61. Jede der $n+1$ Ranken des vorigen Satzes verbindet einen der Punkte A_λ mit einem Punkte B_μ.

Erster Nachweis. Angenommen, es sei eine Ranke A_{i_1}, A_{i_2} möglich. Irgend ein Punkt C_1 der Curve bestimmt eine Gruppe der Involution AA_1A_2, BB_1B_2, deren andere n Punkte (§ 58) auch der Curve angehören müssen. Läfst man C_1 von A_{i_1} aus auf der Ranke $A_{i_1}A_{i_2}$ sich stetig bewegen, so müssen die übrigen n Punkte C_2, C_3, ... C_{n+1} sich von A_{i_2}, A_{i_3}, ... $A_{i_{n+1}}$ aus stetig bewegen (§ 52). C_2 bewegt sich von A_{i_2} aus auf der Ranke A_{i_1}, A_{i_2}, gleich C_1. Da beide in entgegengesetzter Richtung fortschreiten, so begegnen sie einander einmal und dieser Treffpunkt ist in seiner Gruppe ein Doppelpunkt. Da nun die Halbkette keine singulären Gruppen enthält, so wird die Annahme unstatthaft, es mufs also jede der $n+1$ Ranken einen der Punkte A_1, A_2, ... A_{n+1} mit einem der Punkte B_1, B_2, ... B_{n+1} verbinden.

§ 62. Zweiter Beweis für den Satz vom § 61.

Wir betrachten das ganze Halbkettenbüschel $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$. Es entsteht, wenn man auf eine feste Anordnung des Büschels AA_1, BB_1 in allen möglichen Weisen das Halbkettenbüschel B_2, A_2 so bezieht, dafs in den reell-projectivischen Tangentenbüscheln die von A, A_1, B_2 nach A und die von B, B_1, A_2 nach A¹ führenden Strahlen einander entsprechen. Liegen in zwei Anordnungen II_α und II_β der Halbketten B_2, A_2 zwei entsprechende einander genügend nahe, so rücken je zwei andere entsprechende Ketten einander so nahe, als man nur immer will (§ 2a, Zusatz 2 und § 5). Daher liegen auch die Erzeugnisse von I mit II_α und II_β ihrer ganzen Ausdehnung nach einander nahe. Schneidet eine Curve AA_1, BB_1 ihre entsprechende aus II_α in D_2 und haben beide hier verschiedene Tangenten, so mufs die zugehörige Curve in II_β sie nahe bei D_2 schneiden. Für jede Erzeugungsweise der festen Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 ergiebt sich eine entsprechende der zweiten ihr genäherten. Da nun jene ohne Doppelpunkte ist, müssen in jedem ihrer Punkte P sich bei wenigstens

einer Erzeugungsweise die Halbketten $A^i A_{i_1}$, P, $B^i B_{i_1}$ und B_{i_2}, P, A_{i_2} schneiden, ohne die Tangenten gemeinsam zu haben. Folglich nähert jedem Punkte einer festen Halbkette $A_1 \ldots A_{n+1}$, $B_1 \ldots B_{n+1}$ ohne Doppelpunkt sich wenigstens ein Punkt einer zweiten, wenn man einem von den A_λ und B_μ verschiedenen Punkte der ersteren einen der zweiten Curve genügend nähert.

Da zwei verschiedene Reihen II_α und II_β keine gemeinsame Halbkette haben, so treffen zwei verschiedene Halbketten AA_1A_2, BB_1B_2 sich nur in den A_λ und B_μ. Die gleichstelligen Glieder der Reihen II ordnen sich (§ 19 Beispiel) zu neuen Reihen B_2, A_2 zusammen, in deren unter sich projectivischen Tangentenbüscheln in B_2 und A_2 die Strahlen $B_2\mathrm{A}^1$ und $A_2\mathrm{A}$ einander entsprechen. In diesen Anordnungen II'_α müssen die Halbketten B_2, A_2 bestimmten Halbketten AA_1, BB_1 zugeordnet werden, damit eine fest gegebene Anordnung der Halbketten AA_1A_2, BB_1B_2 entstehe. Die AA_1, A_2, BB_1 zugehörige Reihe II'_γ ergiebt die Tangentenreihe des Büschels AA_1A_2, BB_1B_2 in A_2 und die AA_1, B_2, BB_1 zugesellte Reihe diejenige in B_2. Diese sind daher so projectivisch, dafs die imaginären Strahlen $B_2\mathrm{A}^1$ und $A_2\mathrm{A}$ einander entsprechen. Da man A_2 mit jedem A_λ und B_2 mit jedem B_μ vertauschen kann, so sind die Tangentenbüschel in AA_1A_2 auf die in BB_1B_2 so reell-projectivisch bezogen, dafs den von ersteren nach A die von letzteren nach A^1 führenden Strahlen entsprechen. Jene bewegen sich mithin in einer, diese in der entgegengesetzten Richtung. Die Halbtangenten der einzelnen Halbketten des Büschels erhält man aus der vorigen Bestimmung unzweideutig, wenn man einen Satz zusammengehöriger kennt; denn die Halbtangentenbüschel sind nach der Stetigkeit, also so auf einander bezogen, dafs die Halbstrahlen von $2n+2$ gestreckten Winkeln in $A_1, \ldots A_{n+1}$, $B_1, \ldots B_{n+1}$ einander entsprechen. Da die untersuchte Curve nur aus getrennten Zügen besteht, so müssen von einer zweiten genügend genäherten Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 die einzelnen Züge den ihrigen nahe liegen, jeder Ranke der ersten eine dieselben Punkte verbindende der zweiten, jedem geschlossenen Zuge ein anderer. Wenn nun die Curve sich stetig in ihrem Büschel von der einen zur anderen Lage verändert, so durchmifst jede Ranke, sich stetig verändernd, den mondförmigen Raum zwischen ihrer Anfangs- und Endlage. Dabei müssen die Tangenten in den Endpunkten, wie es evident ist[20], sich nothwendig in entgegengesetz-

ten Richtungen drehen und es mufs also diese, wie jede andere Ranke einen der Punkte A_λ mit einem der Punkte B_μ verbinden.

§ 63. Eine involutorische Ebene

$$A_1 A_3 \ldots A_{n+1}, B_1 B_3 \ldots B_{n+1}, \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots$$

$n$ter Ordnung hat mit einer projectivischen Punktebene $B_2, A_2, \mathfrak{C}_2, \ldots$ stets Punkte gemeinsam und zwar, wenn man von höchstens $2n$ speciellen Lagen des Punktes $\mathfrak{C}_2$ absieht, $n+1$ verschiedene. Vorausgesetzt wird dabei, dafs $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ keinen Punkt gemeinsam haben.

Die nach der Behauptung vorhandenen Punkte bilden eine Gruppe $C C_1 C_2$ der Involution $A A_1 A_2, B B_1 B_2$. Diese Glieder können in ihr beliebig ausgewählt und daher den Festsetzungen des § 57 unterworfen werden. $C C_1 C_2$ liegt auf einer bestimmten Halbkette $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$. Es seien zunächst die Halbketten des Büschels ausgeschlossen, welche singuläre Gruppen oder die unendlich ferne Gerade enthalten. $A_{i_1} B_{k_1}$ sei eine Ranke einer der regulären Halbketten. Die gesuchten Punkte sind dann auch den beiden Feldern

$$A^i A_{i_1}, B^k B_{k_1}, \mathfrak{C}' \mathfrak{C}'_1 \ldots \barwedge B_{k_2} A_{i_2} \mathfrak{C}'_2$$

gemeinsam (§ 42). Jeder $A^{(i)} A_{i_1}$ und $B^{(k)} B_{k_1}$ beigeordneten Kette $A^i A_{i_1} \circ B^k B_{k_1}$ entspricht eine B_{k_2} und A_{i_2} beigeordnete. Zieht man durch einen beweglichen Punkt des Zweiges A_{i_1}, B_{i_1} jederzeit die Kette $A_{i_2} \circ B_{k_2}$, und sucht man zweitens zu der Kette $A^{(i)} A_{i_1} \circ B^{(k)} B_{k_1}$, die er bestimmt, die projectivisch zugehörige Kette $B_{k_2} \circ A_{i_2}$, so fallen beide nur für die gesuchten Punkte, welche auf der Ranke A_{i_1}, B_{k_1} liegen, zusammen. Beide Ketten bewegen sich aber stetig. Die erste kann, da die Ranke A_{i_1}, B_{k_1} weder A_{i_2} noch B_{k_2} enthält, nicht auf diese zusammenschrumpfen. Die zweite aber reducirt sich für die Anfangs- und Endlagen A_{i_1} und B_{k_1} auf die Punkte B_{k_2} und A_{i_2}. Daher werden beide Ketten nothwendig einmal identisch, und auf A_{i_1}, B_{k_1} liegt wenigstens einer der gesuchten Punkte. Ebenfalls liegt auf A_{i_2}, B_{k_2}; A_{i_3}, B_{k_3}; ... $A_{i_{n+1}}, B_{k_{n+1}}$ je ein Punkt. Da es ihrer aber (§ 43) höchstens $n+1$ giebt, so findet sich genau einer auf jeder einzelnen Ranke.

Liegt $\mathfrak{C}_2$ auf einer der ausgenommenen Halbketten B_2, A_2, so ziehen wir eine keinen der ausgezeichneten Punkte enthaltende Halbkette $A_2, \mathfrak{C}_2$, und wählen auf ihr sonst beliebig den Punkt $\mathfrak{D}_2$ so, dafs er keiner der

$2n+1$ ausgezeichneten Halbketten $B_2\mathfrak{C}_2A_2$ angehört. Dem Punkte $\mathfrak{D}_2$ gehört eine aus der Beziehung

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1 \ldots \overline{\wedge}\ B_2, A_2, \mathfrak{D}_2 \ldots$$

zu bestimmende Gruppe DD_1D_2 zu. Die $\mathfrak{C}_2$ entsprechende Gruppe findet sich dann auch aus der Beziehung:

$$AA_1, DD_1, \ldots \overline{\wedge}\ D_2, A_2, \ldots$$

Hiernach liegen die gesuchten Punkte auf einer regulären Halbkette AA_1A_2, DD_1D_2, und auf jeder Ranke findet sich einer von ihnen. Damit ist der Lehrsatz erwiesen.

§ 64. Ein involutorisches Feld

$$A_1A_2 \ldots A_m, B_1B_2 \ldots B_m, \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_m, \ldots$$

$m$ter Ordnung hat mit einem zu ihm projectivischen

$$B_{m+1}B_{m+2} \ldots B_{n+1}, A_{m+1}A_{m+2} \ldots A_{n+1}, \mathfrak{C}_{m+1} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots$$

mit demselben Grundpunkt stets Punkte, und wenn man von speciellen (höchstens $2n$) Lagen der Gruppe $\mathfrak{C}_{m+1} \ldots \mathfrak{C}_{n+1}$ absieht, genau $n+1$ Punkte gemeinsam. Vorausgesetzt wird dabei, dafs $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ keine gemeinsamen Punkte haben.

Der Satz folgt aus § 63 mittels § 42. Damit ist § 32 von n auf $n+1$ übertragen, wie es für die §§ 33, 34a, 34b, 35, 36a bereits in den §§ 47, 43, 56, 51, 52 geschehen war. Zur vollständigen Lösung der im zweiten Abschnitt gestellten Aufgabe sind nur noch die Lehrsätze 36b, 37, 38 und 39 zu bestätigen, von denen die ersteren die Beziehung eines involutorischen Feldes zu einem projectivischen Punktfeld behandeln, während der letztere sich mit der stetigen Veränderung eines involutorischen Feldes befafst.

§§ 65—70. Von den involutorischen Feldern.

§ 65. Die Gruppe eines involutorischen Feldes bewegt sich stetig mit dem entsprechenden Punkte einer zu ihr projectivischen Ebene.

Es mögen den Punkten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Gruppen AA_1A_2 und BB_1B_2, den Punkten $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_1''$ aber die Coincidenzpunkte der Reihen

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \ldots \overline{\wedge}\ B_2, A_2, \mathfrak{C}_2', \ldots \qquad \text{I)}$$

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \ldots \overline{\wedge}\ B_2, A_2, \mathfrak{C}_2'', \ldots \qquad \text{II)}$$

entsprechen, so ist (§ 47)

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1' \mathfrak{C}_1'' \;\overline{\wedge}\; A_2 B_2 \mathfrak{C}_2' \mathfrak{C}_2'' \,.$$

Also liegen (§ 16, Beweis) $\mathfrak{C}_2'', \mathfrak{C}_2'$ und $\mathfrak{C}_1'', \mathfrak{C}_1'$ gleichzeitig einander nahe. Einer vierten Gruppe $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ von AA_1, BB_1 gehören die durch die Beziehung

$$B_2, A_2, \mathfrak{C}_2', \mathfrak{D}_2' \;\overline{\wedge}\; AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \mathfrak{C}_2'', \mathfrak{D}_2''$$

bestimmten Punkte $\mathfrak{D}_2'$ und $\mathfrak{D}_2''$ zu. Letzterer liegt dem ersteren um so näher, je mehr $\mathfrak{C}_2''$ an $\mathfrak{C}_2'$ heranrückt. Umfafst $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ den Punkt $\mathfrak{D}_2''$, so liegt der ihm in der festen Beziehung I entsprechende Punkt jenem sehr nahe. Da nun die Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ stetig auf das Feld $B_2 A_2 \mathfrak{C}_2'$ desselben Grundpunktes bezogen ist, so liegt jeder Doppelpunkt der Reihen II um so näher bei einem solchen der Reihen I, je näher $\mathfrak{C}_2''$ an $\mathfrak{C}_2'$ und folglich $\mathfrak{C}_1''$ an $\mathfrak{C}_1'$ heranrückt.

Hat die zu I gehörige Gruppe die unendlich ferne Gerade als Bestandtheil, so beziehe man das Strahlbüschel A so projectivisch auf ein concentrisches, dafs dem Strahle $\mathfrak{a}$ der andere $\mathrm{A}A_0$ zugehört. Der durch II bestimmten Gruppe gehört dann ein Punkt A_0' an, der nahe bei A_0 liegt. In der eigentlich zu betrachtenden Ebene gehört $\mathfrak{C}_1''$ eine Gruppe mit theils sehr weit entfernten Punkten zu.

§ 66. Eine Halbkette besteht allein aus $n+1$ Ranken, die in gewisser Weise die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ mit den Punkten $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ verbinden. Falls eine Gruppe mit einem $p$fachen Punkte auf ihr sich vorfindet, fliefsen p von ihnen zu einem $2p$-strahligen Sterne zusammen.

Falls die betrachtete Halbkette keinen mehrfachen Punkt enthält, müfsten die projectivischen Gebilde

$$AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_1 \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, C_1 \ldots$$

wenn C_1 ein Punkt der Halbkette aufserhalb der $n+1$ Ranken wäre, $n+2$ gemeinsame Punkte haben (§ 62), was laut § 43 unmöglich ist. Daher besteht die Halbkette nur aus $n+1$ Zügen, welche die Punkte A, A_1, A_2 in bestimmter Weise mit denen B, B_1, B_2 verbinden. Enthält die Halbkette Gruppen, die einer solchen mit einem $p$fachen Punkt D_p nahe liegen, so müssen p von ihren Ranken sich D_p gleichzeitig nähern, denn auf p verschiedene Ranken vertheilen sich die p verschiedenen bei D_p ge-

legenen Punkte der Gruppe. Bei der D_p enthaltenden Curve fliefsen mithin p Ranken in einen $2p$-strahligen Stern zusammen mit dem Mittelpunkt in D_p. Liegen auf der Halbkette keine anderen singulären Gruppen, so können auch keine weiteren Begegnungen ihrer Ranken stattfinden. Da es in dem Halbkettenbüschel $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}, B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ Halbketten giebt, die von verschiedenen Seiten her sich der ausgezeichneten Curve anschliefsen, und die aus je $n+1$ verschiedenen Ranken bestehen, so trennen die p Strahlen des Sterns, welche nach Punkten von AA_1A_2 führen, diejenigen, welche D_p mit Punkten von BB_1B_2 verbinden.

§ 67. Jede Kette des involutorischen Feldes, die weder die unendlich ferne Gerade, noch auch einen der mehrfachen Punkte enthält, besteht aus höchstens $n+1$ geschlossenen und völlig getrennten Zügen.

Ein Kettenbüschel $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, $B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$ ist auf das entsprechende $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ einer projectivischen Punktebene mit dem Centrum B so bezogen, dafs in den reell-projectivischen Tangentenbüscheln in den genannten $2n+2$ Punkten die Strahlen

$$A_1\mathrm{A}, A_2\mathrm{A}, \ldots A_{n+1}\mathrm{A}, B_1\mathrm{A}^1, B_2\mathrm{A}^1, \ldots B_{n+1}\mathrm{A}^1, \mathfrak{A}_2\mathrm{B}, \mathfrak{B}_2\mathrm{B}^1$$

einander entsprechen. Tritt statt der p getrennten Punkte $A_1, \ldots A_p$ ein $p$facher D_p ein, so hat jede Curve p Tangenten, die eine reelle Gruppe der Strahleninvolution mit den imaginären $p$fachen Strahlen $D_p\mathrm{A}$ und $D_p\mathrm{A}^1$ bilden. Sie ist so reell-projectivisch auf das Tangentenbüschel in $\mathfrak{A}_2$ bezogen, dafs $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}^1$ den imaginären Gruppen $(D_p\mathrm{A})^p$ und $(D_p\mathrm{A}^1)^p$ zugehören. Wenn D_p im Unendlichen liegt, so führen p Züge der Curve in's Unendliche. Ihre p Asymptoten bilden eine Gruppe einer Strahleninvolution mit den $p$fachen Strahlen $E_1\mathrm{A}$ und $E_1\mathrm{A}^1$. Sie ist reell-projectivisch zu dem Tangentenbüschel, und es entsprechen $(E_1\mathrm{A}^1)^p$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$, sowie $(E_1\mathrm{A})^p$ und $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}^1$ einander.

Den $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ beigeordneten Ketten $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ entsprechen AA_1A_2 und BB_1B_2 beigeordnete Ketten $A_1 A_2 \ldots A_{n+1} \circ B_1 B_2 \ldots B_{n+1}$. Dieselben haben mit jeder Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 eine Gruppe gemeinsam. Die Tangenten in einem einfachen Punkte derselben projiciren ein Paar der Involution des Grundpunktes. Indem $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ stetig von $\mathfrak{A}_2$ nach $\mathfrak{B}_2$ sich bewegt, schreitet $AA_1A_2 \circ BB_1B_2$ stetig von AA_1A_2 nach

BB_1B_2 fort. Jede der genannten Ketten trennt jeden Punkt A_λ von wenigstens einem der Punkte B_μ[21].

Jede Kette kann aus zwei Halbketten CC_1C_2, DD_1D_2 und DD_1D_2, CC_1C_2 zusammengesetzt werden, die im Allgemeinen aus je $n+1$ getrennten die Punkte C_λ und D_μ verbindenden Ranken bestehen. Daraus folgt unmittelbar der erste Theil des Lehrsatzes.

Das zu $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ projectivische Büschel AA_1A_2, BB_1B_2 entsteht, wenn man auf eine feste Anordnung I der Ketten BB_1, AA_1 projectivische Anordnungen II_α der Ketten A_2, B_2 bezieht. Die festen Ketten von I beigesellten Reihen II'_α sind zu dem Büschel $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ so projectivisch, dafs in den Tangentenbüscheln in $A_2, B_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ die Strahlen $A_2\mathrm{A}$, $B_2\mathrm{A}^1$, $\mathfrak{A}_2\mathrm{B}$, $\mathfrak{B}_2\mathrm{B}^1$ einander entsprechen. Solche Kettenbüschel A_2, B_2 gehören aber auch den Ketten BB_1, A_2, AA_1 und BB_1, B_2, AA_1 zu und ergeben daher in B_2 und A_2 die Tangentenbüschel des Kettenbüschels AA_1A_2, BB_1B_2.

Was über den Fall ausgesprochen ist, wo $A_1A_2 \ldots A_n$ einen $p$fachen Punkt D_p enthält, ergiebt sich ganz auf demselben Wege, wie das Entsprechende im § 48. Der Fall eines unendlich fernen Punktes der Gruppe $A_1A_2 \ldots A_n$ wird dadurch erledigt, dafs man zu dem betrachteten Strahlbüschel ein concentrisches so projectivisch setzt, dafs $\mathfrak{a}$ und $\mathrm{A}E_1$ einander entsprechen.

Einer $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ beigeordneten Kette entspricht das Erzeugnifs zweier $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$ und $B_2B_3 \ldots B_{n+1}$ resp. B_1 und A_1 beigeordneter Schaaren. Denn wird der Punkt, dem eine Gruppe der Involution zugehört, über eine Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ geführt, so durchläuft bei der Erzeugungsweise

$$A_2 \ldots A_{n+1}, B_2 \ldots B_{n+1}, \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_{n+1}, \ldots \barwedge B_1, A_1, \mathfrak{C}'_1, \ldots$$

$\mathfrak{C}'_1$ eine B_1 und A_1 beigeordnete Kette. Jeder Kette $AA_2 \circ BB_2$ gehört daher für die bezeichneten Lagen eine bestimmte Kette $B_1 \circ A_1$ zu. Eine Halbkette $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ trifft die Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ in einem Punkte $\mathfrak{C}_1$. Ihre Tangenten schneiden ein Paar der Involution des Grundpunktes B aus. Die entsprechende Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 trifft daher die entsprechende beigeordnete Kette $AA_1A_2 \circ BB_1B_2$ in der einen $\mathfrak{C}_1$ entsprechenden Gruppe. Die Tangenten in einem einfachen Punkte derselben schneiden ein Paar der Involution A aus. Jede $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ und $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ beigeordnete Kette trennt jeden Punkt A_λ von wenigstens einem der Punkte B_μ, von

jedem nämlich, der mit A_λ sich durch einen Zweig einer Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 verbinden läfst. Wenn die Kette $\mathfrak{A}_2 \circ \mathfrak{B}_2$ sich nahe um $\mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{B}_2$ zusammenschliefst, mufs sich die entsprechende Kette mit $n+1$ getrennten kleinen Zügen um $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ resp. $B_1, B_2, \ldots B_{n+1}$ zusammendrängen.

§ 68. Liegen den Gruppen AA_1A_2, BB_1B_2 eines involutorischen Feldes diejenigen $A'A'_1A'_2$, $B'B'_1B'_2$ eines zweiten mit demselben Grundpunkt A in der Art nahe, dafs jedem $p$fachen Punkt z. B. von AA_1A_2 p verschiedene oder zum Theil zusammenfallende Punkte von $A'A'_1A'_2$ nahe liegen, so kann jeder dritten Gruppe CC_1C_2 der ersteren eine andere $C'C'_1C'_2$ der zweiten genähert werden, und wenn nun

$$AA_1A_2\,,\,BB_1B_2\,,\,CC_1C_2\,,\,DD_1D_2 \;\overline{\wedge}\; A'A'_1A'_2\,,\,B'B'_1B'_2\,,\,C'C'_1C'_2\,,\,D'D'_1D'_2$$

gesetzt wird, so kann jede Gruppe ihrer homologen beliebig genähert werden, wenn die drei ersten Paare genügend an einander heranrücken.

Man bezeichne mit $C_2\mathfrak{C}$ und $C'_2\mathfrak{C}'$ Gruppen der Involutionen AA_1, BB_1 und $A'A'_1$, $B'B'_1$, ferner setze man

$$A_2B_2C_2\mathfrak{D}_2 \;\overline{\wedge}\; A'_2B'_2C'_2\mathfrak{D}'_2\,,$$

wo dann $\mathfrak{D}'_2$ nahe bei $\mathfrak{D}_2$ liegt. DD_1D_2 und $D'D'_1D'_2$ sind dann die Coincidenzpunkte der Reihenpaare

$$AA_1\,,\,BB_1\,,\,\mathfrak{C}C_2\,,\ldots \;\overline{\wedge}\; B_2\,,A_2\,,\mathfrak{D}_2\,,\ldots \qquad 1)$$
$$A'A'_1\,,\,B'B'_1\,,\,\mathfrak{C}'C'_2,\ldots \;\overline{\wedge}\; B'_2\,,A'_2\,,\mathfrak{D}'_2\,,\ldots \qquad 2)$$

Man setze nun alle vier Reihen unter einander projectivisch. Dann liegt jede Gruppe der Reihe $A'A'_1$, $B'B'_1$, $\mathfrak{C}'C'_2$ bei der entsprechenden der Reihe AA_1, BB_1, $\mathfrak{C}C_2$, und ebenso liegen homologe Punkte der Reihen B_2, A_2, $D_2, \ldots$ und $B'_2, A'_2, D'_2, \ldots$ bei einander. Daher können sich die Punkte D', D'_1, D'_2 nur bei den festen Punkten D, D_1, D_2 finden. Man bezeichne so, dafs D'_2 bei D_2 liegt. Die im § 43 gegebene Methode der Vervollständigung einer Involutionsgruppe ergiebt dann nach § 39, dafs D'_1D' bei D_1D in der Art liegen mufs, dafs jedem $p$fachen Punkte der letzteren Gruppe p verschiedene oder zum Theil zusammenfallende der ersteren nahe liegen.

§ 69. Werden von der Gruppe $B_1 \ldots B_{n+1}$ die Punkte $B_1, B_2, \ldots B_m$ den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_m$ einer anderen Gruppe $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ genügend ge-

nähert, indess $B_{m+1} B_{m+2} \ldots B_{n+1}$ fest bleiben, so kann man von einer dritten Gruppe $C'_1 C'_2 \ldots C'_{n+1}$ der Involution $A_1 \ldots A_{n+1}$, $B_1 \ldots B_{n+1}$ $n - m + 1$ Punkte bei einer dritten Gruppe $C_{m+1} \ldots C_{n+1}$ der Involution $A_{m+1} \ldots A_{n+1}$, $B_{m+1} \ldots B_{m+1}$ annehmen, die m übrigen aber bei $A_1 A_2 \ldots A_m$. Setzt man alsdann

$$A_1 \ldots A_{n+1}, B_1 \ldots B_{n+1}, C'_1 \ldots C'_{n+1}, D'_1 \ldots D'_{n+1} \barwedge$$
$$A_{m+1} \ldots A_{n+1}, B_{m+1} \ldots B_{n+1}, C_{m+1} \ldots C_{n+1}, D_{m+1} \ldots D_{n+1},$$

so liegt die Gruppe $D'_{m+1} \ldots D'_{n+1}$ bei $D_{m+1} \ldots D_{n+1}$ und es findet sich $D'_1 \ldots D'_m$ bei $A_1 A_2 \ldots A_m$.

Da

$$A_1 A_2 \ldots A_m A_{m+1} \ldots A_{n+1} \text{ und } A_1 A_2 \ldots A_m B_{m+1} \ldots B_{n+1}$$

zwei Glieder einer speciellen Involution $(n+1)$ter Ordnung sind, denen zwei Gruppen der ersteren nahe liegen, so ist der Satz nur ein Corollar von § 68.

§ 70. Wenn den Gruppen eines involutorischen Feldes die entsprechenden eines zweiten mit demselben unendlich fernen Grundpunkt genähert, beide aber projectivisch gesetzt werden, so liegen die Punkte entsprechender Ketten paarweise einander nahe, und auch ihre Tangenten in einem solchen Paare, falls der Punkt der festen Ebene nicht singulär ist.

Die Ketten selbst liegen nach § 68 einander nahe. Es seien AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 Gruppen der festen Kette, die beiden letzteren aus $n+1$ verschiedenen Punkten bestehend; A_2 sei von AA_1 getrennt. Die Kette entsteht aus den Büscheln

$$BB_1, AA_1 \barwedge A_2, B_2$$

und zwar entsprechen die nach C_2 führenden Ketten einander. Es seien t_1 und τ_1 die Tangenten derselben in B_1 und A_2; es sei t_2 die Tangente in B_1 der Curve

$$BB_1, A_2, AA_1.$$

Man beziehe die Büschel in B_1 und A_2

$$t_1, t_2 \ldots \barwedge \tau_1, \tau_2 \ldots$$

so reell-projectivisch, dass die Strahlen $B_1\mathrm{A}$ und $A_2\mathrm{A}$ einander entsprechen. Alsdann ist τ_2 (§ 58) die Tangente der Kette AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 im Punkte A_2. Bezieht man auf die zweite Kette die gestrichenen Buchstaben, so entsteht ganz analog die Tangente τ'_2. Es müssen aber, weil

B_1 und B_1' einfache Punkte ihrer Gruppen BB_1 und $B'B_1'$ sind, t_1 und t_1', t_2 und t_2' (§ 39), endlich auch (§ 5) τ_1' und τ_1 einander nahe liegen. Man zeigt nun mit Hülfe von § 2a, Zusatz sehr leicht, dafs auch τ_2' die Tangente der Kette $A'A_1'A_2'$, $B'B_1'B_2'$, $C'C_1'C_2'$ im Punkte A_2 bei der Tangente τ_2 gelegen ist.

Ein Specialfall des Satzes entsteht, wenn man zwei Punkte A_2', A_2 einander nähert und beide durch Ketten mit den beiden festen Gruppen BB_1B_2, CC_1C_2 mittels Ketten der durch sie bestimmten involutorischen Ebene verbindet. Ihre Tangenten in A_2' und A_2 liegen einander nahe, wenn A_2 nicht ein singulärer Punkt der Involutionsebene ist. Man braucht nur $B_1'B_2'B'$ und $C_1'C_2'C'$ mit B_1B_2B und C_1C_2C zusammenfallen zu lassen, um zu diesem Resultat zu gelangen.

Nunmehr sind alle Sätze des zweiten Abschnittes von n auf $n+1$ übertragen und daher als unbedingt gültig erwiesen. Wo wir bei ihrer Aufstellung eine Unbestimmtheit festhielten, kann jetzt eine apodictische Form gebraucht werden. So steht jetzt fest, dafs eine Involution $n$ter Ordnung im Allgemeinen $2(n-1)$ Doppelpunkte hat, und dafs die Anzahl der singulären Gruppen nur dann kleiner als $2(n-1)$ ist, wenn sich Gruppen mit mehrfachen Punkten nachweisen lassen.

Vierter Abschnitt.

Neue Folge von Lehrsätzen über Involutionen. §§ 71—76.

§ 71. Sind auf demselben Träger drei nicht derselben Involution angehörige Gruppen U, V, W zu n Punkten gegeben und sind U_1, V_1 beliebige Gruppen der Involutionen V, W und U, W, so haben die beiden Involutionen U_1, V_1 und U, V eine Gruppe W_1 gemeinsam. Wird U_1 festgehalten, so ändern sich V_1 und W_1 projectivisch zu einander.

Die beiden Reihen

$$U_1, V, W, \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1, U, W, \ldots$$

haben (§ 32) eine Gruppe WW_1 von $2n$ Punkten gemeinsam. Sie gehört den Involutionen UW, VW und U_1W, V_1W gleichzeitig an; daher (§ 33, 2) ist W_1 den Involutionen U_1, V_1 und U, V gemeinsam. Ändert man U_1

in der Involution V, W, hält V_1 aber fest, so mufs nach § 33 W_1 sich mit jener projectivisch ändern[22].

§ 72. Gehören drei Gruppen U, V, W zu n Elementen eines Trägers nicht derselben Involution an, so wird irgend ein Element E des Trägers von drei Gruppen U', V', W' einer Involution $(n-1)$ter Ordnung zu Gruppen der Involutionen V, W; W, U; U, V ergänzt.

Nach § 71 giebt es eine Gruppe von V, W, die mit EU' und EV' zu einer Involution gehört und daher ebenfalls das Element E enthält.

§ 73. Durch zwei projectivische Involutionen desselben Trägers und gleicher Ordnung

$$U_1 U_2 U_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 \ldots$$

und eine dritte, zwei entsprechende Glieder verbindende $U_1 V_1 W_1 Z_1, \ldots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar von Involutionen

$$1) \qquad U_1 U_2 U_3 \ldots,\; V_1 V_2 V_3 \ldots,\; W_1 W_2 W_3 \ldots,\; Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$$

bestimmt, die sämmtlich unter einander projectivisch sind und paarweise dieselbe Coincidenzgruppe G von $2n$ Punkten ergeben. Homologe Glieder reihen sich zu Leitinvolutionen

$$2) \qquad U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots,\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots,\; U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots,$$

die ebenfalls unter sich projectivisch sind, und von denen irgend zwei wieder die Coincidenzgruppe G ergeben. Die neue Schaar ist perspectivisch zu allen Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots$, $V_1 V_2 V_3 \ldots$, u. s. w. Jede der beiden Schaaren heifst die Leitschaar der anderen.

Die gewählte Bezeichnung soll auf die grofse Analogie hinweisen zwischen den in Discussion stehenden Gebilden und den räumlichen Regelschaaren. Eine Regelschaar kann man perspectivisch auf die Punkte irgend einer Leitgeraden beziehen. Ihre einzelnen Geraden aber kann man unabhängig davon zu der Leitschaar perspectivisch, also zu einander projectivisch setzen.

Da den Involutionen $U_\lambda V_1$, G und $U_\lambda V_1$, $U_\lambda W_1$ die Glieder $U_1 V_\lambda$ (§ 33) und $U_\lambda U_1$ (ibid. Z. 2) angehören, so mufs (§ 72) ein bestimmtes Glied $U_1 W_\lambda$ der Involution $U_1 U_\lambda$, $U_1 V_\lambda$ zugleich auch in $U_\lambda W_1$, G

liegen. Da ebenso $U_1 Z_\lambda$ der Involution $U_\lambda Z_1$, G angehört, $U_\lambda, V_\lambda, W_\lambda$, $Z_\lambda, \dots$ aber Glieder derselben Involution $n$ter Ordnung sind, so ist (§ 33, 3)

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \barwedge U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \dots ,$$

und G die Coincidenzgruppe dieser Reihen.

Andererseits gehören den Involutionen $U_1 W_\lambda$, G und $U_1 W_\mu$, G die Gruppen $W_1 U_\lambda$ und $W_1 U_\mu$ an, und es mufs also (§ 33, 2 und 72) $U_1 W_1$ zu $U_1 W_\lambda$ und $U_1 W_\mu$, W_1 zu W_λ und W_μ involutorisch liegen. Daher ist nun

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \dots ;$$

G ist die Coincidenzgruppe auch dieser Reihen (§ 33, 3), da sie allen Involutionen $U_1 W_\lambda$, $U_\lambda W_1$ angehört.

Haben zwei, und folglich alle Involutionen einer Schaar eine Gruppe W entsprechend gemein, so haben (§ 71) die Involutionen der Leitschaar die Gruppe W_1 der übrigen Coincidenzpunkte entsprechend gemein.

Sind die Reihen I nur verschiedene Anordnungen

$$A B U_1 U_2 U_3 \dots ; \; A B V_1 V_2 V_3 \dots ; \; A B W_1 W_2 W_3 \dots$$

derselben Involution $n$ter Ordnung, denen die Gruppen A und B entsprechend gemeinsam sind, so sind auch die Leitinvolutionen

$$A B U_1 V_1 W_1 \dots ; \; A B U_2 V_2 W_2 \dots ; \; A B U_3 V_3 W_3 \dots$$

nur verschiedene Anordnungen derselben Involution, denen ebenfalls die Gruppen A und B gemeinsam sind.

§ 74. Die Coincidenzgruppen $U, V, W, Z, \dots$ zu $m+n$ Elementen zwischen einer festen Involution $M_1 M_2 M_3 M_4 \dots$ $m$ter Ordnung und den zu ihr projectivischen Involutionen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots, \; V_1 V_2 V_3 V_4 \dots, \; W_1 W_2 W_3 W_4 \dots$$

$n$ter Ordnung einer Schaar bilden eine zu allen Leitinvolutionen $U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \dots$ projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung.

Durch ein Element A_1 von M_1 gehe die Gruppe W_1 der Leitinvolution $U_1 V_1 W_1 \dots$ und das Glied W von U, V; diese aber seien die Coincidenzgruppen zwischen $M_1 M_2 M_3 \dots$ und $U_1 U_2 U_3 \dots$ resp. $V_1 V_2 V_3 \dots$ Man setze

$$U V W Z \dots \barwedge U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \qquad 1)$$

Durch die beiden Involutionen

$$2)\qquad U, V, W, Z, \ldots \;\overline{\wedge}\; M_\lambda U_1, M_\lambda V_1, M_\lambda W_1, M_\lambda Z_1, \ldots$$

wird eine Schaar von projectivischen Involutionen definirt. Eine dritte Involution derselben geht von dem mit U und $M_\lambda U_1$ nach der Voraussetzung involutorisch liegenden Gliede $M_1 U_\lambda$ aus. Da nun W und $M_\lambda W_1$ ein Element A_1 von M_1 gemeinsam haben, so ist dasselbe allen Gruppen der von $M_1 U_\lambda$ ausgehenden Involution der Schaar gemeinsam. Von der Involution $V, M_\lambda V_1$ bestimmt aber A_1 das Glied $M_1 V_\lambda$. Mithin gehört irgend zwei Gliedern Z und $M_\lambda Z_1$ eine Gruppe zu, die neben M_1 ein Glied $\mathfrak{Z}_\lambda$ von U_λ, V_λ enthält.

Die so entstehenden drei projectivischen Reihen

$$3)\quad M_\lambda U_1, M_\lambda V_1, M_\lambda W_1, M_\lambda Z_1, \ldots \;\overline{\wedge}\; M_1 U_\lambda, M_1 V_\lambda, M_1 \mathfrak{W}_\lambda, M_1 \mathfrak{Z}_\lambda, \ldots \;\overline{\wedge}\; U, V, W, Z, \ldots$$

haben mithin dieselbe Gruppe J von $2(m+n)$ Punkte gemeinsam. Der dritten und zweiten Reihe ist aber augenscheinlich M_1, der ersten und dritten M_λ gemeinsam. Daneben enthält J noch eine unveränderliche Gruppe H von $2n$ Elementen. Dieselbe ist, wie auch λ gewählt wird, den projectivischen Involutionen $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ und $U_\lambda V_\lambda \mathfrak{W}_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda \ldots$ gemeinsam. Also (§ 73) gehören alle diese Involutionen einer und derselben Schaar an; H mufs dann auch die gemeinsame Coincidenzgruppe ihrer Leitinvolutionen

$$4)\quad U_1 U_2 U_3 \ldots U_\lambda, V_1 V_2 V_3 \ldots V_\lambda, W_1 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 \ldots \mathfrak{W}_\lambda, Z_1 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z}_3 \ldots \mathfrak{Z}_\lambda$$

sein. Mithin fällt H mit G, $\mathfrak{W}_\lambda$ mit W_λ, Z_λ mit $\mathfrak{Z}_\lambda$ zusammen.

Z ist nun (§ 33, 3) das Erzeugnifs der Reihen

$$M_1 M_2 M_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; Z_1 Z_2 Z_3 \ldots,$$

weil sie gleichzeitig als Gruppe den Involutionen

$$M_1 Z_2, M_2 Z_1 : M_1 Z_3, M_3 Z_1 : M_1 Z_\lambda, M_\lambda Z_1 : \ldots$$

angehört. Da noch die Beziehung

$$U V W Z \ldots \;\overline{\wedge}\; U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \ldots$$

obwaltet, so ist der Lehrsatz erwiesen. Mit jeder Leitinvolution hat $UVWZ\ldots$ aufser der Gruppe G noch das ihr zugehörige Glied der Reihe $M_1 M_2 M_3 \ldots$ gemeinsam.

§ 75. Sollen alle Gruppen einer Involution $n$ter Ordnung G_1H_1, G_2H_2, ohne dafs ihnen Elemente gemeinsam sind, Gruppen einer Involution G_1, G_2 niederer, $m$ter Ordnung umfassen, so mufs ihre Ordnungszahl ein Vielfaches rm von m sein. Ihre Glieder setzen sich aus je r Gruppen der genannten Involution zusammen, denen in einem auf die Involution $m$ter Ordnung projectivisch bezogenen, einförmigen Gebilde je eine Gruppe einer Involution $r$ter Ordnung entspricht.

Der Satz wird für Zahlen, die kleiner als n sind, vorausgesetzt. Die Gruppen der Involution ergeben sich als Coincidenzgruppen der Reihen

$$H_1, H_2, \ldots \barwedge G_2, G_1, \ldots$$

Irgend eine dritte Gruppe G_3 kann einer Involutionsgruppe von H_1G_1, H_2G_2 nur dann angehören, wenn sie zugleich in einer Gruppe $\mathfrak{H}_3$ der Involution H_1, H_2 vorkommt. Daher kann $n-m$ nicht kleiner als m sein. Sind $n-m$ und m einander gleich, so dürfen sich die Involutionen H_1, H_2 und G_1, G_2 nur durch die Anordnung unterscheiden. Bezieht man die Involution auf ein einförmiges Gebilde projectivisch, so erhält man aus $H_1 H_2 \mathfrak{H}_3 \ldots$ eine feste Reihe $A_1 A_2 \mathfrak{C}_1' \ldots$, auf welche alle möglichen Anordnungen $B_2 B_1 \mathfrak{C}_1 \ldots$ bezogen werden. Sie haben ein Paar der Involution A_1B_1, A_2B_2 gemeinsam, welches sich prospectivisch mit $\mathfrak{C}_1$ ändert. Zu diesen Paaren hat man die entsprechenden Gruppenpaare der Involution G_1, G_2 aufzusuchen, um die untersuchte Involution zu erhalten. Allgemein mufs $n-m$ ein Vielfaches $(r-1)m$ von m sein. H_1, H_2, $\mathfrak{H}_3, \ldots$ bestehen aus je $r-1$ Gruppen.

$$G_1', G_1'', \ldots G_1^{(r-1)} \;;\; G_2', G_2'', \ldots G_2^{(r-1)} \;:\; G_3', G_3'', \ldots G_3^{(r-1)}$$

der Involution G_1, G_2. In dem einförmigen Gebilde entspricht der Involution $(r-1)m$ter Ordnung die Involution $(r-1)$ter Ordnung

$$A_1'A_1'' \ldots A_1^{(r-1)} \;,\; A_2'A_2'' \ldots A_2^{(r-1)} \;,\; A_3'A_3'' \ldots A_3^{(r-1)} \ldots$$

Sie hat mit den verschiedenen Reihen

$$A_2 \quad, \quad A_1 \quad, \quad \mathfrak{A}_1 \ldots$$

Gruppen der Involution $A_1A_1' \ldots A_1^{(r-1)}$, $A_2A_2' \ldots A_2^{(r-1)}$ gemeinsam. Die so entstehende Gruppe mufs sich projectivisch zu dem $A_3'A_3'' \ldots A_3^{(r-1)}$ entsprechenden Gliede $\mathfrak{A}_1$ verändern, also auch projectivisch zu der $G_3'G_3'' \ldots G_3^{(r-1)}$ zugeordneten veränderlichen Gruppe $\mathfrak{G}_3$ und endlich zu der

Gruppe $H_3 G_3$ der Involution $H_1 G_1, H_2 G_2$. Aus jeder Gruppe der Involution $A_1 A_1' \ldots A_1^{(r-1)}$; $A_2 A_2' \ldots A_2^{(r-1)}$ erhält man die entsprechende der untersuchten Involution, indem man die r ihren Elementen entsprechenden Gruppen von G_1, G_2 aufsucht. $H_1 G_1, H_2 G_2$ ist also gleichsam eine Involution $r$ter Ordnung, aber gebildet aus den Gruppen einer Involution $m$ter Ordnung als Elementen.

§ 76. Von den singulären Gruppen der allgemeinen Involutionen $n$ter Ordnung.

Ein Involutionsfeld $n$ter Ordnung hat stets $2(n-1)$ Doppelpunkte, wenn man übereinkommt, in einem $p$fachen Punkt irgend einer Gruppe $p-1$ von ihnen zu vereinigen.

Man setze, wie früher, (§ 53ff.)

$$D_1 D_2 A_1 B_1 \ldots \barwedge D_1 D_2 A_1' B_1' \ldots ,$$

so entsteht aus der gegebenen Involution $AA_1, BB_1, \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ die projectivische $A'A_1', B'B_1', C'C_1'$. Zwei entsprechenden Gruppen EE_1 und $E'E_1'$ ist der Punkt D_2 gemeinsam. Von der Gruppe $D_2\mathfrak{A}'$ der Involution AA_1, $A'A_1'$ geht eine Involution

$$D_2\mathfrak{A}', D_2\mathfrak{B}', D_2\mathfrak{C}', D_2\mathfrak{D}', D_2\mathfrak{E}', \ldots$$

der durch beide projectische Involutionen bestimmten Schaar aus. Läfst man A_1' sich A_1 unbegrenzt nähern, so geht die Involution $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \ldots$ in eine andere mit $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ projectivische Involution $(n-1)$ter Ordnung $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ über, die aufser D_1 noch eine Gruppe von $2(n-1)$ Punkten mit jener gemeinsam hat. $\mathfrak{C}$ ist aber nichts anderes als die Doppelpunktsgruppe der Involution D_n, CC_1 und hat daher nach der Entwickelung des § 56 in jedem $p$fachen Punkte von CC_1 selbst einen $(p-1)$fachen Punkt. G gehört alsdann zu jeder Involution $\mathfrak{A}CC_1, \mathfrak{C}AA_1$. Da D_p in der ersteren Gruppe $p$fach, in der letzteren aber nur $(p-1)$-fach enthalten ist, so kann G aufserhalb D_p nicht mehr als $2n-p-1$ Punkte enthalten. Aber noch zu unendlich vielen anderen Involutionen $n$ter Ordnung steht $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ in ganz derselben Beziehung, wie zu $AA_1, BB_1, CC_1, \ldots$ Alle Involutionen

1) $AA_1, B'B_1', C'C_1' \ldots$; $AA_1, B''B_1'', C''C_1'' \ldots$; u. s. w. ,

bei denen die entsprechenden Gruppen

2) $BB_1, B'B'_1, B''B''_1 \ldots$; $CC_1, C'C'_1, C''C''_1 \ldots$; $DD_1, D'D_1, D''D_1 \ldots$ je mit D_1^n in einer Involution liegen, genügen dieser Bedingung. Da alsdann die Involutionen 1) zu einer Schaar gehören (§ 73), so bilden ihre Coincidenzgruppen mit der einen Reihe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ eine Involution $G'G''G''' \ldots$ $(2n-1)$ter Ordnung. Wenn man AA_1 ohne Doppelpunkte voraussetzt, so haben $G, G'', G''', \ldots$ nur D_1 gemeinsam. G' kann daher, auch wenn die zugehörige Involution beliebig nahe bei der gegebenen liegt, $2n-1$ verschiedene Punkte enthalten. Betrachtet man G' als Glied der Involution $\mathfrak{A}C'C'_1, \mathfrak{C}A'A'_1$, so sieht man, dafs p_1-1 verschiedene Punkte von ihr bei D_{p_1}, und analog bei jedem $p$fachen Punkt der älteren Involution $p-1$ ihrer $2(n-1)$ verschiedenen Punkte liegen. Daraus folgt der Lehrsatz.

Drittes Capitel. §§ 77—119.

Die Involutionen höheren Ranges.

Erster Abschnitt.

Die Involutionsnetze. §§ 77—86.

§§ 77—80. Das Involutionsnetz zweiter Stufe.

§§ 77. Drei Gruppen U_1, U_2, U_3 zu je n Elementen desselben Trägers gehören entweder zu einer Involution, oder sie bestimmen ein Involutionsnetz zweiter Stufe oder Mannigfaltigkeit. Dem letzteren gehören die Gruppen U_4, U_5, U_6, ... der Involution U_2, U_3 an, ferner die Gruppen der Involutionen U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; .... Irgend zwei der Gruppen bestimmen eine Involution, die dem Netze ganz angehört und irgend zwei solche Involutionen haben eine Gruppe gemeinsam.

Die von irgend einer Gruppe U ausgehenden Involutionen bilden ein Involutionsbüschel. Auf allen Involutionen des Netzes bestimmt es unter einander projectivische Reihen, und wird zu diesen projectivisch gesetzt.

U'_4 und U'_5 seien zwei Gruppen des Netzes, welche den Involutionen U_1, U_4 und U_1, U_5 angehören. Die Involutionen U_4, U_5 und U'_4, U'_5 haben (§ 71) eine Gruppe U mit einander gemein. Setzt man nun

$$U U'_4 U'_5 U'_\lambda \ldots \barwedge U U_4 U_5 U_\lambda \ldots,$$

so ist den Involutionen (Beweis zu § 71) U_4, U'_4; U_5, U'_5; ... U_λ, U'_λ die Gruppe U_1 gemeinsam, und daher liegt jede Gruppe von U'_4, U'_5 im Netze. Zwei beliebigen Involutionen des Netzes gehört eine Gruppe gleichzeitig an. Denn sie haben mit U_1, U_λ die Gruppen U'_λ und U''_λ, mit U_1, U_μ die Gruppen U'_μ und U''_μ gemeinsam. Nach § 71 giebt es eine Gruppe U', die gleichzeitig U'_λ, U'_μ und U''_λ, U''_μ angehört. Setzt man nun

$$U'_\lambda U'_\mu U'_\nu U' \ldots \barwedge U''_\lambda U''_\mu U''_\nu U' \ldots ,$$

so liegen irgend zwei entsprechende Gruppen dieser projectivischen Involutionen mit U_1 in je einer Involution. Das Involutionsbüschel mit dem Träger U_1 trifft daher alle nicht durch U_1 gehenden Involutionen des Netzes in projectivischen Reihen und kann daher zu ihnen perspectivisch gesetzt werden. Von jedem anderen Involutionsbüschel des Netzes gilt dasselbe, wie von dem mit dem Träger $U_1{}^{23}$.

§ 78. Irgend ein Element E des Trägers wird durch die Gruppen einer Involution $(n-1)$ter Ordnung zu solchen des Netzes ergänzt.

Denn man kann die Gruppen als angehörig den Involutionen U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; ... betrachten, eine von ihnen aber als Glied der Involution U_2, U_3 oder U_2, U_λ. Aus § 72 ergiebt sich also, dafs E durch Gruppen derselben Involution $(n-1)$ter Ordnung zu Gliedern von U_1, U_2; U_2, U_λ; U_λ, U_1 ergänzt wird.

§ 79. Zwei in demselben Netze enthaltene projectivische Involutionsbüschel U_1 und U_2 heifsen perspectivisch, wenn die Involution U_1, U_2 sich selbst entspricht. Zugehörige Involutionen treffen sich in Gruppen einer anderen Involution des Netzes.

Es mögen zwei entsprechenden Involutionspaaren die Gruppen V_1 und V_2 gemeinsam sein, V_1, V_2 und U_1, U_2 aber sich in V_3 treffen. Die Büschel bestimmen auf V_1, V_2 projectivische Reihen, denen V_1, V_2, V_3 gemein sind, und die daher zusammenfallen.

§ 80. Zwei Involutionsnetze sollen zu einander collinear heifsen, wenn jeder Gruppe eine Gruppe, jeder Involution eine projectivische, jedem Involutionsbüschel aber ein projectivisches in dem zweiten Netze entspricht.

Wenn vier Gruppen U_1, U_2, U_3, U_4 eines Netzes, von denen keine drei einer Involution angehören, ihre entsprechenden V_1, V_2, V_3, V_4 unter derselben Beschränkung beliebig zugewiesen sind, so ist die collineare Beziehung vollständig gegeben.

Haben zwei collineare Involutionsnetze mehr als drei entsprechend gemeinsame Gruppen, so haben sie eine ganze Involution und eine Gruppe S

aufserhalb derselben mit einander entsprechend gemein. Zwei zugehörige Gruppen liegen alsdann mit S in je einer Involution.

Den Involutionsbüscheln

1) $$U_1(U_2 U_3 U_4 \dots) \quad \text{und} \quad U_2(U_1 U_3 U_4 \dots)$$

entsprechen die Büschel

2) $$V_1(V_2 V_3 V_4 \dots) \quad \text{und} \quad V_2(V_1 V_3 V_4 \dots).$$

Eine Gruppe U des ersteren Netzes bestimmt zwei Involutionen der Büschel 1). Die zugehörigen Involutionen der Büschel 2) aber haben die ihr entsprechende Gruppe V gemeinsam. Sind die ersteren Büschel perspectivisch, so sind es auch die letzteren. Jene treffen sich in einer Involution des ersten Netzes, und diese in der entsprechenden und zu ihr projectivischen Involution des zweiten Netzes. Jedem Involutionsbüschel entspricht nun ein projectivisches des zweiten Netzes.

Zwei in einander liegende collineare Netze müssen zusammenfallen, wenn vier Gruppen, von denen keine drei in einer Involution liegen, mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Liegen drei sich selbst entsprechende Gruppen in einer Involution U, V, so ist dieselbe beiden Netzen entsprechend gemein. Zwei entsprechende Gruppen U_1 und V_1 bestimmen nun eine sich selbst entsprechende Involution, auf der aufser ihrer mit U, V gemeinsamen Gruppe noch eine zweite sich selbst entsprechende S liegt. Jede von S ausgehende Involution fällt mit ihrer zugehörigen zusammen, da sie mit U, V eine zweite sich selbst entsprechende Gruppe gemeinsam hat.

§§ 81—86. Das Involutionsnetz μter Stufe.

§ 81. Durch $\mu + 1$ Gruppen $U_1, U_2, \dots U_{\mu+1}$ desselben Trägers aus je m Elementen, die nicht demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ist ein Netz μter Stufe oder Mannigfaltigkeit bestimmt. In demselben liegt das aus $U_2, U_3, \dots U_{\mu+1}$ zu bildende Involutionsnetz $(\mu-1)$ter Stufe, und das U_1 mit ihren Gruppen verbindende Involutionsbündel. Irgend ν Gruppen $U_1', U_2', \dots U_\nu'$ bestimmen ein ganz in dem ersteren enthaltenes Netz höchstens der $(\nu-1)$ten Stufe. Zwei von diesen Netzen, νter und ϱter Stufe, haben ein Netz wenigstens $(\nu + \varrho - \mu)$ter Stufe gemeinsam, wofern $\nu + \varrho \geqq \mu$ ist, also wenigstens eine Gruppe, wenn $\nu + \varrho$ gleich μ ist. k Netze $\mu_1$ter,

$\mu_2$ter, ... $\mu_k$ter Stufe, die alle in einem Netze μter Stufe enthalten sind, haben ein Netz wenigstens $(\mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_k - k\mu)$ter Stufe gemeinsam.

Die Gruppen $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ mögen mit U_1 und zwei beliebigen Gruppen $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ des Netzes $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ zu Involutionen gehören. Jede Gruppe von $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ liegt (§§ 77) mit einer von $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ involutorisch zu U_1 und gehört mithin zum Netze. $U'_{\mu+2}$, $U'_{\mu+3}$ und $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ haben eine Gruppe gemeinsam. Jede aus Gruppen des μfachen Netzes zu bildende Mannigfaltigkeit gehört demselben ganz an. Das Netz kann auch mit Hülfe einer beliebigen Gruppe V_1 desselben und des Netzes $(\mu-1)$ter Stufe $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt werden, da jede Involution V_1, U' das Netz trifft.

Es möge irgend ein Netz αter Stufe aus den $\alpha+1$ Gruppen V_1, $V_2, \ldots V_{\alpha+1}$ entstehen und V_1 aufserhalb $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ liegen. Auf letzterem werden durch $V_1, V_2; V_1, V_3; \ldots V_1, V_{\alpha+1}$ die α Gruppen W_2, $W_3, \ldots W_{\alpha+1}$ eines Netzes $(\alpha-1)$ter Stufe bestimmt, das also den Netzen $V_1 V_2 \ldots V_{\alpha+1}$ und $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ gemeinsam ist.

Irgend ein Netz $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe und eine Gruppe V_1 aufserhalb desselben, die beide in dem Netze μter Stufe enthalten sind, sind zur Herstellung desselben nothwendig und hinreichend. Jedenfalls haben V_1, V_2 und $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ mit $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ eine Gruppe W_2 und ein Netz $(\mu-2)$ter Stufe $W_3 \ldots W_{\mu+1}$ gemeinsam. Jede Involution W_2, U von $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ trifft $W_3 \ldots W_{\mu+1}$ in W, und daher V_1, U die Involution V_2, W von $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$ in V. Beide Bestimmungen, aus V_1 und $U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1}$ und aus V_1 und $V_2 V_3 \ldots V_{\mu+1}$, sind also vollkommen gleichbedeutend. Ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe hat daher mit jedem einzelnen αter Stufe ein Netz $(\alpha-1)$facher Mannigfaltigkeit gemeinsam.

Ein beliebiges Netz βter Stufe kann man als Theil eines Netzes $(\mu-1)$ter Stufe ansehen. Wenn zwei Netze βter und $(\alpha-1)$ter Stufe, die in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe liegen, wenigstens ein Netz $(\beta+\alpha-\mu)$-ter oder $(\beta+\alpha-1-\mu+1)$ter Stufe gemeinsam haben, falls $\beta+\alpha-1$ nicht kleiner als $\mu-1$ ist, und keine Gruppe gemeinsam zu haben brauchen, wenn $\beta+\alpha-1$ kleiner als $\mu-1$ ist, so ist ein Netz mindestens der Stufe $\beta+\alpha-\mu$ auch zwei Netzen βter und αter Stufe gemeinsam, wenn beide einem dritten μter Stufe angehören. Weil nun bereits gezeigt ist, dafs ein Netz $(\varrho-1)$ter Stufe und eine Involution wenigstens eine Gruppe gemeinsam

haben, wenn sie demselben Netze ϱter Stufe angehören, so folgt der aufgestellte Satz durch einen Schlufs von $\mu-1$ auf μ. Durch $k$malige Anwendung des Satzes folgt, dafs k Netzen der Stufen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ ein anderes wenigstens der Stufe $\mu_{k+1}=\mu_1+\mu_2+\ldots \mu_k-\mu(k-1)$ gemeinsam ist. Setzt man z. B.

$$\mu_1=\mu_2=\ldots \mu_k=\mu-1\ ;\ k=\mu, \text{ so folgt } \mu_{\mu+1}=0,$$

und daher haben irgend μ in demselben Netze μter Stufe enthaltene $(\mu-1)$fache Mannigfaltigkeiten stets wenigstens eine Gruppe mit einander gemein[24].

§ 82 α. Alle αfachen Netze, welche dasselbe Netz $V_1 V_2 \ldots V_\alpha$ gemeinsam haben, gehören zu einem Netzbündel $(\mu-\alpha)$ter Stufe. Jede $(\mu-2)$fache Mannigfaltigkeit $V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1}$ in $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt insbesondere ein Büschel von Netzen $(\mu-1)$ter Stufe. $V_1 V_2 \ldots V_\alpha$ resp. $V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1}$ heifst der Träger des Bündels beziehlich des Büschels.

β. Zwei Netze $V_1 V_2 \ldots V_{\beta+1}$ und $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$ $n$ter Ordnung und αter resp. βter Stufe, die einem Träger angehören und keine Gruppe gemeinsam haben, bestimmen ein Netz N $(\alpha+\beta+1)$ter Stufe, dem sie selbst und die Netzbündel angehören, welche je das eine mit den Gruppen des anderen verbinden. Irgend eine aufserhalb der gegebenen Netze in N liegende Gruppe kann nur durch eine Involution mit zwei Gruppen derselben verbunden werden.

m Netze $\alpha_1$ter, $\alpha_2$ter, $\ldots \alpha_m$ter Stufe bestimmen ein Netz höchstens $(\alpha_1+\ldots \alpha_m+m-1)$ter Stufe, dem sie alle gleichzeitig angehören.

Die $ad\beta$ bezeichneten Gebilde gehören sicher dem durch die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\alpha+1}\ ;\ V_1, V_2, V_3, \ldots V_{\beta+1}$ bestimmten Netz an (§ 81). Wäre nun dieses von geringerer als der $(\alpha+\beta+1)$ Stufe, so hätten die gegebenen Netze der Voraussetzung zuwider eine Gruppe mit einander gemein. Irgend eine Gruppe W bestimmt mit dem ersteren Netze ein solches $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$ $(\alpha+1)$ter Stufe. Demselben gehört sicher jede Involution U, V an, welche W mit zwei Gruppen U und V der gegebenen Netze verbindet. $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\beta+1}$ haben nach § 81 wenigstens eine Gruppe V gemeinsam und nur diese, da eine beiden gemeinsame Involution, als gelegen in $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1} W$, $U_1 U_2 \ldots U_{\alpha+1}$

treffen und so eine nicht vorhandene gemeinsame Gruppe der gegebenen Netze bestimmen würde. V, W trifft $U_1 U_2 \dots U_{\alpha+1}$ in einer Gruppe U.

§ 83. Irgend ein Element A des Trägers wird durch die Gruppen eines bestimmten Netzes $(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ter Stufe zu Gruppen des Netzes $m$ter Ordnung und μter Stufe ergänzt.

Die genannten Gruppen kann man den Involutionen U_1, U_2; U_1, U_3; U_1, U_4; ... $U_1, U_{\mu+2}$, ein $(\mu-2)$faches Netz $W_2 W_3 \dots W_\mu$ aus solchen Gruppen aber dem $(\mu-1)$fachen Netze $U_2 U_3 \dots U_{\mu+1}$ als angehörig betrachten. Wenn man mit W_1 die A enthaltende Gruppe von U_1, U_2 bezeichnet, so sind (§ 72) die betrachteten Gruppen Glieder des Netzes $W_1 W_2 \dots W_\mu$ $(\mu-1)$ter Stufe.

§ 84. Zwei Netze gleicher Stufe heifsen collinear, wenn jeder Gruppe eine Gruppe, jeder Involution eine projectivische, und folglich jeder im ersten Netze enthaltenen Mannigfaltigkeit eine collineare in dem zweiten entspricht.

Ein Involutionsbündel ist zu allen zu ihm perspectivischen Netzen, die seinen Träger nicht enthalten, collinear. (Denn diese sind alle unter sich collinear).

Es seien $U_1 U_2 \dots U_{\alpha+1}$ und $V_1 V_2 \dots V_{\alpha+1}$ zwei zu dem Involutionsbündel mit dem Träger $W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha}$ perspectivische Netze. Die $(\mu-\alpha)$fachen Netze des Bündels, welche Gruppen $U_3', U_4', U_5', \dots$ der Involution U_1, U_2 enthalten, gehören dem Netze $W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha} U_1 U_2$ $(\mu-\alpha+1)$-ter Stufe an, und treffen daher (§ 81) $V_1 V_2 \dots V_{\alpha+1}$ in Gruppen V_3', $V_4', \dots$ der Involution V_1, V_2. Wenn nun V_1, V_2 und U_1, U_2 eine Gruppe gemeinsam haben, also demselben Netze zweiter Stufe angehören, so trifft dasselbe in einer Gruppe W das Netz $W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha}$, das Bündel $W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha}(U_1 U_2 U_3' U_4' \dots)$ aber in den Involutionen W, U_1, V_1; W, U_2, V_2; W, U_3', V_3'; ... Es sind daher die beiden Reihen perspectivisch $(U_1 U_2 U_3' \dots$ und $V_1 V_2 V_3' \dots)$. Wenn aber keine Gruppe U_1, U_2 und V_1, V_2 gleichzeitig angehört, so hat das beide umfassende Netz dritter Stufe (§ 82) mit $W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha}$ eine Involution W', W'', mit dem Bündel $(W_1 W_2 \dots W_{\mu-\alpha})(U_1 U_2 U_3' U_4' \dots)$ die Netze zweiter Stufe

$$W' W'' U_1 V_2 \;;\; W' W'' U_2 V_2 \;;\; W' W'' U_3' V_3' \;; \dots$$

gemeinsam, weil alle Gebilde in dem Netze $(\mu-\alpha+1)$ter Stufe $W_1 W_2 \ldots W_{\mu-\alpha} U_1 U_2$ liegen. Daher sind die Involutionsbüschel $W'(U_1 U_2 U_3' U_4' \ldots)$ und $W''(V_1 V_2 V_3' V_4' \ldots)$ zu der $W' U_1 U_2$ und $W'' V_1 V_2$ gemeinsamen Involution perspectivisch, mithin unter einander projectivisch. Sind aber je zwei Involutionen U_1, U_2 und V_1, V_2 projectivisch, so müssen $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\alpha+1}$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\alpha+1}$ collinear sein.

§ 85. Die collineare Beziehung zwischen zwei Netzen μter Stufe ist eindeutig bestimmt, wenn $\mu+2$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+2}$, von denen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ihre entsprechenden $V_1, V_2, \ldots V_{\mu+2}$ zugewiesen sind.

Zusatz. Zwei in einander liegende collineare Netze μter Stufe können daher, ohne identisch zu sein, mehr als $\mu+1$ Gruppen nur dann entsprechend mit einander gemein haben, wenn dieselben ein ganzes Netz νter Stufe $(\nu < \mu)$ gemeinsam haben, oder mehrere getrennte Netze $\nu_1$ter, $\nu_2$ter, $\nu_3$ter, ... Stufe.

Man hat zu setzen

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_2 V_3 \ldots V_\mu)(V_1 V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$
$$(U_3 U_4 \ldots U_\mu U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_3 V_4 \ldots V_\mu V_1)(V_2 V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} \ldots) \;\overline{\wedge}\; (V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1})(V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} \ldots)$$

Irgend eine Gruppe U des ersten Netzes bestimmt μ Netze der links stehenden Büschel. Die μ entsprechenden Netze der Büschel rechter Hand treffen sich in der zugehörigen Gruppe V. Bezieht man die ersteren Büschel auf einander vermittelst einer beliebigen Involution U', U'' des ersten Netzes, so sind sie perspectivisch und ihnen allen ist das Netz $U_1 U_2 \ldots U_\mu$ entsprechend gemein. Auch die rechts stehenden Büschel werden dadurch in perspectivische Beziehung gesetzt und erzeugen die jener entsprechende Involution V', V''.

Sind zwei collinearen Netzen μter Stufe, die ganz oder theils ineinanderliegen und deshalb gleicher Ordnung sind, $\mu+2$ Gruppen entsprechend gemeinsam, ohne dafs sie zusammenfallen, so müssen wenigstens $\mu+1$ derselben einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, weil sonst die obigen Büschel identisch gemacht werden könnten. Das ist aber nur

dann möglich, wenn in diesem, also auch in jenem, ein Netz νter Stufe sich Gruppe für Gruppe entspricht. Eine solche Beziehung ergiebt sich stets, wenn man $\nu+1$ unabhängige Gruppen $A_1, A_2, \dots A_{\nu+1}$ eines Netzes νter Stufe sich selbst und irgend zwei Netze $(\mu-\nu+1)$ter Stufe, die in einer anderen Gruppe $A_{\nu+2}$ der ersteren sich treffen, einander zuweist. Da alsdann je $\mu+2$ Gruppen $A_1, \dots A_{\nu+1}, B_{\nu+2}, \dots B_{\mu+2}$ und $A_1, \dots A_{\nu+1}, B'_{\nu+2}, \dots B'_{\mu+2}$, von denen keine $\mu+1$ in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe liegen, sich den einen und den anderen Beschränkungen gemäfs finden lassen, so können die collinearen Gebilde noch eindeutig bezogen werden. Da $A_{\nu+2}$ beiden Feldern gemeinsam ist, so ist ihnen das ganze Netz $A_1 \dots A_{\nu+1}$ entsprechend gemein.

§ 86. Durch zwei collineare Netze μter Stufe und $m$ter Ordnung ($U_1 U_2 \dots U_{\mu+2} \dots$ coll. $V_1 V_2 \dots V_{\mu+2} \dots$) desselben Trägers und eine zwei entsprechende Gruppen verbindende Involution $U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar zu jenen collinearer Netze

$$U_1 U_2 \dots U_{\mu+2} \dots \text{ coll. } V_1 V_2 \dots V_{\mu+2} \dots, \text{ coll. } W_1 W_2 \dots W_{\mu+2} \dots \text{ coll. } Z_1 Z_2 \dots Z_{\mu+2} \dots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V) \text{ coll. } (W) \text{ coll. } (Z).$$

bestimmt. Ihre homologen Glieder ordnen sich zu unter einander projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots \;\wedge\; U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \dots$$

Mit Ausnahme einzelner haben alle Netze der Schaar diejenigen Netze $R_1, R_2, \dots R_s$ der Stufen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ mit einander entsprechend gemein, die in den beiden gegebenen Netzen entsprechend zusammenfielen; ($\alpha_\lambda = 0$ bedeutet eine einzelne entsprechend gemeinsame Gruppe). Es giebt jedoch ein Netz, das nur noch von der $(\mu-\alpha_\lambda-1)$ten Stufe ist, R_λ nicht enthält, wohl aber $R_1, \dots R_{\lambda-1}, R_{\lambda+1}, \dots R_s$. Zwei entsprechenden R_λ enthaltenden $(\alpha_\lambda+1)$fachen Netzen von $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2}$ und $V_1 V_2 V_3 \dots V_{\mu+2}$ gehört eine Gruppe des singulären Netzes zu.

Sollte die Ordnungszahl der betrachteten Involutionen kleiner als 2μ sein, so fügen wir allen Gruppen derselben eine Anzahl unveränderlicher Elemente hinzu, und erhöhen dadurch die Ordnung der Netze. Wenn die beiden Träger U und V der collinearen Netze ein Netz S αter Stufe beide enthalten, in dem die entsprechend gemeinsamen Netze $R_1, R_2, \dots$

R_s liegen, und also zusammen in einem Netze R $(2\mu - \alpha)$ter Stufe liegen, so nehme man aufserhalb R ein Netz S_1 αter Stufe an. In dem Gebilde $(\alpha + \mu + 1)$ter Stufe, dem V und S_1 angehören, kann man ein Netz μter Stufe V' annehmen, das weder mit S noch mit S_1 und folglich auch nicht mit U eine Gruppe gemein hat.

Das Gebilde $V_1 V_2 V_3 \dots V_{\mu+2}$ ersetzen wir durch das andere $V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2}$, welches zu $S_1(V_1 V_2 \dots V_{\mu+2})$ bezüglich V' perspectivisch ist. Es besteht dann die Beziehung

$$V'_1 V'_2 V'_3 \dots V'_{\mu+2} \text{ coll. } U_1 U_2 \dots U_{\mu+2}.$$

Wir beweisen den aufgestellten Lehrsatz zuerst für diese letzteren Netze. Irgend $\mu + 1$ der Involutionen $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \dots V'_{\mu+2}, U_{\mu+2}$ constituiren ein Netz N $(2\mu + 1)$ter Stufe. Denn in N liegen jedenfalls die Netze $V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2}$ und $U_1 U_2 \dots U_{\mu+2}$, und diese müfsten gemeinsame Gruppen haben (§ 81), wenn N von niederer als der $(2\mu + 1)$ten Stufe wäre. Mithin bestimmen auch (§ 81) irgend μ von diesen Involutionen ein Netz $(2\mu - 1)$ter Stufe und mit irgend einer Gruppe W aufserhalb desselben ein Netz 2μter Dimension. Das Involutionsnetz 2μter Stufe $V'_1 U_1 V'_2 U_2 \dots V'_\mu U_\mu W$ hat daher mit $V'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ eine Gruppe $W'_{\mu+1}$ gemeinsam, nach § 81 wenigstens eine, und da $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \dots V'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ ein Netz $(2\mu + 1)$ter Stufe constituiren, höchstens eine. Die Involution $W, W'_{\mu+1}$ mufs nun, da sie mit $V'_1, U_1; V'_2, U_2; \dots V'_\mu, U_\mu$ zu einem Netze 2μter Stufe gehört, die letztere Mannigfaltigkeit in einer Gruppe W' treffen. Hieraus folgt nun, wenn wir μ gleich 1 setzen, zuerst, dafs in jedem dreifachen Netze von einer beliebigen Gruppe eine Involution ausgeht, die mit zwei beliebigen sich nicht treffenden Involutionen je eine Gruppe gemeinsam hat. Setzt man voraus, dafs durch W' eine $(\mu - 1)$fache Mannigfaltigkeit sich legen läfst, die mit $U_1, V'_1; U_2, V'_2; \dots U_\mu, V'_\mu$ je eine Gruppe $W'_1, W'_2, \dots W'_\mu$ gemeinsam hat, so kann man durch W ein Netz μter Stufe legen, das aufser den schon genannten Gruppen $W'_1, W'_2, \dots W'_\mu$ noch die Gruppe $W'_{\mu+1}$ von $W'_{\mu+1}, U_{\mu+1}$ enthält. Denn das vorige Netz $(\mu - 1)$ter Stufe und $W, W'_{\mu+1}$ bestimmen, weil sie eine Gruppe W' gemeinschaftlich haben, nur ein Netz μter Stufe.

Ein Schlufs von $\mu - 1$ auf μ zeigt uns daher, dafs die Gruppe W mit $\mu + 1$ Gruppen $W'_1, W'_2, \dots W'_{\mu+1}$ von $U_1, V'_1; U_2, V'_2; U_3, V'_3; \dots$

$U_{\mu+1}$, $V'_{\mu+1}$ durch ein Netz μter Stufe verbunden werden kann. Fällt W mit einer Gruppe $W'_{\mu+2}$ von $U_{\mu+2}$, $V'_{\mu+2}$ zusammen, so giebt es jedenfalls nur ein Netz

$$W'_1 W'_2 W'_3 \dots W'_{\mu+1} W'_{\mu+2} \quad \text{oder} \quad (W')$$

Wäre nämlich

$$W''_1 W''_2 W''_3 \dots W''_\alpha W'_{\alpha+1} \dots W'_{\mu+1} W'_{\mu+2} \quad \text{oder} \quad (W'')$$

ein zweites Netz der verlangten Art, so könnte doch $W''_1 W''_2 W''_3 \dots W''_\alpha$ das Netz $W'_1 W'_2 \dots W'_\alpha \dots W'_{\mu+1}$ nicht treffen, weil sonst das Netz, welches aus den Involutionen W'_1, W''_1 oder U_1, V'_1, W'_2, W''_2 oder $U_2, V'_2, \dots$ W'_α, W''_α oder $U_\alpha, V'_\alpha, U_{\alpha+1} W'_{\alpha+1}$ oder $U_{\alpha+1}, V'_{\alpha+1}, \dots$ endlich $U_{\mu+1}$, $W'_{\mu+1}$ oder $U_{\mu+1}, V'_{\mu+1}$ hervorgeht, höchstens von der $(\mu+\alpha-1+\mu-\alpha+1)$-ten oder 2μten Stufe wäre. Demnach hätten (W') und (W'') höchstens ein Netz $(\mu-\alpha)$ter Stufe gemeinsam, dem die $\mu-\alpha+2$ Gruppen $W'_{\alpha+1}$, $W'_{\alpha+2}, \dots W'_{\mu+1}, W'_{\mu+2}$ angehören müfsten. Dann könnten aber $U_{\alpha+1}$, $V'_{\alpha+1}$; $U_{\alpha+2}, V'_{\alpha+2}$; $\dots U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ nicht mit $\alpha-1$ anderen Involutionen zusammen das zu Grunde liegende Netz $(2\mu+1)$ter Stufe bestimmen. Da nun irgend $\mu+1$ der Involutionen U_1, V'_1; U_2, V'_2; $\dots U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ dazu in der That genügen, so fallen (W') und (W'') zusammen. Die Netze

$$W'_1 W'_2 W'_3 \dots W'_{\mu+2};\ Z'_1 Z'_2 Z'_3 \dots Z'_{\mu+2};\ X'_1 X'_2 X'_3 \dots X'_{\mu+2}; \dots,$$

welche von den verschiedenen Gruppen $W'_{\mu+2}, Z'_{\mu+2}, U'_{\mu+2}, \dots$ der Involution $U_{\mu+2}, V'_{\mu+2}$ ausgehen, sind aus denselben Gründen alle von einander verschieden.

Die beiden collinearen Bündel

$$(Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+2})(U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2}) \text{ coll. } (Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+2})(V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2})$$

sind identisch, da nämlich U_1 und V'_1, U_2 und V'_2, U_3 und $V'_3, \dots U_{\mu+2}$ und $V'_{\mu+2}$ je demselben Netze des Bündels $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+1}$ angehören. Irgend zwei entsprechende Gruppen $U_{\mu+\lambda}$ und $V'_{\mu+\lambda}$ liegen mithin mit $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_{\mu+1}$ in einem Netze $(\mu+1)$ter Stufe; $U_{\mu+\lambda}, V'_{\mu+\lambda}$ trifft das letztere Netz in einer Gruppe $Z'_{\mu+\lambda}$, aus analogen Gründen aber $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}$; $X'_1 X'_2 \dots X'_{\mu+2}$; $\dots$ in je einer Gruppe $W'_{\mu+\lambda}, X'_{\mu+\lambda}, \dots$ Die verschiedenen Netze

$$U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2} \dots U_{\mu+\lambda};\ V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2} \dots V'_{\mu+\lambda};$$
$$W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2} \dots W'_{\mu+\lambda}; \dots$$

sind zu einander collinear, weil sie zu demselben Netzbündel perspectivisch sind (§ 84). Ebenso sind die Leitinvolutionen

$$U_{\mu+1} V'_{\mu+1} W'_{\mu+1} X'_{\mu+1} \dots ; \; U_{\mu+2} V'_{\mu+2} W'_{\mu+2} X'_{\mu+2} \dots ; \; U_{\mu+\lambda} V'_{\mu+\lambda} W'_{\mu+\lambda} X'_{\mu+\lambda} \dots ; \dots$$

zu einander projectivisch, da sie zu unendlich vielen Büscheln von Netzen 2μter Stufe perspectivisch sind.

Der aufgestellte Satz gilt daher zunächst für die in allgemeiner Lage befindlichen Netze $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2}$ und $V'_1 V'_2 \dots V'_{\mu+2}$. Wenn wir die Gruppen irgend eines Netzes $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}$ der Schaar mit S_1 durch Netze $(\alpha+1)$ter Stufe verbinden, so treffen diese das Netz R $(2\mu-\alpha)$ter Stufe, in dem die gegebenen Gebilde liegen, in den Gruppen $W_1, W_2, \dots W_{\mu+2}$ eines zu $W'_1 W'_2 \dots W'_{\mu+2}$ und damit zu $U_1 U_2 \dots U_{\mu+2}$ collinearen Netzes. Auf gleiche Art entstehen aus den projectivischen Leitinvolutionen $U_1 V'_1 W'_1 Z'_1 \dots ; U_2 V'_2 W'_2 Z'_2 \dots ; \dots$ die unter sich projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2, Z_2 \dots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots$$

der untersuchten Schaar, deren Existenz hiermit nachgewiesen ist. Dafs keine zweite möglich, ist deswegen klar, weil die projectivischen Involutionen unendlich vieler Schaaren homologe Gebilde der verschiedenen Netze sein müssen.

Es ist noch zu erwägen, ob einzelne Netze der Schaar ausarten können. Dies tritt nur bei der Projection eines Netzes $X'_1 X'_2 X'_3 \dots X'_{\mu+2}$ ein, das mit S_1 ein Netz R'_λ $\alpha_\lambda$ter Stufe gemeinsam hat und also mit S_1 in einem Netze $(\alpha+\mu-\alpha_\lambda)$ter Stufe liegt; die Projection findet sich folglich in einem Theilnetze von R der Stufe $2\mu-\alpha+\alpha+\mu-\alpha_\lambda-2\mu-1 = \mu-\alpha_\lambda-1$ gelegen. Jede Leitinvolution der Hülfsschaar, welche von einer Gruppe von R'_λ ausgeht, hat mit R eine Gruppe U_ϱ gemeinsam und alle ihre Gruppen werden von S_1 aus in dieselbe projicirt. Sie ist demnach den beiden gegebenen collinearen Netzen und überhaupt allen regulären Netzen der Schaar entsprechend gemein. Nur der Träger $(\mu-\alpha_\lambda-1)$ter Stufe enthält das Netz R_λ nicht, das so aus R'_λ entsteht, oder correcter ausgedrückt: Nur den Gruppen aufserhalb R_λ gehören in dem ausgearteten Netze bestimmte Gruppen zu, diejenigen aber, welche Gruppen von R_λ entsprechen, werden völlig unbestimmt, und man sieht daher ganz

von ihnen ab. Andererseits gehen ganz offenbar von allen und nur von entsprechend gemeinsamen Gruppen der gegebenen Netze Leitinvolutionen der Hülfsschaar aus, die S_1 treffen. Von einem entsprechend gemeinsamen Netze R_λ ausgehende Leitinvolutionen haben dabei mit S_1 wiederum ein Netz α_λ ter Stufe gemeinsam, das einem Gliede der Hülfsschaar vollkommen angehört. Für jedes entsprechend gemeinsame Netz der gegebenen collinearen Gebilde giebt es ein Glied der Schaar, das alle anderen sich selbst entsprechenden Netze, nur nicht dies besondere, mit den beiden gegebenen gemeinsam hat[25].

Zweiter Abschnitt.

Die Involutionen zweiten Ranges. §§ 87—98.

§ 87. Die entsprechenden Involutionen zweier projectivischer aber nicht perspectivischer Büschel

$$U(W_1 W_2 W_3 \ldots) \;\overline{\wedge}\; V(W_1 W_2 W_3 \ldots)$$

desselben Netzes $n$ter Ordnung und zweiter Stufe treffen sich in den Gruppen W_1, W_2, W_3, ... einer zu ihnen perspectivischen Involution $n$ter Ordnung und zweiten Ranges, der auch die Gruppen U und V angehören. Alle Büschel, welche die Reihe $W_1 W_2 W_3 \ldots$ von Gruppen der Involution zweiten Ranges aus projiciren, sind zu einander projectivisch und können zu ihr perspectivisch gesetzt werden. Durch fünf Gruppen, von denen keine drei derselben Involution (ersten Ranges) angehören, ist eine Involution zweiten Ranges bestimmt[26].

Mit jeder Involution des Netzes hat dies Gebilde zwei Gruppen gemeinsam. Insbesondere ist jedes Element des Trägers in zwei Gruppen enthalten.

Auf einer beliebigen Involution des Netzes bestimmen die Büschel U und V projectivische Reihen. Ihre beiden gemeinsamen Gruppen gehören zugleich der Involution zweiten Ranges an. Daher enthalten auch zwei Gruppen ein beliebiges Element des Trägers, indem dasselbe (§ 78) eine specielle Involution des Netzes bestimmt. Die beiden Gruppen fallen für specielle Involutionen des Netzes zusammen. Die Involutionen, welche

U, V je in den Büscheln U und V entsprechen, begegnen der Involution zweiten Ranges nur in U und V und sind die Tangenteninvolutionen in diesen Gruppen.

Die beiden Büschel

$$U(W_1 W_2 W_3 \dots) \barwedge V(W_1 W_2 W_3 \dots)$$

bestimmen auf W_1, W_2 und W_1; W_3 perspectivische Reihen. Die Involutionen, welche entsprechende Gruppen verbinden, gehen daher (§ 77) alle durch eine feste Gruppe Z. U, W_2 und V, W_3 sind aber solche Involutionen und enthalten daher Z. Jede durch sie gehende Involution z hat mit W_1, W_2 und W_1, W_3 Gruppen gemeinsam, deren Verbindungsinvolutionen mit U und V in einer Gruppe W_λ der Involution zweiten Ranges sich treffen. W_0 sei eine beliebige Gruppe derselben. Die Involutionen, welche von W_2 und W_3 aus nach den z mit U, W_0 und V, W_0 gemeinsamen Gruppen führen, treffen sich in den Gruppen W'_α einer zweiten Involution zweiten Ranges, der W_2, W_3, U, V, ferner W_1 nach der Entstehungsweise von W_0, angehören, und in der schliefslich diese Gruppe selbst, als der Lage Z, W_0 entsprechend, liegt. Durch U, V, W_1 ist aber die Beziehung der Büschel W_3 und W_2, und damit die zweite Involution zweiten Ranges bestimmt. Sie ist daher mit der ersten, auf welcher W_0 ganz beliebig war, identisch. Da hiernach die Involutionsbüschel, welche eine Involution zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 W \dots$ mit irgend welchen ihrer Gruppen verbinden, unter einander projectivisch sind, so kann erstere zu diesen allen als perspectivisch bezeichnet werden. Eine durch fünf Gruppen U, V, W_1, W_2, W_3 gehende Involution zweiten Ranges kann durch die beiden Büschel U und V erzeugt werden und ist daher eindeutig bestimmt.

§ 88. Zwei projectivische Involutionen zweiten Ranges

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots U \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \dots V$$

sind homologe Gebilde ihrer collinear bezogenen Netze.

Denn es ist zu setzen

$$U_1(U_2 U_3 U_4 \dots U) \barwedge V_1(V_2 V_3 V_4 \dots V)$$
$$U_2(U_1 U_3 U_4 \dots U) \barwedge V_2(V_1 V_3 V_4 \dots V)$$

Die Behauptung folgt daher aus § 85[27].

§ 89. Um zwei gegebene Involutionen projectivisch zu beziehen, kann man noch drei Gruppen der einen ihre entsprechenden in der anderen beliebig zuweisen. Um auf eine gegebene Involution $U_1 U_2 U_3 U_4 \dots U$ zweiten Ranges eine andere $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots V$ projectivisch zu beziehen, kann man noch vier Gruppen U_1, U_2, U_3, U_4 der ersteren, von denen keine drei einer Involution angehören, vier Gruppen V_1, V_2, V_3, V_4 unter derselben Beschränkung beliebig zuweisen.

Im zweiten Falle mufs

$$V_1(V_2 V_3 V_4 V \dots) \wedge U_1(U_2 U_3 U_4 U \dots)$$
$$V_2(V_1 V_3 V_4 V \dots) \overline{\wedge} U_2(U_1 U_3 U_4 U \dots)$$

sein. Zwei verschiedene Involutionen zweiten Ranges kann es nicht geben, weil sonst, entgegen § 80,

$$V_1 V_2 V_3 V_4 V \text{ coll. } V_1 V_2 V_3 V_4 V'$$

sein könnte.

§ 90. Durch irgend zwei zu einander projectivische Involutionen $U_1 U_2 U_3 U_4 \dots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ oder $[U]$ und $[V]$ $n$ter Ordnung und zweiten Ranges desselben Trägers und eine zwei entsprechende Gruppen verbindende Involution $U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots$ ist eine zu dieser perspectivische Schaar zu jenen projectivischer Involutionen zweiten Ranges

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \overline{\wedge} V_1 V_2 V_3 V_4 \dots \overline{\wedge} W_1 W_2 W_3 W_4 \dots \overline{\wedge} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$
$$\overline{\wedge} X_1 X_2 X_3 X_4 \dots \overline{\wedge} \dots$$

oder

$$[U] \overline{\wedge} [V] \overline{\wedge} [W] \overline{\wedge} [Z] \overline{\wedge} [X] \overline{\wedge} \dots$$

bestimmt. Entsprechende Gruppen liegen in projectivischen Leitinvolutionen

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \overline{\wedge} U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda \dots$$

Haben die beiden gegebenen Involutionen eine Gruppe X_0 entsprechend gemein, so ist e i n e zu den beiden gegebenen projectivische Involution ersten Ranges ein Glied der Schaar. Haben die beiden Involutionen zwei Gruppen X_0 und Y_0 mit einander gemeinsam, so giebt es entweder zwei gewöhnliche Involutionen in der Schaar, von denen die eine nur X_0, die andere nur Y_0 enthält, oder eine Gruppe, die mit je zwei entsprechenden Gliedern der beiden Reihen in einer Involution liegt. Sind drei Gruppen X_0, Y_0 und Z_0 den Reihen entsprechend gemeinsam, so kommen ent-

weder die drei Involutionen $Y_0, Z_0; Z_0, X_0$ und X_0, Y_0 in der Schaar vor, oder nur eine von ihnen, und die übrig bleibende Gruppe liegt dann mit je zwei entsprechenden involutorisch.

Man fasse die projectivischen Reihen (§ 88) als homologe Bestandtheile collinearer Netze

$$U_\lambda\, U_1\, U_2\, U_3\, U_4 \ldots \text{ coll. } V_\lambda\, V_1\, V_2\, V_3\, V_4 \ldots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V)$$

auf. Giebt es in ihnen keine ineinanderfallenden und folglich auch keine entsprechend gemeinsamen Gruppen, so ergiebt sich unmittelbar die Netzschaar (§ 86), und als Bestandtheil die Schaar der Involutionen zweiten Ranges. Haben die beiden Netze eine, zwei oder drei gemeinsame Gruppen, so ergeben sich eben so viele singuläre Bestandtheile der Netz- und Involutionsschaar.

In diesem Falle (vgl. § 86) müssen wir eine Hülfsnetzschaar $(U)(V')(W')(Z') \ldots$ von einem Netze S' aus auf den Träger (UV) der Gebilde $[U]$ und $[V]$ projiciren. Von jeder den collinearen Gebilden (U) und (V) entsprechend gemeinsamen Gruppe A geht eine Leitinvolution der Hülfsnetzschaar aus, die S' in einer Gruppe A' trifft. Durch A' geht ein Glied (X') der Netzschaar, der Träger eines Gliedes der Involutionsschaar. Die Involution J, in welcher (UV) von dem Netze $(X'S')$ getroffen wird, ist ein singulärer Bestandtheil der Netzschaar $(U)(V)(W) \ldots$. Lag A aufserhalb der Involutionen $[U]$ und $[V]$, so trifft jedes Netz des Bündels S' das in (X') gelegene Glied $[X']$ der Hülfsinvolutionsschaar in zwei verschiedenen Gruppen, und die Involution ersten Ranges J ist somit als Glied der Involutionsschaar $U_1\, U_2\, U_3\, U_4 \ldots,\ V_1\, V_2\, V_3\, V_4 \ldots$ oder $[U], [V]$ zweideutig auf die regulären Bestandtheile derselben bezogen. Ist aber A den Involutionen $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemein, so gehört A' der Involution zweiten Ranges $X_1' X_2' X_3' X_4' \ldots$ an. Dieselbe wird daher von S' aus in eine zu $[U]$ und $[V]$ projectivische Involution ersten Ranges projicirt. Der Gruppe A wird in derselben die von A im Allgemeinen verschiedene Gruppe A_1 zugeordnet, welche durch das $X_1' X_2' X_3' X_4' \ldots$ in A' berührende Netz des Bündels S' ausgeschnitten wird. An und für sich wird die A zugeordnete Gruppe ganz unbestimmt. Eine solche Involution erhält man für jede $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsame Gruppe X_0, falls nicht etwa die beiden Collineationen, welche aus den projectivischen

Gebilden entspringen, eine Involution entsprechend mit einander gemein haben. Das kann jedoch nur dann eintreten, wenn zwei verschiedene Gruppen von $[U]$ oder eine Gruppe und ihre Tangenteninvolution mit den entsprechenden Gebilden von $[V]$ übereinstimmmen. Es giebt alsdann in dem Hülfsnetz S' eine Involution, die einem Netze (X') der Schaar $(U), (V')$ angehört. Alle Gruppen der ersteren werden von S' aus in dieselbe feste Gruppe P projicirt, die daher auch mit irgend zwei entsprechenden Gruppen von $[U]$ und $[V]$ involutorisch liegt. Ist noch eine weitere Gruppe $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsam, wo dann beide Reihen Bestandtheile desselben Netzes sind, so erhält man drei verschiedene Involutionen $Y_0, Z_0; Z_0, X_0$ und X_0, Y_0 ersten Ranges in der Schaar, falls die beiden Netze keine weiteren Gruppen entsprechend gemeinsam haben. Ist aber jede Gruppe von Y_0, Z_0 beiden Netzen gemeinsam, so liegt eine Gruppe des Netzes mit irgend zwei entsprechenden von $[U]$ und $[V]$ involutorisch und es ergiebt sich eine Involution ersten Ranges im Netze, die X_0 enthält.

Zusatz: Da entsprechende Glieder aller Involutionen einer Schaar in Involutionen ersten Ranges angeordnet liegen, entsprechend gemeinsame Gruppen derselben allen nicht entarteten Gliedern der Schaar gemeinsam sind, so ergeben irgend zwei Involutionen zweiten Ranges der Schaar dieselben gemeinsamen Elemente. Bei den singulären Bestandtheilen aber kann man von vorne herein feststellen, welche Coincidenzelemente bei ihnen sich nicht vorfinden.

§ 91. Das Gebilde $U_1', U_2', U_3', U_4', \ldots$ einer Involution ersten Ranges, in welches die Involution zweiten Ranges $U_1, U_1''; U_2, U_2''; U_3, U_3''; U_4, U_4''; \ldots$ von einer nicht in ihr liegenden Gruppe A ihres Netzes aus projicirt wird, soll eine entartete Involution zweiten Ranges, diese aber ihr Zeiger genannt werden. Vermöge ihrer Zeiger können entartete Involutionen zweideutig auf Gebilde bezogen werden, die zum Zeiger projectivisch sind. In jedem durch U_1', U_2' gehenden Netze zweiter Stufe kann man unendlich viele zum ersten projectivische Zeiger der entarteten Involution zweiten Ranges finden.

C sei eine Gruppe von n Elementen aufserhalb $A U_1' U_2'$. Auf irgend einem Involutionsnetze $U_1' U_2' B$ zweiter Stufe des Netzes $U_1' U_2' C A$

bestimmt C, A die Gruppe B und $C(U_1 U_1'' U_2 U_2'' \ldots)$ die zur gegebenen projectivische Involution zweiten Ranges $V_1 V_1'' V_2 V_2'' \ldots$ Sie ist ein zweiter Zeiger der entarteten Involution, weil $B, V_1, V_1''; B, V_2, V_2'; B, V_3, V_3''; \ldots$ in $U_1'; U_2'; U_3'; \ldots$ treffen. Von hier aus kann man wieder rückwärts unendlich viele in $U_1' U_2' A$ gelegene und zu dem ersten projectivische Zeiger auffinden.

Sollte die Ordnung der entarteten Involution nicht höher als 2 sein, so betrachten wir statt ihrer eine zweite, deren Glieder sich durch Zufügung einer unveränderlichen Gruppe G von den ihrigen sich unterscheiden; sie wird dann aus dem Zeiger $GU_1, GU_1''; GU_2, GU_2''; \ldots$ von GA aus projicirt. Für die Involution GU_1', GU_2', GU_3' gilt nun das Bewiesene. Für sie erhalten wir noch unendlich viele andere Zeiger im Netze GU_1', GU_2', GA und daher auch unendlich viele Zeiger für $U_1' U_2' U_3' \ldots$ in $U_1' U_2' A$.

§ 92. Zwei entartete Involutionen zweiten Ranges und gleicher Ordnung $U_1' U_2' U_3' \ldots$ und $V_1' V_2' V_3' \ldots$, die demselben Träger angehören, und deren Zeiger $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \ldots$ und $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \ldots$ zu einander projectivisch sind, oder eine entartete und eine zu ihrem Zeiger $U_1' U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \ldots$ projectivische Involution zweiten Ranges können als Glieder einer Schaar projectivischer Involutionen zweiten Ranges betrachtet werden.

Nachdem nöthigenfalls durch Zufügung derselben constanten Gruppe zu allen vorhandenen die Ordnung genügend erhöht ist, nehmen wir aufserhalb des durch beide constituirten Netzes eine Gruppe W von n Elementen an. $U_1' U_2' U_3' \ldots$ ist (§ 91) die Projection eines zu $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3''$ projectivischen Zeigers $W_1 W_1'' W_2 W_2'' W_3 W_3'' \ldots$ von W aus. Im zweiten Falle constituirt derselbe mit $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \ldots$ eine Schaar, deren Projection auf das Netz, in dem $U_1' U_2' U_3' \ldots$ und $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \ldots$ liegen, den Bedingungen der Aufgabe genügt. Im ersten Falle nimmt man aufserhalb des bisherigen Netzes noch eine Gruppe Z von n Punkten an. $V_1' V_2' V_3' \ldots$ ist dann eine Projection von Z aus eines zu $U_1 U_1'' U_2 U_2'' U_3 U_3'' \ldots$ projectivischen Zeigers $V_1 V_1'' V_2 V_2'' V_3 V_3'' \ldots$ Beide geben einer Involutionsschaar den Ursprung, welche durch das Netzbündel mit W, Z zum Träger in die gesuchte Schaar projicirt wird.

Selbst wenn beide entartete Involutionen nur verschiedene Reihungen derselben Involution ersten Ranges sind, hat der Satz doch einen reellen Inhalt, indem nämlich alle Involutionen der Schaar, die dann sämmtlich entartet sind, dieselben (4) Gruppen mit einander gemeinsam haben.

War man genöthigt, für das Beweisverfahren allen Gliedern der beiden gegebenen Involutionen eine unveränderliche Gruppe hinzuzufügen, so kommt diese auch in allen anderen Involutionen der betrachteten Schaaren vor und kann nachher abgeworfen werden.

§ 93. Eine Involution ersten Ranges gehört mit einer zu ihr projectivischen zweiten Ranges, die von gleicher Ordnung ist und mit ihr demselben Träger angehört, oder mit der Ausartung einer solchen zu einer Schaar, deren übrige Involutionen irgend eine Gruppe A der letzteren entsprechend gemeinsam haben.

Zwei projectivische Involutionen ersten Ranges und $n$ter Ordnung, $U_1 U_2 U_3 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 \ldots$, die demselben Träger angehören, können zu einer Schaar von Involutionen gerechnet werden, die alle mit ersterer eine Gruppe U_λ und mit letzterer eine ihr nicht entsprechende Gruppe V_μ entsprechend gemeinsam haben.

Der Beweis des letzteren Satzes wird hinreichen. Es seien V_λ und U_μ die den festen Gruppen entsprechenden Glieder je der anderen Involution. Nachdem nöthigenfalls allen Gruppen dieselbe unveränderliche Gruppe hinzugefügt ist, nehmen wir eine Involution W, Z aufserhalb derselben an. Es sei $U_\mu U_\lambda U_1 U_2 U_3 \ldots$ die Projection der Involution zweiten Ranges $W U'_\lambda U'_1 U'_2 U'_3 \ldots$ bezüglich W, so dafs W, U_μ deren Tangenteninvolution in W ist. Entsprechend sei $V_\lambda V_\mu V_1 V_2 V_3 \ldots$ die Projection der Involution zweiten Ranges $Z V'_\mu V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$ bezüglich Z, und daher Z, V_λ der letzteren Tangenteninvolution in Z. Die Projection von W, Z aus der durch die Involutionen

$$1)\ U'_\lambda W U'_1 U'_2 U'_3 \ldots \barwedge 2)\ Z V'_\mu V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$$

constituirten Schaar $[U'], [V']$ auf das die Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ umfassende Netz genügt allen Bedingungen. In ihr treten zuerst $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ auf als Projectionen der Involutionen 1) und 2) von W, Z aus. Denn das Netz zweiter Stufe $W Z U_\nu$ trifft

nach § 81 nur in einer Gruppe das Netz, welches $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ umfafst; in ihm aber liegt die Involution W, U_ν, welche das genannte Netz in U_ν trifft. Aus anderen Involutionen zweiten Ranges der Schaar entstehen projectivische, welche mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ in demselben Netze liegen. Aus den Leitinvolutionen der Schaar entstehen projectivische Leitinvolutionen. Von W und Z gehen aber die Leitinvolutionen W, V_μ und Z, U_λ der Hülfsschaar $[U'],[V']$ aus. Da sie mit W, Z in je einem Netze zweiter Stufe liegen, werden die Gruppen der ersteren aufserhalb W alle in die Gruppe V_μ projicirt. Die W zugehörige Gruppe ist unbestimmt, in der Involution $U_1 U_2 U_3 \ldots$ aber wird V_μ die Gruppe U_μ zugeordnet, welche von dem Tangentialnetz $W U_\mu Z$ bestimmt wird. Ebenso haben alle Involutionen der Schaar die Gruppe U_λ mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ gemeinsam. Bei der Projection von $Z V'_\mu V'_1 V'_2 \ldots$ wird die U_λ zugehörige Gruppe unbestimmt, in der Involution $V_\lambda V_\mu V_1 V_2 V_3 \ldots$ aber wird U_λ die Gruppe V_λ zugeordnet, weil sie von dem Tangentialnetz $W Z V_\lambda$ bestimmt wird.

Die nöthigenfalls beigefügte unveränderliche Gruppe tritt bei allen Involutionen der Schaar auf und kann nun abgelöst werden.

§ 94. Sind $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ zwei projectivische Involutionen ersten Ranges und $m$ter resp. $n$ter Ordnung, die demselben Träger angehören, so ist

$$U_1 V_1 , U_2 V_2 , U_3 V_3 , U_4 V_4 , \ldots$$

eine zu beiden projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung und zweiten Ranges oder die Ausartung einer solchen.

Aus

$$U_1 U_2 U_3 U_\lambda \barwedge V_1 V_2 V_3 V_\lambda$$

folgt

$$U_1 U_2 U_3 U_\lambda \barwedge V_2 V_1 V_\lambda V_3 .$$

Die letzteren Reihen haben nach § 32 eine Gruppe W von $2n$ Coincidenzelementen, die zu V_λ projectivisch die Involution $U_2 V_2 , U_1 V_1$ beschreibt, zugleich aber von dem Involutionsbüschel $U_3 V_3 , U_\lambda V_\lambda$, das mithin (§ 77) zu jener projectivisch ist, ausgeschnitten wird. Da ebenso das Involutionsbüschel $U_4 V_4 , U_\lambda V_\lambda$ zu U_λ projectivisch ist, überdies aber $U_\lambda V_\lambda$ mit $U_1 V_1 , U_2 V_2 , U_3 V_3$ und $U_4 V_4$ zu einem Netze zweiter Stufe gehört, so

beschreibt $U_\lambda V_\lambda$ eine zu jenen beiden projectivische Involution zweiten Ranges.

Der gemachte Schlufs wird nur dann hinfällig, wenn $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$ Gruppen derselben Involution sind. Wird angenommen, dafs keine der Involutionen allen ihren Gruppen gemeinsame Punkte habe, so mufs (§ 75) $m = n$, und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ nur eine andere Aufreihung von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ sein. In einem projectivisch bezogenen einförmigen Gebilde entspricht der Reihe $U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, \ldots$ die Reihe $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \ldots$, welche aus Paaren einer Involution zweiter Ordnung sich zusammensetzt, und andererseits ist auch

$$U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots \barwedge A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4, \ldots$$

Es sei nun in einer Ebene die Punktreihe $C_1 C_2 C_3 C_4 \ldots \barwedge U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots$ angenommen. Man kann auf den Geraden CC_1, CC_2 die Punktepaare A_1', B_1' und A_2', B_2', auf CC_3 den Punkt A_3' so annehmen, dafs auf dem durch diese fünf Punkte gehenden Kegelschnitt

$$A_1', B_1', A_2', B_2', A_3' \barwedge A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$$

ist. Sind nun A_λ', A_λ und B_λ', B_λ homologe Punkte dieser Reihen, so bilden A_λ' und B_λ' ein Paar der Involution $A_1'B_1', A_2'B_2', A_3'B_3'$ und ihre Verbindungslinie geht durch C. Ferner ist

$$A_1'B_1'; A_2'B_2'; A_3'B_3'; A_\lambda'B_\lambda' \ldots \barwedge A_1B_1; A_2B_2; A_3B_3; A_\lambda B_\lambda \ldots \barwedge C(C_1; C_2; C_3; C_\lambda \ldots).$$

Andererseits ist die erste Involution projectivisch zu dem sie ausschneidenden Büschel $o_1 o_2 o_3 \ldots o_\lambda$, so dafs o_λ den Punkt C_λ enthält. Bezieht man nun die Punktebene so collinear auf ein Involutionsnetz, dafs

$$C_1, C_2, C_3, \ldots \barwedge U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \ldots$$

ist, so erhält man einen Zeiger, der projectivisch auf die Reihen $A_1'A_2' A_3'A_4' \ldots$ oder auch $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ bezogen ist, und der von einer Gruppe aus in $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \ldots$ projicirt wird.

§ 95. Zwei projectivische Involutionen zweiten Ranges haben unendlich viele Elemente entsprechenden Gruppen nur dann gemeinsam, wenn entweder beide von einer dritten Involution zweiten Ranges nur durch Hinzufügung je einer unveränderlichen Gruppe, oder von derselben

Involution ersten Ranges nur um je eine andere Involution ersten Ranges sich unterscheiden. Alle drei müssen unter einander und zu den gegebenen projectivisch sein. Eine Involution zweiten Ranges kann mit einer projectivischen ersten Ranges nur dann unendlich viele Elemente gemeinsam haben, wenn sie dieselbe als Theil enthält.

Statt einer Involution zweiten Ranges kann auch die Ausartung einer solchen eintreten.

Wir vermehren alle Gruppen von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ um die Elemente von V_1, und alle Gruppen von $V_1 V_2 V_3 \ldots$ um die von U_1. Alsdann können die projectivischen Reihen

$$V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4 \ldots \barwedge U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4 \ldots$$

zunächst Gruppe für Gruppe übereinstimmen. Dies aber tritt dann nur ein, wenn $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ sich von einer zu beiden projectivischen Involution zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ nur um feste Punktgruppen unterscheiden.

Andernfalls constituiren beide Involutionen eine Schaar. In dieser giebt es, weil den ersteren wenigstens eine Gruppe gemeinsam ist, $(U_1 V_1)$ im Allgemeinen eine zu beiden gegebenen projectivische Involution ersten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$, von der jedes Glied Z_λ mit den entsprechenden $V_1 U_\lambda$ und $U_1 V_\lambda$ zu einer Involution gehört. In besonderen Fällen liegt ein bestimmtes Glied mit je zwei entsprechenden in einer Involution. Im ersteren Fall allein können unendlich viele gemeinsame Elemente der drei Reihen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots ; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots ; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$$

vorhanden sein; der zweite kommt daher hier nicht in Betracht. Letztere Involution ersten Ranges erscheint zuerst mit der Ordnung $m + n$, kann sich aber durch Abstofsung einer unveränderlichen Gruppe auf eine solche niederer Ordnung reduciren.

$U_1' U_2' \ldots U_{\lambda-1}' U_\lambda \ldots$ sei eine beliebige zu $U_1 U_2 \ldots U_\lambda$ projectivische Involution ersten Ranges, welche mit letzterer die Gruppe U_λ entsprechend gemeinsam hat. Die beiden Involutionen zweiten Ranges

$$Z_\lambda U_1, Z_\lambda U_2, Z_\lambda U_3, \ldots Z_\lambda U_\lambda \ldots \text{ und } Z_1 U_1', Z_2 U_2', Z_3 U_3' \ldots Z_\lambda U_\lambda, \ldots \quad (\S\, 94)$$

sind zu einander projectivisch, und in ihnen entspricht $Z_\lambda U_\lambda$ sich selbst. Es giebt eine Involution ersten Ranges $W_1 W_2 W_3 \ldots$ in der durch beide

bestimmten Schaar, welche alle aufserhalb $Z_\lambda U_\lambda$ vorhandenen gemeinsamen Elemente ebenfalls mit beiden Reihen und daher mit $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ unendlich viele Elemente gemeinsam hat. Nimmt man von beiden Involutionen ihre constanten Gruppen fort, so bleibt dieselbe zu beiden Reihen projectivische Involution $X_2 X_2 X_3 \ldots$ übrig. Bliebe von der zweiten $X_1' X_2' X_3' \ldots$ übrig, und wäre auch nur X_1' von X_1 verschieden, so würden nur die Punkte einer bestimmten Gruppe der Involution $X_1 X_\lambda'$; $X_1' X_\lambda$ entsprechenden Gliedern beider gegebenen Reihen gemeinsam sein. Daher mufs X_1 mit X_1', X_λ mit X_λ' zusammenfallen. Jedes Glied von $U_1, U_2, U_3, U_4 \ldots$ und $V_1, V_2, V_3, V_4 \ldots$ umfafst das entsprechende Glied der zu beiden projectivischen Involution ersten Ranges $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots$ Es werde $[U_\lambda]$ in der Form $X_1 Y_1 ; X_2 Y_2 ; X_3 Y_3 ; X_4 Y_4 , \ldots$ geschrieben, und es sei $Y_1 Y_2' Y_3' \ldots$ eine zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges, Y_2' aber von Y_2 verschieden. Die beiden projectivischen Involutionen zweiten Ranges

$$X_1 Y_1 , X_2 Y_2 , X_3 Y_3 , X_4 Y_4 , \ldots \;\overline{\wedge}\; X_1 Y_1 , X_2 Y_2' , X_3 Y_3' , X_4 Y_4' , \ldots$$

bestimmen eine Schaar, in der auch eine Involution ersten Ranges vorkommt, die sich nothwendig nur um ein constantes Glied A von $X_1 X_2 X_3 \ldots$ unterscheidet. Irgend zwei entsprechende Gruppen von $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \ldots$ und $Y_1 Y_2' Y_3' Y_4' \ldots$ liegen daher mit A je in einer Involution. Wird nun für Y_λ' ein anderes Glied Y_λ'' der Involution Y_λ, Y_λ' eingeführt, statt $Y_1 Y_2' Y_3' Y_4' \ldots$ die projectivische Involution $Y_1 Y_2'' Y_3'' Y_4'' \ldots$, so liegt sie mit dem Gebilde $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ hinsichtlich einer zweiten Gruppe B von Y_λ, Y_λ' perspectivisch. $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \ldots$ ist daher das Erzeugnifs zweier perspectivischer Involutionsbüschel und folglich eine zu ihnen, mithin auch zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges. Ebenso ist $V_1 V_2 V_3 \ldots$ von der Form $X_1 Z_1 , X_2 Z_2 , X_3 Z_3 , \ldots$, und $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ eine zu $X_1 X_2 X_3 \ldots$ projectivische Involution ersten Ranges.

§ 96. Soll eine Involution zweiten Ranges unendlich viele Gruppen mit mehrfachen Elementen enthalten, so mufs entweder in jedem Gliede dieselbe Gruppe mit mehrfachen Elementen liegen, oder eine beliebige unveränderliche Gruppe, und das entsprechende doppelt zählende Glied einer projectivischen Involution ersten Ranges.

Von einer etwa vorhandenen unveränderlichen Gruppe sehen wir ab. Ferner brauchen wir uns nur mit der nicht entarteten Involution zu befassen (§ 34b). Ein beliebiges $n$faches Element D^n werde angenommen, und für jede Gruppe des Netzes $U_1 U_2 U_3 U_4$, in dem die Involution liegt, die Gruppe $U_1', U_2', U_3', U_4', \ldots$ der mehrfachen Elemente aufgesucht. Die einer Involution des Netzes zugehörenden Gruppen bilden eine zu dieser projectivische Involution $(n-1)$ter Ordnung (§ 76), alle Gruppen überhaupt also ein zu dem gegebenen collineares Netz $(n-1)$ter Ordnung. Nur wenn D^n dem Netze angehört, entspricht den von ihm ausgehenden Involutionen je nur eine Gruppe mehrfacher Punkte. Das zweite Netz reducirt sich in diesem Fall auf ein Netz erster Stufe.

Falls in ihm noch $(n-1)$fache Elemente vorkommen, giebt es in dem Involutionsnetz noch andere $n$fache Elemente aufser D^n. Solcher Elemente aber giebt es (§ 48) höchstens zwei, falls $n-1 \geqq 2$ ist, jedoch unendlich viele, wenn $n-1=1$, also $n=2$ ist. Da sonach in einem Netz von einer Ordnungszahl n, die höher als 2 ist, höchstens 3 $n$fache Elemente auftreten, können wir ein solches aufserhalb des Netzes wählen. An die Stelle der Involution $U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 \ldots$ zweiten Ranges tritt dann die projectivische $U_1' U_2' U_3' U_4' U_5' \ldots$. Enthält eine Gruppe der ersteren ein $p$faches Element, so ist es ein $(p-1)$faches Element in der entsprechenden Gruppe (§ 56) und daher sind überhaupt alle mehrfachen Elemente entsprechenden Gruppen der beiden Reihen gemeinsam. Unendlich viele solche Gruppen können mithin (§ 95) nur auftreten, wenn beide Involutionen eine zu ihnen projectivische Involution ersten Ranges $W_1 W_2 W_3 W_4 W_5$ gemein haben. Nur einzelne dieser Gruppen können (§ 34b) mehrfache Elemente zeigen. Alle übrigen kommen nach der Bedeutung von $U_1' U_2'$ $U_3' U_4' \ldots$ sicher doppelt in $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ vor. Deshalb ist die untersuchte Involution zweiten Ranges von gerader Ordnungszahl und von der Form $W_1 W_1$; $W_2 W_2$; $W_3 W_3$; $W_4 W_4$; ... Die Gruppen von $U_1' U_2' U_3' \ldots$, setzen sich aus denen von $W_1 W_2 W_3 \ldots$ und den homologen einer anderen projectivischen Involution ersten Ranges $W_1' W_2' W_3' \ldots$ zusammen.

Im Falle $n=2$ nehmen wir das zweifache Element D^2 auf der Involution zweiten Ranges an. Ihre Gruppen U_1, U_2, U_3, $U_4 \ldots$ werden durch ein projectivisches Involutionsbüschel $D^2(U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots)$ projicirt. Die zweiten Doppelpunkte aller dieser Involutionen bilden eine zu $U_1 U_2$

$U_3 U_4 \ldots$ projectivische Punktreihe. Von hier aus aber können wir wie vorher weiter schliefsen.

§ 97. Durch ein beliebiges Element des Trägers einer Involution zweiten Ranges gehen im Allgemeinen zwei verschiedene Gruppen der Involution zweiten Ranges. Die Elemente des Trägers, durch welche nur eine Gruppe geht, können nur dann in unendlicher Anzahl auftreten, wenn die Involution von der besonderen Gestalt $X_1 X_1$, $X_2 X_2$, $X_3 X_3$, $X_4 X_4$, ... ist, wo $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine Involution ersten Ranges ist.

Die gesuchten Elemente gehören allen Gruppen der Tangenteninvolutionen an, welche in den sie enthaltenden Gruppen der Involution zweiten Ranges stattfinden. Statt dessen richten wir die Frage nach den Elementen, die zwei benachbarten Gruppen der Involution zugleich angehören, und zwar entsprechenden Gruppen der beiden projectivischen Reihen $A B U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $A B V_1 V_2 V_3 \ldots$, die auf der Involution angenommen werden; wenn V_1 bei U_1 liegt, so rücken $V_2, V_3, \ldots$ an U_2, $U_3, \ldots$ heran, und die Involutionen U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3; U_λ, V_λ; ... gehen in die Tangenteninvolutionen in den Gruppen $U_1, U_2, U_3, U_\lambda \ldots$ über. Nun haben aber die Reihen $A B U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $A B V_1 V_2 V_3 \ldots$, da sie nicht wesentlich identisch sein können, nur dann unendlich viele Elemente gemeinsam, wenn sie eine zu beiden projectivische Involution ersten Ranges $W_1' W_2' W_3' \ldots$ anthalten. Daneben enthält jede von ihnen noch eine andere projectivische Reihe $W_1 W_2 W_3 \ldots$ resp. $W_1'' W_2'' W_3'' \ldots$ Je näher nun $U_1 U_2 U_3 \ldots$ bei $V_1 V_2 V_3 \ldots$ liegt, desto näher liegen auch die drei projectivischen Reihen $W_1' W_2' W_3' \ldots$, $W_1 W_2 W_3 \ldots$, $W_1'' W_2'' W_3'' \ldots$ bei einander, da nämlich

$$W_1 W_1', \; W_2 W_2', \; W_3 W_3', \ldots \;\barwedge\; W_1' W_1'', \; W_2' W_2'', \; W_3' W_3'', \ldots$$

ist. Daher mufs an der Grenze die Reihe in eine doppelt zählende Involution ersten Ranges übergehen, wenn keine unveränderliche Gruppe allen Gliedern angehört.

§ 98. Zwei projectivische Involutionen $U_1 U_2 U_3 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 \ldots$ zweiten Ranges desselben Trägers und der Ordnungen m und n, die nicht eine zu beiden projectivische dritte Involution ersten oder zweiten Ranges

gemeinsam haben, besitzen höchstens $2m + 2n$ Coincidenzstellen. Sollten einzelne unveränderliche Elemente beiden gleichzeitig angehören, so sollen diese vorher abgeschieden werden.

Eine Involution $r$ter Ordnung und zweiten Ranges $W_1 W_2 W_3 \ldots$ hat mit einer projectivischen Involution $s$ter Ordnung und ersten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ im Allgemeinen und höchstens $2s + r$ Coincidenzstellen, wenn nicht beide dieselbe Involution ersten Ranges als einen Theil umfassen.

Unter einer Stelle einer Involution wird jedes Element ihres Trägers verstanden, dem als nähere Bestimmung zugefügt ist, welchem Gliede derselben es angehören soll. Ein allen Gruppen einer Involution zweiten Ranges gemeinsames Element gehört also unendlich vielen, ein anderes im Allgemeinen und höchstens zwei verschiedenen Stellen an.

Enthalten alle Gruppen einer Involution zweiten Ranges einzelne unveränderliche Elemente, die nicht zugleich der anderen Reihe angehören, so sind in jedem im Allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Stellen vereinigt.

Wir wollen voraussetzen, dafs die Reihen zweiten Ranges und der genannten Ordnungen nicht in Theile zerfallen. Dann kann man (§§ 96 und 97) zwei entsprechende Gruppen U_1, V_1 finden, die kein Element mit einander gemein haben, aus je m resp. n verschiedenen Elementen bestehen, von denen noch überdies jedes zwei verschiedene Gruppen seiner Involution zweiten Ranges bestimmt. Dies vorausgesetzt, betrachten wir die projectivischen Involutionen zweiten Ranges, $(m + n)$ter Ordnung.

$$1)\ U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4, \ldots \barwedge 2)\ V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots$$

Sie bestimmen eine Schaar, deren sämmtliche Involutionen (§ 90) durch alle gemeinsamen Stellen der ersteren beiden hindurchgehen und keine anderen Stellen mit beiden gemeinsam haben können. Mit $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ haben sie daher die zugleich der entsprechenden Reihe $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ angehörigen Stellen, ferner die $2n$ in U_1 gelegenen Stellen der ersteren gemeinsam. n der letzteren entfallen auf die Gruppe U_1, und jedes Element derselben gehört noch zu einer anderen Stelle der Reihe 2) und repräsentirt eine Coincidenzstelle der Reihen 1) und 2), weil es allen Gruppen von 1) gemeinsam ist. In einem Gliede der Schaar wird das $U_1 V_1$ zugehörige Glied unbestimmt, und dasselbe enthält aufserdem eine Involu-

tion $(m+n)$ter Ordnung und ersten Ranges $X_1 X_2 X_3 \ldots \barwedge U_1 U_2 U_3 \ldots$, die mit den Reihen 1) und 2) alle ihre Stellen aufserhalb $U_1 V_1$ gemeinsam hat. Mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ hat sie daher erstens die gesuchten und zweitens die n Stellen gemeinsam, die ihre Elemente noch in U_1 haben. Wenn wir den zweiten Theil des Satzes zunächst voraussetzen, so haben $X_1 X_2 X_3 \ldots$ und $U_1 U_2 U_3 \ldots$ im Ganzen $(m+n)2+n$ Stellen gemeinsam, und da die n in U_1 gelegenen Stellen der Aufgabe fremd sind, so haben $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ im Allgemeinen und höchstens $2m+2n$ gemeinsame Stellen.

Im Fall beide Involutionen entartet sind, geschieht die Beziehung zwischen

$$U'_1 U'_2 U'_3 \ldots \text{ und } V'_1 V'_2 V'_3 \ldots,$$

indem man zwei projectivische Reihen $A_1 A_2 A_3 \ldots$, $B_1 B_2 B_3 \ldots$ in Involutionen zweiter Ordnung zerlegt und auf diese die Gebilde $U'_1 U'_2 U'_3 \ldots$, $V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$, als Involutionen ersten Ranges betrachtet, projectivisch bezieht. In diesem Falle gehört je eine Gruppe der einen im Allgemeinen zwei verschiedenen Gruppen der anderen zu. Die erstere gehört den beiden Elementen eines Paares der in $A_1 A_2 A_3 \ldots$ angenommenen Involution zweiter Ordnung zu. Denselben entsprechen in $B_1 B_2 B_3 \ldots$ zwei Elemente, die im Allgemeinen nicht zu einem Paar der in ihr angenommenen Involution gehören, und denen daher zwei verschiedene Gruppen in $V'_1 V'_2 V'_3 \ldots$ entsprechen. In diesem Fall kann ganz wie oben geschlossen werden, dafs beide Reihen höchstens $2m+2n$ Elemente gemeinsam haben. Sind nun aber die beiden in $A_1 A_2 A_3 \ldots \barwedge B_1 B_2 B_3 \ldots$ angenommenen Involutionen zweiter Ordnung homologe Gebilde derselben, so gehört zu jeder Gruppe U'_λ nur eine Gruppe V'_λ, und die beiden Reihen sind zu einander projectivisch. Als solche haben sie (§ 32) $m+n$ Coincidenzelemente. Werden aber beide als Entartungen projectivischer Involutionen zweiten Ranges betrachtet, so entspricht jede Gruppe einem Paar einer Involution zweiten Ranges, und es finden sich daher in jedem der $m+n$ Elemente 2 Coincidenzstellen.

Um die zweite Aufgabe zu lösen, ergänzen wir die Involution $s$ter Ordnung und ersten Ranges durch eine von ihr verschiedene projectivische Involution $p$ter Ordnung und ersten Ranges $X_1 X_2 X_3 \ldots$ Auf die

beiden projectivischen Involutionen zweiten Ranges

$$X_1 Z_1 W_1, X_1 Z_1 W_2, X_1 Z_1 W_3, \ldots \barwedge W_1 X_1 Z_1, W_1 X_2 Z_2, W_1 X_3 Z_3, \ldots$$

kann man die vorige Überlegung anwenden und mithin eine projectivische Involution $Y_1 Y_2 Y_3 \ldots$ $(r+s+p)$ter Ordnung und ersten Ranges finden, die mit den vorigen Involutionen alle ihre Coincidenzelemente aufserhalb $X_1 Z_1 W_1$ gemeinsam hat. Mit $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ hat sie im Ganzen $r+s+p+s=r+2s+p$ Elemente gemeinsam. Unter ihnen finden sich neben den gesuchten noch die Stellen der Reihe $[Z]$, welche ihre Elemente in $X_1 Z_1$ haben, ohne doch Z_1 anzugehören. Solcher Stellen erhält man aber für jedes Element von X_1 eine, in Allem also p verschiedene. Mithin haben $W_1 W_2 W_3 \ldots$ und $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$, wie behauptet wurde, mit einander $2s+r$ im Allgemeinen verschiedene Stellen gemeinsam. Zerfallen nun zwei projectivische Involutionen ersten resp. zweiten Ranges in Theile, in feste Gruppen und zu einander projectivische Involutionen ersten Ranges, so hat man zuerst die Coincidenzstellen jedes Bestandtheils der einen Reihe mit jedem der anderen aufzusuchen und alle diese Zahlen zu addiren. Auch in diesem Falle bestätigt sich daher die Behauptung.

Dritter Abschnitt.

Die Involutionen μten Ranges. §§ 99—119.

Bekanntlich stehen die Raumcurven dritter Ordnung den Kegelschnitten am nächsten, was Einfachheit der Eigenschaften und Leichtigkeit ihrer Entwickelung betrifft. Wir werden daher wohl thun, in einem dreifachen Involutionsnetz $U_1 U_2 U_3 U_4$ dasjenige Gruppengebilde zu betrachten, welches dem genannten Raumgebilde entspricht. Dieses letztere kann nun aber entstehen mit Hülfe von drei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Träger BC, CA, AB die Verbindungslinien dreier Curvenpunkte A, B, C sind. Wird noch festgesetzt, dafs in D, E und F je drei zusammengehörige Ebenen sich schneiden, so erzeugen die drei Büschel die einzige durch die sechs Punkte A, B, C, D, E, F mögliche Curve dritter Ordnung. Dazu erhalten wir ein Analogon, wenn wir die drei Büschel von Netzen zweiter Stufe mit den Trägern U_2, U_3; U_3, U_1; U_1, U_2 projecti-

visch so beziehen, dafs die nach U_4, U_5, U_6 führenden Tripel zusammengehören. Das so entstehende Gebilde ist, wie bewiesen werden kann, durch seine sechs Gruppen $U_1, U_2, U_3, \dots U_6$ eindeutig bestimmt und hat mit jedem Netze zweiter Stufe, welches in $U_1 U_2 U_3 U_4$ enthalten ist, im Allgemeinen und höchstens drei Gruppen gemeinsam. Da alle durch ein Element des Trägers gehenden Gruppen zu einem Netze zweiter Stufe gehören, so ist das Gebilde vom dritten Range; es gehören im Allgemeinen und höchstens drei Gruppen zu ihm, die ein beliebiges Element enthalten. Wir bezeichnen das Gebilde als eine Involution dritten Ranges und der $m$ten Ordnung, wenn die einzelnen Gruppen der dreifachen Mannigfaltigkeit m Elemente enthalten.

Ohne bei der Discussion dieser Reihen zu verweilen, gehen wir sogleich zu den Involutionen μten Ranges über, deren Definition, da wir in dem Besitz einer μfachen Mannigfaltigkeit sind, auf ganz natürliche Weise sich ergeben wird. Wir setzen dabei die Theorie der Involutionen $(\mu-1)$ten Ranges als vollständig bekannt voraus, halten es jedoch für unnöthig, auch hier, wie im Capitel 2, diejenigen Sätze ausdrücklich aufzuzählen, auf welche wir uns berufen.

§ 99. Durch irgend $\mu+3$ Gruppen $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots U_\mu, U_{n+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ eines Netzes μter Stufe und $m$ter Ordnung $(m \geqq \mu)$, von denen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ist eine Involution $m$ter Ordnung und μten Rnnges eindeutig bestimmt. Alle Netzbüschel, welche irgend $\mu-1$ Gruppen der Involution mit einer festen Anordnung gegebener Gruppen derselben verbinden, sind unter einander projectivisch. Zu ihnen allen ist die Involution perspectivisch. Bezieht man die μ Büschel mit den Trägern

$$U_2 U_3 \dots U_\mu, U_3 U_4 \dots U_\mu U_1, U_4 \dots U_\mu U_1 U_2, \dots U_1 U_2 \dots U_{\mu-1}$$

so projectivisch, dafs $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ je einem Satze von μ entsprechenden Netzen gemeinsam sind, so treffen sich in jeder Gruppe der Involution μ entsprechende Netze $(\mu-1)$ter Stufe der μ Büschel.

Mit keinem Netze $(\mu-1)$ter Stufe hat die Involution mehr als μ Gruppen gemeinsam.

Der Satz ist für den Werth 2 von μ richtig (§ 87). Wir leiten ihn aus dem entsprechenden, für $\mu-1$ vorausgesetzten, ab[28].

Keine $\alpha + 2$ der gegebenen Gruppen können demselben Netz αter Stufe angehören; im anderen Falle könnten sie mit irgend $\mu - \alpha - 1$ Gruppen durch ein Netz $(\mu - 1)$ter Stufe verbunden werden (§ 81). Die drei Gruppen $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}$, $U_{\mu+3}$ liegen daher nicht in einer Involution. Von den μ Netzbüscheln treten mithin keine zwei in die besondere perspectivische Beziehung. Perspectivisch, und so, dafs in $U_{\mu+1}$ und $U_{\mu+2}$ entsprechende Netze sich treffen, lassen sich nämlich die Büschel $U_1 U_3 \dots U_\mu$ und $U_2 U_3 \dots U_{\mu-1}$ nur beziehen, indem man beide zur Involution $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}$ perspectivisch setzt. Alsdann nämlich entspricht das Netz $U_1 U_2 U_3 \dots U_\mu$, das die Involution $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}$ nur in einer Gruppe trifft, sich selbst. Sie erzeugen daher das Netz $U_3 U_4 \dots U_{\mu+2}$ $(\mu - 1)$ter Stufe, dem der Voraussetzung entgegen auch $U_{\mu+3}$ angehörte. Nun ist keine Gruppe des Netzes $U_1 U_2 \dots U_\mu$ den μ Trägern $(\mu - 2)$ter Stufe

$$U_2 U_3 \dots U_\mu \; ; \; U_3 U_4 \dots U_\mu U_1 \; ; \; U_4 \dots U_1 U_2 ; \dots \; U_1 U_2 \dots U_{\mu-1}$$

gemeinsam. Denn mit dem ersten Träger können die $\mu - 1$ anderen nur die $\mu - 1$ Netze $(\mu - 3)$ter Stufe $U_3 U_4 \dots U_\mu$, $U_4 U_5 \dots U_\mu U_1$, $\dots$, $U_2 U_3 \dots U_{\mu-1}$ gemein haben. Diesen allen müfste folglich eine Gruppe gemeinschaftlich sein. Dieselbe würde aber dann auch den $\mu - 3$ Netzen $(\mu - 4)$ter Stufe $U_4 U_5 \dots U_\mu$; $U_5 U_6 \dots U_\mu U_3$; $\dots$ $U_3 U_4 \dots U_{\mu-1}$, und endlich den drei Involutionen $U_{\mu-1}$, U_μ ; U_μ, $U_{\mu-2}$; $U_{\mu-2}$, $U_{\mu-1}$ angehören müssen. Diese aber sind sicher von einander verschieden, und daher enthalten die Träger der μ Büschel keine gemeinsame Gruppe. Irgend $\mu - 1$ von ihnen haben nur eine Gruppe mit einander gemein, so die $\mu - 1$ letzten die Gruppe U_1; hätten sie noch eine andere Gruppe U' und daher die Involution U', U_1 gemeinsam, so würde allen μ Trägern diejenige Gruppe gleichzeitig angehören, die U', U_1 auf $U_2 U_3 \dots U_\mu$ ausschneidet. Von jedem Satze zusammengehöriger Netze $(\mu - 1)$ter Stufe durch die genannten μ Träger kann nun höchstens eines, sagen wir das erste, mit $U_1 U_2 U_3 \dots U_\mu$ zusammenfallen; die $\mu - 1$ übrigen können, da ihre Träger nur U_1 gemeinsam haben, nur eine Involution U_1', U_1 gemeinsam haben. Dieselbe trifft das erste Netz in der einzigen Gruppe, welche dem Satze von Netzen $(\mu - 1)$ter Stufe gemeinsam ist.

Es mögen nun U_1, U_2 ; U_1, U_3 ; U_1, U_4 ; $\dots$ U_1, U_μ ; U_1, $U_{\mu+1}$; U_1, $U_{\mu+2}$; U_1, $U_{\mu+3}$ ein beliebiges $(\mu - 1)$faches Netz in den Gruppen V_2, V_3, V_4, $\dots$ $V_{\mu+3}$ treffen, von denen keine μ demselben Netze $(\mu - 2)$ter

Stufe angehören. Aus den $\mu - 1$ projectivischen Netzbüscheln mit den Trägern $U_1 U_3 U_4 \ldots U_\mu$; $U_1 U_4 U_5 \ldots U_\mu U_2$; $U_1 U_5 U_6 \ldots U_\mu U_2 U_3$; $\ldots$ $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1}$ entstehen projectivische Netzbüschel mit den Trägern $V_3 V_4 \ldots V_\mu$; $V_4 V_5 \ldots V_\mu V_2$, $V_5 V_6 \ldots V_\mu V_2 V_3$; $\ldots V_2 V_3 \ldots V_{\mu-1}$. Sie erzeugen eine Involution $(\mu - 1)$ten Ranges $V_2 V_3 \ldots V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} V_{\mu+3} \ldots V'_\mu$. Wenn wir für den Werth $\mu - 1$ unseren Satz voraussetzen, so ist dieselbe zu allen Büscheln mit den Trägern $V_3 V_4 \ldots V_{\mu-2} V'_\mu$ perspectivisch. An diesen Trägern bestimmt eine gegebene Anordnung der Gruppen der Involution $(\mu-1)$ten Ranges Büschel, welche zu den $\mu - 1$ vorigen projectivisch sind. Daher mufs eine Folge von Gruppen der gegebenen Involution an allen Trägern $U_1 U_3 U_4 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu$ projectivische Büschel bestimmen. Da keine μ Gruppen der zweiten Involution in demselben Netze $(\mu-2)$ter Stufe liegen, so kann auch U_1 nicht mit irgend μ anderen Gruppen der untersuchten Involution in einem Netze $(\mu-1)$-ter Stufe liegen. Anstatt aus $U_1, U_2, U_3, \ldots U_\mu$; $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ kann also die Involution auch aus den Gruppen $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{\mu-1}, U'_\mu$; $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ bestimmt werden. Denn keine $\mu + 1$ dieser Gruppen liegen in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe, und es sind, da $U_2, U_3, U_4, \ldots U_{\mu-1}$ die Rolle von U_1 oder U_μ übernehmen können, die μ Büschel projectivisch, welche die Involution von den Trägern

$$U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu;\ U_3 U_4 \ldots U_{\mu-1} U'_\mu U_1;\ \ldots\ U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-1}$$

aus projiciren.

Da nun U'_μ genau die Rolle spielen kann, die vorher U_1 einnahm, so folgt nun zuerst, dafs überhaupt keine $\mu + 1$ Gruppen der Involution demselben Netze μter Stufe angehören. Bei mehrmaliger Wiederholung des Verfahrens ergiebt sich, dafs an irgend $\mu - 1$ festen Gruppen der Involution μten Ranges dieselbe ein Netzbüschel bestimmt, das zu den gegebenen projectivisch ist.

Eine Involution, welche die Gruppen $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{\mu+3}$ enthält, kann durch μ projectivische Büschel mit den Trägern $U_2 U_3 \ldots U_\mu$, $U_3 \ldots U_\mu U_1, \ldots U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1}$ erzeugt werden und ist daher durch die gegebenen Gruppen eindeutig bestimmt.

§ 100. Hülfssatz.

Irgend zwei projectivische Büschel von Netzen $(\mu - 1)$ter Stufe einer μfachen Mannigfaltigkeit erzeugen ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe, wenn

ihre Träger demselben Netze (μ—1)ter Stufe angehören, das sich selbst entspricht. Hält man ein Paar homologer Netze fest, so bewegt sich das Erzeugnifs um das ihnen gemeinsame Netz (μ—2)ter Stufe und zwar projectivisch zu dem beweglichen Netze des zweiten Büschels, welches irgend einem festen des ersten Büschels zugeordnet wird.

Die beiden Träger haben, da sie einem Netze (μ—1)ter Stufe angehören, ein Netz N (μ—3)ter Stufe gemeinsam. In dem Netze μter Stufe nehmen wir ein Netz zweiter Stufe an, welches jeden der gegebenen Träger in je einer Gruppe U und V, das Netz (μ—3)ter Stufe aber überhaupt nicht trifft. Die projectivischen Involutionsbüschel $U(W_1, W_2, W_3, \ldots)$ und $V(W_1, W_2, W_3, \ldots)$, in welchen es den Netzbüscheln begegnet, sind perspectivisch, da ihre gemeinsame Involution U, V sich selbst entspricht; $W_1, W_2, W_3, \ldots$ sind daher Gruppen derselben Involution. Homologe Netze der gegebenen Büschel begegnen sich in Netzen (μ—2)-ter Stufe, die diese Gruppen mit N bestimmen. Das Erzeugnifs dieser Büschel ist das Netz aus N, W_1 und W_2. Der Rest des Satzes ergiebt sich leicht, weil z. B. die Büschel $W_1(W_2 W_2' W_2'' \ldots)$ und $V(W_2 W_2' W_2'' \ldots)$, um die Involution U_1, W_2 zu erzeugen, projectivisch sein müssen.

§ 101. Enthält der Träger eines Büschels von Netzen (μ—1)ter Stufe $\mu-\alpha$ verschiedene Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$ der Involution μten Ranges, so trifft jedes einzelne dieselbe noch in α anderen Gruppen. An irgend $\mu-1$ festen Gruppen $B_1, B_2, \ldots B_{\mu-1}$ der Involution bestimmen dieselben eine Gruppe einer Netzinvolution αter Ordnung, deren Elemente nämlich die von $B_1 B_2 \ldots B_{\mu-1}$ ausgehenden Netze (μ—1)ter Stufe sind. Die Gruppe ändert sich projectivisch mit dem ersteren Netzbüschel.

Insbesondere hat jedes Netz (μ—1)ter Stufe mit der Involution μten Ranges μ im Allgemeinen verschiedene Gruppen gemeinsam, und es kommt jedes Element des Trägers in μ Gruppen der Involution vor.

Für den Werth 1 von α ist der Satz im § 99 bewiesen; allgemein geschieht dies durch einen Schlufs von $\alpha-1$ auf α. Der Träger des Netzbüschels sei durch die $\mu-\alpha$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$ der Involution μten Ranges und $\alpha-1$ Gruppen $W_1, W_2, \ldots W_{\alpha-1}$ aufserhalb derselben bestimmt; derselbe habe keine anderen Gruppen als die ersteren mit der Involution gemeinsam.

Zwei beliebige Gruppen X_α und Y_α mögen mit $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$, $W_1, W_2, \ldots W_{\alpha-1}$ Netze (U) und (V) $(\mu-1)$ter Stufe bestimmen, die noch in $X_1, X_2, \ldots X_{\alpha-1}$ und $Y_1, Y_2, \ldots Y_{\alpha-1}$ der Involution μten Ranges begegnen; ferner sei W ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe, das neben X_α, Y_α, $U_1, U_2, \ldots U_{\mu-\alpha}$ noch $\alpha-2$ beliebige Gruppen $Z_1, Z_2, \ldots Z_{\alpha-2}$ enthält. Die beiden Netzbüschel $(U), (W)$ und $(V), (W)$ können so bezogen werden (§ 100), dafs sie eines der gegebenen Netze erzeugen. Sie bestimmen aber auf der Involution μten Ranges zwei projectivische Involutionen $(\alpha-1)$ter Ordnung. Den Gruppen $X_1 X_2 \ldots X_{\alpha-1}$ und $Z_1 Z_2 \ldots Z_{\alpha-1} Y_\alpha$, welche durch (U) und (W) ausgeschnitten werden, entsprechen hierbei stets die Gruppen $Y_1 Y_2 \ldots Y_{\alpha-1}$ und $Z_1 Z_2 \ldots Z_{\alpha+2} X_\alpha$, die (V) und (W) ausschneiden.

Beide Gebilde sind perspectivisch zu Involutionen $(\alpha-1)$ter Ordnung, deren Glieder aus je $\alpha-1$ Netzen $(\mu-1)$ter Stufe durch $\mu-1$ beliebige Gruppen $B_1, B_2, \ldots B_{\mu-1}$ der Involution μten Ranges bestehen. Diese Involutionspaare haben genau $2(\alpha-1)$ Coincidenzgruppen resp. Coincidenznetze. Die beiden Netzgebilde haben eine Gruppe der Netzinvolution $[B_1 B_2 \ldots B_{\mu-1}](X_1 X_2 \ldots X_\alpha ; Y_1 Y_2 \ldots Y_\alpha)$ mit einander gemein und daneben die $\alpha-2$ festen Gruppen, welche nach $Z_1, Z_2, \ldots Z_{\alpha-2}$ führen (§ 33). Läfst man das erste Netz $(\mu-1)$ter Stufe um seinen (U) und (V) gemeinsamen Träger $U_1 U_2 \ldots U_{\mu-\alpha} W_1 W_2 \ldots W_{\alpha-1}$ sich drehen, so bewegt sich zu ihm projectivisch (§ 100) das Netz (V_1) des Büschels (V), (W), welches einem festen Netze (U_1) von $(U), (W)$ zugehört. (V_1) bestimmt aber auf der Involution μten Ranges die Gruppen der zweiten Reihe, welche nach und nach einer festen der ersten Reihe zugeordnet werden. Es bewegt sich daher die an $B_1 B_2 B_3 \ldots B_{\mu-1}$ bestimmte Gruppe der Netzinvolution projectivisch zu dem ausschneidenden Netze des gegebenen Büschels.

§ 102. In jeder Gruppe U_1 einer Involution μten Ranges giebt es eine Tangenteninvolution, die ihr nur in dieser einen Gruppe begegnet, aber mit $\mu-3$ beliebigen Gruppen derselben den Träger eines Büschels bestimmt, welches zur Involution μten Ranges projectivisch ist. Begegnet ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe der Involution μten Ranges in weniger als μ Gruppen, so mufs dasselbe die Tangenteninvolution in wenigstens einer derselben enthalten.

Wenn eine Involution mit irgend $\mu-3$ Gruppen der Involution μten Ranges Träger von Büscheln bestimmt, die zu dieser perspectivisch sind, so mufs dieselbe in einer Gruppe V_1 der Involution $(\mu-1)$ten Ranges $V_2 V_3 V_4 \ldots V_{\mu+3}$ treffen, in die von U_1 aus die gegebene Involution μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3}$ projicirt wird. Nur wenn

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots U_{\mu+3} \ldots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots V_{\mu+3} \ldots$$

gesetzt wird, erhalten wir eine Involution U_1, V_1, die nicht in noch einer zweiten Gruppe die gegebene Involution trifft.

Die Tangenteninvolution in U_1 bestimmt daher an jedem Träger $U_1 U_2' U_3' \ldots U_{\mu-1}'$ ein Netz $(\mu-1)$ter Stufe, welches bei einer projectivischen Erzeugung der Involution μten Ranges dem Netze $U_1 U_2 U_3 \ldots U_\mu$ des Trägers $U_2 U_3 U_4 \ldots U_\mu$ zugehört. Jedes Netz $(\mu-1)$ter Stufe, das aufser U_1 die Tangenteninvolution in U_2 enthält, wird daher in ein Netz $(\mu-2)$ter Stufe projicirt, das die Tangenteninvolution in V_2 enthält. Wenn nun das Netz $(\mu-1)$ter Stufe der Involution nur in U_1, U_2'', U_3'', $\ldots U_{\mu-\alpha}''$ begegnet und nicht die Tangenteninvolution der Involution in U_1 enthält, so kann das Netz $(\mu-2)$ter Stufe, in welchem es dem Träger der Involution $(\mu-1)$ten Ranges begegnet, nur $\mu-\alpha-1$ Gruppen $V_2', V_3', \ldots V_{\mu-\alpha-1}'$ mit derselben gemeinsam haben. Wenn wir voraussetzen, dafs letzteres Netz die Tangenteninvolution in wenigstens einem der V' enthält, so mufs das Netz $(\mu-1)$ter Stufe die Tangenteninvolution in wenigstens einer der Gruppen $U_1, U_2', U_3', \ldots$ enthalten. Der Satz ist also durch einen Schlufs von $(\mu-1)$ auf μ erwiesen, da er für den ersten Fall $\mu=2$ gilt.

§ 103. Zwei projectivische Involutionen μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+2} \ldots$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\mu+2} \ldots$ sind homologe Gebilde collinearer Netze μter Stufe.

Denn für homologe Gruppen U und V ist (§ 99)

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_2 V_3 \ldots V_\mu)(V_1 V_{\mu+1} V_{\mu+2} V)\,.$$
$$(U_3 U_4 \ldots U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_3 V_4 \ldots V_1)(V_2 V_{\mu+1} V_{\mu+2} V)\,.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;\overline{\wedge}\; (V_1 V_2 \ldots V_{\mu-1})(V_\mu V_{\mu+1} V_{\mu+2} V)\,.$$

Diese Beziehungen begründen aber auch (§ 85) die allgemeine collineare Beziehung.

$$U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+2} U \text{ coll. } V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu+2} V .$$

§ 104. Um eine gegebene Involution μten Ranges auf ein einförmiges Gebilde projectivisch zu beziehen, kann man noch drei Elementen des letzteren ihre entsprechenden Gruppen beliebig zuweisen. Um auf ein einförmiges Gebilde eine Involution eines gegebenen μfachen Netzes zu beziehen, kann man noch irgend $\mu + 2$ Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+2}$ des ersteren $\mu + 2$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+2}$, von denen keine $\mu + 1$ demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe zugehören, beliebig zuweisen.

Denn es ist im letzteren Fall

$$a_1 a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;.\quad .$$
$$a_2 a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_3 U_4 \ldots U_1)(U_2 U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;.\quad .$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_\mu a_{\mu+1} a_{\mu+2} a \;\overline{\wedge}\; (U_1 U_2 \ldots U_{\mu-1})(U_\mu U_{\mu+1} U_{\mu+2} U) \;.$$

Gäbe es zwei verschiedene Gebilde der verlangten Art, so könnten zwei collineare Netze μter Stufe $\mu + 2$ Gruppen, von denen keine $\mu + 1$ demselben Netz $(\mu - 1)$ter Stufe angehören, gemeinsam haben, ohne identisch zu sein.

§ 105. Wird von irgend ν Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ einer Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges aus dieselbe auf ein Netz $(\mu - \nu)$ter Stufe projicirt, so erhält man eine zu jener projectivische Involution $(\mu - \nu)$ten Ranges, falls das letztere Netz mit $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ keine Gruppe gemeinsam hat.

Jede Involution $(\mu - \nu)$ten Ranges kann man, falls ihre Ordnungszahl genügend grofs ist, in solcher Weise darstellen. Die ν Gruppen kann man beliebig aufserhalb ihres Netzes annehmen und beliebigen Gruppen der Involution zuweisen; ferner kann man noch zu irgend $\mu - \nu + 1$ Gruppen der letzteren Involution ihre entsprechenden in den sie projicirenden Netzen νter Stufe beliebig nehmen.

Irgend $\mu - \nu$ Netze $(\mu - 1)$ter Stufe, welche U mit $U_1, \ldots U_\nu$ und je $\mu - \nu - 1$ anderen Gruppen verbinden, haben das von $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ nach U führende Netz νter Stufe mit einander gemeinsam. Diese $\mu - \nu$ Büschel sind zur Involution perspectivisch und schneiden daher auf dem

Netze $(\mu-\nu)$ter Stufe $\mu-\nu$ Büschel von Netzen $(\mu-\nu-1)$ter Stufe aus. Dieselben erzeugen eine Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges, welche die Projection der gegebenen ist.

Es schneide für den zweiten Theil des Satzes das Involutionsnetz $(\mu-\nu)$ter Stufe, und also auch die Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges die Involution μten Ranges in den Gruppen $U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$, und es mögen die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\nu$, welche den projicirenden Träger bestimmen, den Gliedern $U'_1, U'_2, U'_3, \ldots U'_\nu$ der Involution $(\mu-\nu)$ten Ranges entsprechen. Wenn die beiden Netze $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ und $U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1}$ keine Gruppen gemeinsam haben, was nur bei $m \geqq \mu$ der Fall sein kann, so liegen keine $\mu+1$ der Gruppen $U'_1, U_1, U_2, U_3, \ldots U_\nu, U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$ in einem Netze μter Stufe. Wenn man eine Involution t_1 in $U_1 U_2 \ldots U_\nu U'_1$ von U_1 ausgehend wählt, so wird dieselbe mit keinen $(\mu-1)$ der Gruppen in einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe liegen. Kann man eine Involution μten Ranges so legen, dafs sie t_1 zur Tangente hat, und dafs die Projectivität stattfindet

$$U_{\nu+1} U_{\nu+2} \ldots U_{\mu+1} U_1 U_2 \ldots U_\nu \;\overline{\wedge}\; U_{\nu+1} U_{\nu+2} \ldots U_{\mu+1} U'_1 U'_2 \ldots U'_\nu\,,$$

so ist die Aufgabe gelöst. Werden nämlich die Gruppen $U''_1, U''_2, \ldots U''_\nu$ von den νfachen Netzen ausgeschnitten, die aufser $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ noch die Tangenteninvolutionen in $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ enthalten, so entsprechen sie den $U_1, U_2, \ldots U_\nu$; man hat daher

$$U''_1 U''_2 U''_3 \ldots U''_\nu U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1} \ldots \;\overline{\wedge}\; U'_1 U'_2 U'_3 \ldots U'_\nu U_{\nu+1} \ldots U_{\mu+1} \ldots$$

Fällt nun U'_1 mit U''_1 zusammen, so werden von selbst $U'_2, U'_3, \ldots U'_\nu$ und $U''_2, U''_3, \ldots U''_\nu$ identisch (§ 104). Nach demselben Paragraph hat man nur zu setzen, um die irgend einer Gruppe U' entsprechende U zu finden

$$(U_1 U_3 U_4 \ldots U_\mu)(U_2 U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U'_2 U_{\mu+1} U'_1 U' \ldots$$
$$(U_1 U_4 U_5 \ldots U_2)(U_3 U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U'_3 U_{\mu+1} U'_1 U' \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+1})(U_\mu U_{\mu+1} t_1 U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U_\mu U_{\mu+1} U'_1 U' \ldots$$

Endlich ist noch erforderlich

$$(U_2 U_3 \ldots U_\mu)(U_1 U_{\mu+1} U \ldots) \;\overline{\wedge}\; U'_1 U_{\mu+1} U' \ldots$$

Diese Bedingungen sind aber, wie nothwendig, auch hinreichend. Die ersteren ergeben für das einem U' zugehörende U eine bestimmte von

U_1 ausgehende Involution. Haben wir auf ihr, was die letzte Beziehung noch zuläfst, das ihm entsprechende U willkürlich gewählt, so ist jedem anderen U' sein U zweifellos zugeordnet. Ganz analog hätten wir zu verfahren, wenn von der Involution μten Ranges anstatt $U_{\nu+1}, U_{\nu+2}, \ldots U_{\mu+1}$ selbst Gruppen gegeben wären, welche von $U_1 U_2 \ldots U_\nu$ aus in die letzteren projicirt werden.

§ 106. Verbindet man jede Gruppe einer Involution μten Ranges mit einem Netze N $(\nu-1)$ter Stufe, das keine Gruppe derselben enthält, durch Netze νter Stufe, so schneiden dieselben auf einem den Träger des Bündels nicht enthaltenden Netze $(\mu-\nu)$ter Stufe eine ausgeartete Involution μten Ranges aus, die vermöge der eigentlichen Involution μten Ranges, ihres Zeigers, auf andere Gebilde bezogen werden kann.

In jedem Netze μter Stufe, welches den Träger $(\mu-\nu)$ter Stufe einer ausgearteten Involution enthält, kann man unendlich viele Zeiger derselben annehmen, welche zu dem ersten projectivisch sind.

Falls die Ordnungszahl m für die folgende Deduction nicht grofs genug ist, füge man allen Gruppen des gegebenen Zeigers dieselbe constante Gruppe bei.

Das neue Netz μter Stufe habe aufserhalb des $(\mu-\nu)$fachen Trägers der Involution keine Gruppe mit dem gegebenen μfachen Netze gemeinsam. Wir können dann in dem Gesammtnetz ein $(\nu-1)$faches Netz N'' annehmen, das mit keinem der beiden μfachen eine Gruppe gemeinsam hat. Projiciren wir von hier aus (durch νfache Netze) die ganze Figur auf das neue Netz, so geht der gegebene Zeiger in eine projectivische Involution μten Ranges über. Jede Gruppe der ausgearteten Involution und ihres Trägers geht in sich selbst über, N geht in ein anderes $(\nu-1)$-faches Netz N' über. Jede Gruppe der ausgearteten Involution liegt mit den beiden Netzen N, N' und zwei entsprechenden Gruppen der projectivischen Zeiger in zwei νfachen Netzen.

Die ausgearteten Involutionen μten Ranges verhalten sich zu den allgemeinen, wie die rationale ebene Curve dritter Ordnung zur Raumcurve. Projiciren wir von einem $(\mu-2)$fachen Netze aus auf eine Involution, so erhalten wir jeder einzelnen Gruppe der letzteren μverschiedene ihres Zeigers involutorisch zugeordnet (§ 101)[29].

Unter den behandelten Involutionen befinden sich auch solche, deren Ordnung r kleiner als ihr Rang μ ist. Sie werden erhalten, wenn allen Gruppen des Netzes $(\mu-\nu)$ter Stufe $m-r$ Punkte gemeinsam sind. Es läfst sich, als Specialfall des vorigen, zeigen, dafs eine solche Involution mit Hülfe eines Netzes μter Ordnung sich herstellen läfst, und dafs man die $\mu-r$ Punkte, die mit ihm zugleich bei dem Procefs der Ausartung erscheinen, ganz willkürlich festsetzen kann. Ist nämlich G die Zusatzgruppe von $m-r$ Punkten, so kann man zunächst allen Gliedern des Zeigernetzes noch die Gruppe H von $\mu-r$ Punkten zusetzen, alsdann aber in dem Netze μter Stufe, $(m+\mu-r)$ter Ordnung, dessen Gruppen G gemeinsam ist, einen Zeiger der Involution finden, die sich von der zu betrachtenden um GH unterscheidet. G kann nun, da es auch allen Gliedern des Zeigernetzes gemeinsam ist, abgeworfen werden; dann aber erscheint die Involution $r$ter Ordnung bei der Ausartung mit H zusammen.

§ 107. Irgend eine ausgeartete Involution νten Ranges kann man als Projection einer zu ihrem ursprünglichen Zeiger projectivischen Involution μten Ranges auffassen, deren Trägernetz ganz aufserhalb desjenigen der gegebenen Involution liegt. Der Träger des Projectionsbündels ist ein Netz μter Stufe, welches in $\mu-\nu$ Gruppen die zu bildende Involution trifft, die beliebigen Gruppen der gegebenen zugehören.

Wenn die Ordnungszahl m kleiner als $\nu+\mu$ ist, so mufs dieselbe durch Hinzufügung einer unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen hinreichend erhöht werden.

Zuerst ist die Involution I $m$ter Ordnung, νten Ranges in einem Netze N $(\nu-\alpha)$ter Stufe enthalten. Wir können sie als Projection einer allgemeinen Involution II νten Ranges von einem Netze N_1 $(\alpha-1)$ter Stufe aus betrachten.

Bestimmen nun irgend $\mu-\nu$ Gruppen $V_1, V_2, \dots V_{\mu-\nu}$ aufserhalb des Netzes νter Stufe ein Netz N_2 $(\mu-\nu-1)$ter Stufe, das keine Gruppe mit jenem gemeinsam hat, so können wir II als Projection einer Involution III μten Ranges von N_2 aus betrachten. Dieselbe kann nach § 105 so bestimmt werden, dafs die Gruppen $V_1, V_2, \dots V_{\mu-\nu}$ in ihr liegen und in vorgeschriebene Gruppen der Involution νten Ranges projicirt werden.

Die beiden Netze N_1 und N_2 bestimmen zusammen ein Netz $(N_1 N_2)$ $(\mu + \alpha - \nu - 1)$ter Stufe (§ 82). Zwei zusammengehörige von N_1 und N_2 ausgehende Netze αter und $(\mu - \nu)$ter Stufe liegen, weil sie in einer Gruppe von II sich treffen, in einem Netze $(\mu + \alpha - \nu)$ter Stufe. Daher ist die entartete Involution I eine Projection von $(N_1 N_2)$ aus der Involution III μten Ranges, welche zu ihrem ursprünglichen Zeiger projectivisch ist. Jetzt wird noch ein Zusatznetz N_3 $(\nu - \alpha)$ter Stufe angenommen, welches das vorhandene Netz μter Stufe nicht trifft. Wir können nun durch $(N_1 N_2)$ ein Netz μter Stufe legen, welches weder mit N noch mit N_3 eine Gruppe gemeinsam hat. Auf dieses denken wir uns die Involution III projicirt; wir erhalten eine Involution IV μten Ranges, die wieder zum gegebenen Zeiger projectivisch ist. Eine Gruppe von IV und die zugehörige von I liegen mit dem Netze $(N_1 N_2 N_3)$ $(\mu + \alpha - \nu - 1 + \nu - \alpha + 1)$ter oder μter Stufe in einem Netze $(\mu + \alpha - \nu + \nu - \alpha + 1)$ter oder $(\mu + 1)$ter Stufe. Die Involution IV ist die im Satze angezeigte, und $(N_1 N_2 N_3)$ das in ihm bezeichnete Projectionsnetz.

Zusatz. Es ist nun leicht einzusehen, dafs in jedem Netze μter Stufe, welches N nicht trifft, ein zu dem ursprünglichen projectivischer Zeiger μten Ranges angenommen werden kann. Man kann nämlich die gesammte vorliegende Anordnung von Netzen auf das Netz $(\mu + \nu - \alpha + 1)$ter Stufe projiciren, welches durch N und das neue Netz bestimmt wird. Diese Beziehung kann man so einrichten, dafs die Projection des Zeigers, den wir hergestellt hatten, in das neue Netz μter Stufe fällt.

§ 108. Zwei projectivische Involutionen $[U]$ und $[V]$ $m$ter Ordnung und μten Ranges desselben Trägers, an deren Stelle auch Ausartungen derselben treten können, sind Glieder einer Schaar projectivischer Involutionen μten Ranges

$$[U] \barwedge [V] \barwedge [W] \barwedge [Z] \barwedge \ldots,$$

von denen entsprechende Gruppen in projectivischen Involutionen, den Leitinvolutionen der Schaar, angeordnet liegen. Zu ihnen allen wird die Schaar projectivisch gesetzt. Haben die gegebenen Gebilde eine Gruppe entsprechend gemein, so wird in einem Gliede der Schaar ihre zugehörige Gruppe unbestimmt. Dasselbe reducirt sich im Allgemeinen auf eine

Involution $(\mu - 1)$ten Ranges, doch kann in besonderen Fällen der Rang noch weiter herabsinken.

Die gegebenen Involutionen mögen für sich in Netzen $\nu_1$ter und $\nu_2$ter Stufe, zusammen aber in einem Netze N νter Stufe liegen; n sei die gemeinschaftliche Ordnung dieser Gebilde, durch Hinzufügung derselben unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen genügend gesteigert. $[U]$ und $[V]$ sind Entartungen allgemeiner Involutionen μten Ranges $[U']$ und $[V']$ von den Netzen N_1 und N_2 aus. Diese Netze μter Stufe sollen weder unter sich (§ 107), noch mit dem Netze N eine Gruppe gemeinsam haben. Endlich sei N' das Netz $(2 + 2\mu + \nu)$ten Ranges, in dem alle betrachteten Gruppen sich befinden. Wir können $[U]$ und $[V]$ auch als Projectionen der Gebilde $[U']$ und $[V']$ von $(N_1 N_2)$ aus auf N betrachten. Denn jedes Netz $(2\mu + 2)$ter Stufe des Bündels $(N_1 N_2)$ trifft N nur in der einen Gruppe, welche das vorher durch N_1 oder N_2 gelegte Netz $(\mu + 1)$ter Stufe ausschnitt. Die beiden projectivischen Involutionen μten Ranges $[U']$ und $[V']$ sind homologe Bestandtheile (§ 103) collinear bezogener Netze (U) und (V) ((U) coll. (V)). Diese geben (§ 86) einer Schaar $(U'), (V')$ collinearer Netze $(U'), (V'), (W'), (Z'), \ldots$ den Ursprung, und einen Theil derselben bildet eine Schaar $[U'], [V']$ projectivischer Involutionen μten Ranges $[U'], [V'], [W'], [Z'], \ldots$, deren homologe Gruppen in projectivischen Leitinvolutionen liegen. Von $(N_1 N_2)$ aus projicirt sich die Schaar in eine im Satze angezeigte. Die Leitinvolutionen, welche $(N_1 N_2)$ nicht treffen, projiciren sich in projectivische Involutionen, welche homologe Gruppen enthalten. Eine Leitinvolution aber, welche $(N_1 N_2)$ in einer Gruppe G_0' begegnet, wird in eine einzige Gruppe G_0 des Netzes N projicirt, die daher $[U]$ und $[V]$ entsprechend gemeinsam ist. Durch G_0' geht ein Netz (W') der Schaar $(U'), (V')$ und eine Involution $[W']$ der Schaar $[U'], [V']$. Sie wird von $(N_1 N_2)$ aus in eine Involution $(\mu - 1)$ten Ranges projicirt, deren Zeiger zu denen der gegebenen Involutionen projectivisch ist. Der Gruppe G_0' gehört, da sie kein Netz $(2\mu + 1)$ter Stufe des Bündels $(N_1 N_2)$ bestimmen kann, jede beliebige Gruppe zu, speciell in der Involution $(\mu - 1)$ten Ranges aber diejenige, welche an $(N_1 N_2)$ die Berührungsinvolution von $[W]$ in G_0' bestimmt. In besonderen Fällen, wenn (W') ein ganzes Netz mit $(N_1 N_2)$ gemeinsam hat, und in diesem mehrere Gruppen von $[W']$ liegen, kann an die Stelle der Involution

$(\mu-1)$ten Ranges eine solche niedrigeren Ranges treten. Ob irgend eine Involution der Schaar $[U], [V]$ entartet ist, hängt davon ab, ob das Netz μter Stufe, welches die entsprechende Involution von $[U'], [V']$ enthält, das Netz $(N_1 N_2)$ trifft, sei es in einer einzelnen Gruppe, sei es in einem Netze. Sämmtliche Involutionen der Schaar $[U], [V]$ sind also dann, aber auch nur dann entartet, wenn ein Theil der Leitinvolutionen der Netzschaar $(U'), (V')$ vollständig in $(N_1 N_2)$ liegt. Dies kann sicher nur eintreten, wenn $[U]$ und $[V]$ beide entartet sind.

§ 109. Zwei projectivische Involutionen $[U]$ und $[V]$ $m$ter Ordnung, $(\mu-\alpha)$ten Ranges und $(\mu-\beta)$ten Ranges, oder Ausartungen solcher können als Bestandtheile einer Schaar betrachtet werden, deren Involutionen mit ersterer alle die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$, mit letzterer die jenen nicht zugehörigen Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ gemeinsam haben.

Da wir allen Gruppen eine Anzahl unveränderlicher Elemente hinzufügen können, so können wir m gröfser als 2μ voraussetzen. Es seien $U_{\beta+1}, U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ und $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ die Gruppen, welche den gegebenen je in der anderen Involution entsprechen. Setzen wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen voraus, so mufs $[U']$ in α Gruppen $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots U'_{\beta+\alpha}$ das Netz N_1, und $[V']$ das Netz N_2 in β Gruppen $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ treffen. $[U']$ und $[V']$ sind zu den ursprünglichen Zeigern projectivisch, und zwar können (§§ 105 und 107) $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots U'_{\beta+\alpha}$ den Gruppen desselben entsprechend gesetzt werden, aus denen $U_{\beta+1}$, $U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ entstehen, $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ aber den Gruppen, aus denen $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ entstehen. Die Leitinvolutionen

$$U'_1, V'_1; U'_2, V'_2; \ldots U'_\beta, V'_\beta; U'_{\beta+1}, V'_{\beta+1}; \ldots U'_{\beta+\alpha}, V'_{\beta+\alpha}$$

der Schaar $[U'], [V']$ enthalten alle je eine Gruppe des Netzes $(N_1 N_2)$ und werden daher in je eine Gruppe des Netzes N projicirt. Es treffen, da $U'_1, U'_2, \ldots U'_\beta$ in $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ projicirt werden, die ersteren β Netze $(2\mu+2)$ter Stufe in diesen Gruppen, die anderen ebenso die zweite Involution in $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$. Die Projectionen von $V'_1, V'_2, \ldots V'_\beta$ sind an und für sich unbestimmt, weil aber die Involution $[V']$ in jenen Punkten durch die nach $V_1, V_2, \ldots V_\beta$ gehenden Netze berührt wird, gehören diese Gruppen speciell den Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ in der zweiten der gegebenen Involutionen zu. Ebenso entsprechen $U'_{\beta+1}, U'_{\beta+2}, \ldots$

$U'_{\beta+\alpha}$ die Gruppen $U_{\beta+1}, U_{\beta+2}, \ldots U_{\beta+\alpha}$ in der ersten Involution, dagegen die Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ in allen übrigen.

Es können in der Schaar noch andere entartete Involutionen niedrigeren Ranges vorkommen, jedoch nur dann, wenn die gegebenen Involutionen Gruppen entsprechend gemeinsam haben.

War es nöthig, vor Beginn des gegebenen Beweises die Gruppen der gegebenen Involutionen alle um dieselben unveränderlichen Punkte zu vermehren, so erscheinen diese, da je die entsprechenden Gruppen in Leitinvolutionen liegen, auch bei allen anderen Involutionen, und können daher nachträglich wieder abgelöst werden.

§ 110. Die Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \ldots, V_1 V_2 V_3 \ldots, W_1 W_2 W_3 \ldots, \ldots$ einer Schaar haben mit einer festen, zu ihnen projectivischen Involution ersten Ranges und $n$ter Ordnung $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die Gruppen einer Involution $(\mu n + m)$ter Ordnung gemeinsam.

Man betrachte statt der gegebenen die folgenden Gebilde

$$1)\ X_1 U_1, X_1 U_2, X_1 U_3 \ldots;\ X_1 V_1, X_1 V_2, X_1 V_3 \ldots;\ X_1 W_1, X_1 W_2, X_1 W_3 \ldots;\ \ldots$$

$$2)\ U_1 X_1, U_1 X_2, U_1 X_3 \ldots;\ V_1 X_1, V_1 X_2, V_1 X_3 \ldots;\ W_1 X_1, W_1 X_2, W_1 X_3 \ldots;\ \ldots$$

Die Reihen 1) bilden eine Schaar projectivischer Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und μten Ranges; die Reihen 2) dagegen gehören zu einer Schaar zu jenen projectivischer Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und ersten Ranges (§ 73). Beide Schaaren haben eine Leitinvolution $U_1 X_1, V_1 X_1, W_1 X_1, \ldots$ entsprechend gemeinsam.

Wir nehmen, nachdem nöthigenfalls durch Hinzufügung einer unveränderlichen Gruppe zu allen gegebenen die Ordnung hinreichend vergröfsert war, vier Hülfsnetze M_1, N_1, M_2, N_2 $(m+n)$ter Ordnung und μter Stufe an. Dieselben sollen ein Netz O $(4\mu+3)$ter Stufe constituiren, und dieses soll das Netz S, in dem die gegebenen Gebilde liegen, nicht treffen. Die beiden ersten Glieder der Reihe 1) kann man nun als Projectionen von M_1 und N_1 aus den eigentlichen Involutionen μten Ranges und $(m+n)$ter Ordnung

$$3)\quad \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \mathfrak{U}_4 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+2} \mathfrak{U}_{\mu+3} \ldots \text{ und } \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \mathfrak{V}_4 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+2} \mathfrak{V}_{\mu+3} \ldots$$

betrachten (§ 107). Wir setzen voraus, dafs diese beiden Involutionen in Netzen liegen, die S und daher auch einander nicht treffen. Die Hülfsschaar, welche beide Involutionen μten Ranges eindeutig bestimmen, wird von $(M_1 N_1)$ aus in eine der in Betracht kommenden Schaaren projicirt. Sollten $[U]$ und $[V]$ zu mehreren Schaaren gehören, so entsteht doch jede einzelne, also auch die gegebene, in dieser Art. Es entspreche dabei der Leitinvolution $X_1 U_\lambda, X_1 V_\lambda, X_1 W_\lambda, \ldots$ die projectivische $\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{V}_\lambda, \mathfrak{W}_\lambda, \ldots$, so dafs aus dem Gliede $\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3 \mathfrak{W}_4 \ldots$ der Schaar 3) das dritte Glied der Schaar 1) entsteht.

Entsprechend darf man die beiden ersten Glieder der Schaar 4) als Projectionen von M_2 und N_2 aus zweier projectivischer Involutionen μten Ranges, $(m+n)$ter Ordnung

$$\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \mathfrak{U}_3' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+2}' \mathfrak{U}_{\mu+3}' \ldots ; \quad \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \mathfrak{V}_3' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+2}' \mathfrak{V}_{\mu+3}' \qquad 4)$$

betrachten. Wir setzen voraus, dafs die Netze, in denen sie liegen, mit S, und daher auch unter einander keine Gruppe gemeinsam haben. $\mathfrak{U}_2'$, $\mathfrak{U}_3', \ldots \mathfrak{U}_\mu'$ sollen in M_2, $\mathfrak{V}_2', \mathfrak{V}_3', \ldots \mathfrak{V}_\mu'$ aber in N_2 liegen. Da dann $\mathfrak{U}_2', \mathfrak{V}_2'$; $\mathfrak{U}_3', \mathfrak{V}_3'$; $\ldots \mathfrak{U}_\mu', \mathfrak{V}_\mu'$ vollständig in dem Netze $(M_2 N_2)$ gelegen sind, so werden von hier aus auch alle übrigen Glieder der Schaar 4) in Involutionen ersten Ranges projicirt, die der Schaar 2) angehören. Dabei ist

$$\mathfrak{U}_\lambda', \mathfrak{V}_\lambda', \mathfrak{W}_\lambda', \ldots \;\overline{\wedge}\; U_1 X_\lambda, V_1 X_\lambda, W_1 X_\lambda, \ldots$$

Von dem Netze O $(4\mu+3)$ter Stufe aus werden gleichzeitig die Schaaren 3) und 4) in diejenigen 1) und 2) projicirt. Man kann nun die beiden Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, in denen die projectivischen Schaaren 3) und 4) liegen, in einer Weise so collinear beziehen, dafs je zwei entsprechende Glieder derselben einander zugehören. Man setze nämlich

$$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1} \mathfrak{W}_{\mu+2} \text{ coll. } \mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}' \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}' \mathfrak{W}_{\mu+2}'.$$

Keine $2\mu+2$ der links stehenden und keine $2\mu+2$ der rechts stehenden Gruppen gehören demselben Netze 2μter Stufe an. Daher ist die collineare Beziehung eindeutig bestimmt, und es gehören die Netze $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}'$, sowie $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}'$ einander zu. Der einzigen Involution, die $\mathfrak{W}_{\mu+2}$ mit zwei Gruppen $\mathfrak{U}_{\mu+2}$ und $\mathfrak{V}_{\mu+2}$ (§ 82) von $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_{\mu+1}$ und $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \ldots \mathfrak{V}_{\mu+1}$ verbindet, gehört die einzige Involution zu, welche $\mathfrak{W}_{\mu+2}'$ mit den entsprechenden Gliedern

$\mathfrak{U}'_{\mu+2}$ und $\mathfrak{V}'_{\mu+2}$ verbindet (§ 82). Daher entsprechen (§ 85) einander die collinearen Netze

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\ldots\mathfrak{U}_{\mu+1}\mathfrak{U}_{\mu+2}\ldots \text{ coll. } \mathfrak{U}'_1\mathfrak{U}'_2\ldots\mathfrak{U}'_{\mu+1}\mathfrak{U}'_{\mu+2}\ldots \text{ oder } (U) \text{ coll. } (V)$$

und die darin enthaltenen projectivischen Involutionen μten Ranges $[\mathfrak{U}]$ und $[\mathfrak{U}']$; ebenso sind die collinearen Netze $(\mathfrak{V})$ und $(\mathfrak{V}')$ und die darin enthaltenen projectivischen Involutionen μten Ranges $[\mathfrak{V}]$ und $[\mathfrak{V}']$ homologe Gebilde. Dem einzigen (§ 86) von $\mathfrak{W}_{\mu+2}$ ausgehenden Netze μter Stufe $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3\ldots\mathfrak{W}_{\mu+2}$, welches jede Involution $\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{V}_\lambda$ in einer Gruppe trifft, entspricht das einzige von $\mathfrak{W}'_{\mu+2}$ ausgehende Netz gleicher Art. Da überhaupt die projectivischen Involutionen $\mathfrak{U}_\lambda\mathfrak{V}_\lambda\mathfrak{W}_\lambda\mathfrak{Z}_\lambda\ldots$ und $\mathfrak{U}'_\lambda\mathfrak{V}'_\lambda\mathfrak{W}'_\lambda\mathfrak{Z}'_\lambda\ldots$ einander entsprechen, so sind wirklich die Schaaren 3) und 4) homologe Gebilde der betrachteten collinearen Netze $(\mathfrak{U}\mathfrak{V})$ und $(\mathfrak{U}'\mathfrak{V}')$. Nach § 86 wird aber durch diese beiden eine Schaar collinearer Netze $(2\mu+1)$ter Stufe

5) $$(\mathfrak{U}\mathfrak{V}) \text{ coll. } (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}') \text{ coll. } (\mathfrak{U}''\mathfrak{V}'') \text{ coll. } (\mathfrak{U}'''\mathfrak{V}''')\ldots$$

definirt, von der die projectivischen Schaaren collinearer Netze μter Stufe

$$(\mathfrak{U})(\mathfrak{U}')(\mathfrak{U}'')\ldots : (\mathfrak{V})(\mathfrak{V}')(\mathfrak{V}'')\ldots : (\mathfrak{W})(\mathfrak{W}')(\mathfrak{W}'')\ldots$$

Bestandtheile sind.

Nun liegen aber von den drei Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{Z}_1\ldots \overline{\wedge}\ \mathfrak{U}'_1, \mathfrak{V}'_1, \mathfrak{W}'_1, \mathfrak{Z}'_1\ldots \overline{\wedge}\ U_1X_1, V_1X_1, WX_1, ZX_1\ldots$$

je drei entsprechende Gruppen mit O in demselben Netze $(4\mu+4)$ter Stufe und daher treffen alle Involutionen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}'_1 : \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}'_1, \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}'_1 ; \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}'_1 ; \ldots$ das Netz O $(4\mu+3)$ter Stufe in je einer Gruppe $\mathfrak{U}''_1, \mathfrak{V}''_1, \mathfrak{W}''_1, \mathfrak{Z}''_1$. Da sie dem Netze dritter Stufe $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}'_1\mathfrak{V}'_1$ und dem Netze $(4\mu+5)$ter Stufe $(O\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1)$ gleichzeitig angehören, so liegen $\mathfrak{U}''_1, \mathfrak{V}''_1, \mathfrak{W}''_1, \mathfrak{Z}''_1\ldots$ in einer Involution der Schaar $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{Z}_1\ldots$, $\mathfrak{U}'_1\mathfrak{V}'_1\mathfrak{W}'_1\mathfrak{Z}'_1\ldots$ Sie bilden folglich homologe Bestandtheile (§ 86) dreier Netze $(\mathfrak{U}\mathfrak{V}), (\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'), (\mathfrak{U}''\mathfrak{V}'')$ der Schaar 5). Von O aus werden daher $[\mathfrak{U}''], [\mathfrak{V}''], [\mathfrak{W}''], \ldots$ in projectivische Involutionen $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges einer Schaar, etwa in die Involutionen

6) $$U''_1U''_2\ldots U''_{\mu+3}\ldots,\ V''_1V''_2\ldots V''_{\mu+3}\ldots,\ W'_1W'_2\ldots W'_{\mu+3}\ldots,\ldots$$

projicirt, von denen jede mit den beiden entsprechenden Gliedern der Schaaren 1) und 2) alle Coincidenzpunkte aufserhalb $U_1X_1, V_1X_1, W_1X_1, \ldots$

resp. gemeinsam hat. Daher haben sie mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ alle die und keine anderen Punkte gemeinsam, welche den Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ gemeinsam sind. Man kann nun in derselben Weise weiter schliefsen. Die gesuchten Punktgruppen sind auch Coincidenzgruppen der projectivischen Involutionen $(m+2n)$ter Ordnung, $(\mu-2)$ten Ranges einer bestimmten Schaar mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$, und sie sind endlich einer Schaar projectivischer Involutionen $(m+(\mu-1)n)$ter Ordnung, ersten Ranges mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ gemeinsam. Die letzteren aber haben nach § 74 mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die einzelnen Glieder einer Involution $(m+\mu n)$-ter Ordnung, ersten Ranges gemein. Damit ist der Lehrsatz bewiesen.

Wenn bei einer Bestimmungsweise eine Coincidenzgruppe von $m+\mu n$ verschiedenen Punkten der beiden projectivischen Reihen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $X_1 X_2 X_3 \ldots$ sich ergiebt, so ist dieselbe natürlich davon unabhängig, welche Gruppe von $X_1 X_2 X_3 \ldots$ die bevorzugte Rolle übernimmt, welche wir X_1 zugewiesen hatten, und welchen Zeiger von den überhaupt zugelassenen wir wählen, wofern wir es mit einer entarteten Involution μten Ranges zu thun haben. Für die Folge ist es ungemein wichtig, dafs die bezügliche Coincidenzgruppe auch dann zweifellos feststeht, wenn mehrfache Punkte in ihr auftreten.

Bei ihrer Ermittelung kommen aufser $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$ und $\mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \mathfrak{U}_3' \ldots$ allein M_1 und N_1 in Betracht; die übrigen Hülfsgebilde dienen nur dazu, auch die anderen Glieder der durch $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ bestimmten Schaar ins Auge zu fassen.

Daher können wir $V_1 V_2 V_3 \ldots$ als eine reguläre Involution μten Ranges ansehen. Wir können ferner annehmen, dafs ihr Netz aufserhalb dessen von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ liegt, und dafs sie mit $X_1 X_2 X_3 \ldots$ $m+\mu n$ verschiedene Punkte gemeinsam hat, unter denen sich keiner der untersuchten befindet. Die Hülfsschaar $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \ldots$, $V_1 V_2 V_3 \ldots$ oder $[\mathfrak{U}]$, $[V]$ ist also von einem Netze M_1 μter Stufe aus auf dasjenige von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ zu projiciren. In der so entstehenden Schaar findet sich nur eine endliche Zahl entarteter Involutionen μten Ranges, und daher eine unendliche Zahl solcher regulärer, die mit $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine zweite reguläre Gruppe von $m+\mu n$ Punkten gemeinsam haben. Als Glied einer Involution mit zwei verschiedenen regulären Gruppen bleibt

das untersuchte Gebilde ungeändert, so lange wir den Zeiger von $[U]$ und damit M_1 ungeändert lassen.

Um nun andere Zeiger von $[U]$ aufzufinden, haben wir das Netz M_1' aufserhalb des Netzes, dem M_1 und die Involution angehören, anzunehmen, und von hier aus den älteren Zeiger $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3\ldots$ auf irgend ein Netz $(\mu+\alpha+1)$ter Stufe, das ebenfalls das Trägernetz der Involution enthält, zu projiciren; der Zeiger gehe dabei in $\mathfrak{U}_1''\mathfrak{U}_2''\mathfrak{U}_3''\ldots$, M_1 aber in ein Netz M_1'' μter Stufe über. Die Schaar

$$\mathfrak{U}_1''\mathfrak{U}_2''\ldots\mathfrak{U}_{\mu+3}''\ldots,\quad V_1V_2V_3\ldots V_{\mu+3}\ldots$$

aber haben wir von M_1'' aus auf das Netz zu projiciren, dem $U_1U_2U_3\ldots$ und $V_1V_2V_3\ldots$ gleichzeitig angehören. Nun entsteht aber die ganze neue Hülfsschaar aus der alten durch Projection von M_1' aus, so $\mathfrak{W}_1''\mathfrak{W}_2''\ldots\mathfrak{W}_{\mu+3}''$ aus $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\ldots\mathfrak{W}_{\mu+3}$. Demnach bestimmen die Büschel

$$M(\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\ldots\mathfrak{W}_{\mu+3})\quad\text{und}\quad M''(\mathfrak{W}_1''\mathfrak{W}_2''\ldots\mathfrak{W}_{\mu+3}'')$$

dieselbe Involution μten Ranges $W_1W_2W_3\ldots W_{\mu+3}$ in dem Netze, dem $[U]$ und $[V]$ gleichzeitig angehören. Da nämlich das Netz $(2\mu+2)$ter Stufe, welches durch M, M'' und $\mathfrak{W}_\lambda$ oder $\mathfrak{W}_\lambda''$ bestimmt wird, das Netz (UV) in nur einer Gruppe trifft, so müssen in derselben auch die Netze $(M\mathfrak{W}_\lambda)$ und $(M''\mathfrak{W}_\lambda'')$ ihm begegnen.

Die Schaar ist also durch $U_1U_2U_3\ldots U_{\mu+3}$ und $V_1V_2V_3\ldots V_{\mu+3}$ eindeutig bestimmt, und damit auch eine Gruppe, die $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3\ldots$ mit X_1X_2 $X_3\ldots$ gemeinsam ist.

§ 111. Zwei projectivische Involutionen μten Ranges oder $(\mu-\alpha)$-ten und $(\mu-\beta)$ten Ranges, resp. deren Ausartungen bestimmen nur eine Schaar nach Art der §§ 108 oder 109.

Es seien

$$U_1U_2U_3\ldots U_{\mu+3}\ldots;\ V_1V_2V_3\ldots V_{\mu+3}\ldots;\ W_1W_2W_3\ldots W_{\mu+3}\ldots$$

drei Involutionen der ersteren Schaar. Es kommt darauf an, zu zeigen, dafs die dritte Involution durch die beiden ersteren und ein Element B_1 der Gruppe W_1 eindeutig bestimmt ist, wenn U_1 und V_1 nicht zusammenfallen, und B_1 nicht beiden gemeinsam ist. Wir beziehen zu diesem Zwecke unendlich viele einförmige Gebilde des Trägers auf die Involution so projectivisch, dafs das U_2, V_2 und W_2 entsprechende Element B_2

in keiner dieser drei Gruppen sich findet. Unter solchen Umständen hat das einförmige Gebilde drei Gruppen von $m+\mu$ Punkten mit den drei Involutionen μten Ranges gemeinsam, und drei so zusammengehörige Gruppen U, V, W gehören derselben Involution an. B_ι kann noch in der U_ι und V_ι zugehörigen Gruppe W_ι gewählt werden. Wird die zur Herstellung von $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ etwa nöthige Methode der Entartung geändert, so bleiben (§ 110) die Gruppen U und V, mithin auch W, da ihm B_1 angehört, ungeändert. Träte nun an die Stelle von $W_1 W_2 W_3 \ldots$ etwa $W_1 W_2' W_3' \ldots$, so fallen doch W_ι und W_ι' zusammen, da sie B_ι gemeinsam haben und der Involution U_ι, V_ι angehören. Weil nun B_ι ein beliebiges Element des Trägers der Involution war, so sind beide Involutionen $[W]$ und $[W']$ identisch.

Sind nun $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ projectivische Involutionen von derselben Ordnung mit den Rangzahlen $\mu-\alpha$ und $\mu-\beta$, und ist $W_1 W_2 W_3 \ldots$ eine projectivische Involution μten Ranges aus einer Schaar, deren Involutionen mit ersterer die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_\beta$, mit letzterer aber die Gruppen $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ gemeinsam haben, so besteht, wie im § 109 gezeigt ist, ein Glied der Schaar aus $U_1 U_2 U_3 \ldots$, und es werden die Glieder ganz unbestimmt, welche $V_{\beta+1}, V_{\beta+2}, \ldots V_{\beta+\alpha}$ zugehören. Ein anderes Glied der Schaar aber besteht aus $V_1 V_2 V_3 \ldots$, und in ihr werden die Glieder ganz unbestimmt, welche $U_1, U_2, \ldots U_\beta$ zugehören. Versteht man unter U, V, W die Coincidenzgruppen zwischen $B_1 B_2 B_3 \ldots$ und den drei genannten Reihen, also Gruppen zu $m+\mu-\alpha$, $m+\mu-\beta$ und $m+\mu$ Punkten, so gehört W der Involution $B_{\beta+1} B_{\beta+2} \ldots B_{\beta+\alpha} U$, $B_1 B_2 B_3 \ldots B_\beta V$ an. Daraus folgt, wie vorher, dafs $W_1 W_2 W_3 \ldots W_{\mu+3}$ durch $U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu-\alpha+3} \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots V_{\mu-\beta+3}$ eindeutig bestimmt ist.

§ 112. Sind $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ zwei projectivische Involutionen desselben Trägers der Ordnungen m und n und der Rangzahlen μ und ν, so giebt es eine Involution $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, U_4 V_4, \ldots$ der Ordnung $m+n$ und des Ranges $\mu+\nu$, deren Glieder aus je zwei entsprechenden der vorigen Reihen sich zusammensetzen.

Der Satz ist bewiesen, wenn μ und ν beide gleich 1 sind (§ 94). Sobald daher von $\mu, \nu-1$ auf μ, ν geschlossen werden kann ($\nu \geqq \mu$), gilt

derselbe allgemein. Zu diesem Zwecke legen wir eine beliebige zu den gegebenen projectivische Involution $n$ter Ordnung und $(\nu-1)$ten Ranges $V_1 V_2' V_3' V_4' \dots$, die mit der zweiten gegebenen Involution V_1 entsprechend gemein hat. Wir können sie mit $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ oder $[V]$ zu einer Schaar rechnen, deren Glieder mit letzterer aufser V_1 das Glied V_2 gemeinsam haben. In dieser Schaar giebt es noch eine zweite Involution $(\nu-1)$ten Ranges $V_1'' V_2 V_3'' V_4'' \dots$, welche mit $[V]$ wohl V_2, aber nicht V_1 gemeinsam hat. Nach der gemachten Annahme sind

1) $U_1 V_1, U_2 V_2', U_3 V_3', U_4 V_4', \dots$ und $U_1 V_1'', U_2 V_2, U_3 V_3'', U_4 V_4'', \dots$

zwei zu einander projectivische Involutionen $(m+n)$ Ordnung, $(\mu+\nu-1)$-ten Ranges. Nach § 109 kann man eine und nach § 111 nur eine Schaar von Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu)$ten Ranges bilden, die sämmtlich unter einander projectivisch sind, und die alle mit ersterer die Gruppe $U_1 V_1$, mit letzterer die Gruppe $U_2 V_2$ entsprechend gemein haben. Sind M', M'', M die Coincidenzgruppen der Reihen 1) und eines beliebigen durch $U_3 V_3$ bestimmten Gliedes der Schaar mit irgend einem zu ihnen projectivischen einförmigen Gebilde $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$ so gehören (§ 111) $B_2 M'$, $B_1 M''$ und M zu derselben Involution ersten Ranges und der Ordnung $m+n+\mu+\nu$. Nun liegen aber in M', M'' und folglich auch in M die $m+\mu$ Elemente, welche $U_1 U_2 U_3 \dots$ mit $B_1 B_2 B_3 \dots$ gemeinsam sind; sie enthalten aufserdem die Gruppen $B_2 N', B_1 N''$ und N einer Involution $(\nu+n)$ter Ordnung. N'', N' sind dabei die Coincidenzgruppen zwischen $V_1'' V_2 V_3'' V_4'' \dots$ und $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$, resp. zwischen $V_1 V_2' V_3' V_4'$ und $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$ Wenn man daher B_3 in dem Gliede V_3 wählt, so ist N die Coincidenzgruppe zwischen $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ und $B_1 B_2 B_3$ (§ 111). Da hierin B_1 und B_2 noch ganz beliebig gewählt werden können, so folgt, dafs dem durch $U_3 V_3$ bestimmten Gliede, der Schaar 1), auch alle Glieder $U_1 V_1, U_2 V_2, U_3 V_3, \dots U_{\mu+3} V_{\mu+3} \dots$ angehören. Denn wenn man B_λ mit einem Elemente von V_λ zusammenfallen läfst, so kommt es in dem bezüglichen durch B_3 bestimmten Gliede der Involution $B_2 N', B_1 N''$ vor; daher ist $U_\lambda V_\lambda$ ein Glied der Involution, und zwar das U_λ entsprechende.

§ 113. Zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges haben nur dann unendlich viele Punkte mit einander gemeinsam, wenn sich beide von einer dritten projectivischen

Involution $r$ter Ordnung, ϱten Ranges nur um projectivische Involutionen unterscheiden.

Wir setzen den Satz voraus für die Werthe ν und $\mu-1$, wie er in der That für μ, $\nu = 2$ richtig ist (§ 95). Statt der gegebenen Involutionen

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \qquad 1)$$

betrachten wir die folgenden

$$U_1 V_1, U_1 V_2, U_1 V_3, U_1 V_4, \ldots \barwedge V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots \quad 2)$$

$(m+n)$ter Ordnung und der Rangzahlen μ, ν. Wenn diese beiden Schaaren nicht identisch sind, und daher $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ sich nicht nur um je eine unveränderliche Gruppe von einer dritten Involution unterscheiden, so giebt es in der Schaar 2) wenigstens eine Involution

$$W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \quad \text{oder} \quad [W] \qquad 3)$$

$(m+n)$ter Ordnung $(\mu-1)$ten Ranges, von der zwar $U_1 V_1$ keine Gruppe ist, die aber alle Coincidenzstellen der Reihen 2) und also auch der Reihen 1) enthält. Mit $V_1 V_2 V_3 \ldots$ hat folglich $[W]$ unendlich viele Punkte gemeinsam. Beide umfassen mithin dieselbe zu beiden projectivische Involution $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ $r$ter Ordnung und ϱten Ranges. Entweder $[Z]$ selbst, oder ein etwaiger Bestandtheil dieser Reihe mufs auch zugleich der Reihe $[U]$ angehören. Nehmen wir an, dafs $[Z]$ schon jene $[U]$ und $[V]$ gemeinschaftliche projectivische Involution ist, so dafs Ordnungs- und Rangzahlen derselben kleiner als die entsprechenden gegebenen Zahlen sind. Es sei zunächst $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ in der Form geschrieben

$$Z_1 X_1, Z_2 X_2, Z_3 X_3, Z_4 X_4, \ldots, \qquad 4)$$

so ist zu beweisen, dafs $X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$ eine zu den gegebenen projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho)$ten Ranges ist. Zu diesem Zwecke sei $X_1 X_2' X_3' X_4' \ldots$ eine zu $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho)$ten Ranges, so dafs also (§ 112) $Z_1 X_1$, $Z_2 X_2', Z_3 X_3', Z_4 X_4' \ldots$ eine projectivische Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges ist. Alsdann constituiren

$$Z_1 X_1, Z_2 X_2, Z_3 X_3, Z_4 X_4 \ldots \barwedge Z_1 X_1, Z_1 X_2', Z_3 X_3', Z_4 X_4', \ldots$$

eine Schaar, in der auch eine Involution $Z_1 X_1'', Z_2 X_2'', Z_3 X_3'', Z_4 X_4'' \ldots$ $m$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges vorkommt. Wir können voraus-

setzen, dafs $X_1''X_2''X_3''X_4''\dots$ eine zu $Z_1Z_2Z_3Z_4\dots$ projectivische Involution $(m-r)$ter Ordnung, $(\mu-\varrho-1)$ten Ranges ist. Von hier aus kann man aber ganz so, wie es im § 112 geschehen ist, schliefsen, dafs auch $X_1X_2X_3X_4\dots$ eine zu $Z_1Z_2Z_3Z_4\dots$ projectivische Involution ist, und zwar von der $(m-r)$ten Ordnung und dem $(\mu-\varrho)$ten Range. Analog hat $Y_1Y_2Y_3Y_4\dots$ die Form $Z_1Y_1, Z_2Y_2, Z_3Y_3, Z_4Y_4\dots$, und es ist $Y_1Y_2Y_3Y_4\dots$ eine zu $Z_1Z_2Z_3Z_4\dots$ projectivische Involution $(n-r)$ter Ordnung und $(\nu-\varrho)$ten Ranges.

§ 114. Sollen unendlich viele Gruppen einer Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges mehrfache Elemente umfassen, so mufs jedes Glied entweder dieselbe Gruppe mit mehrfachen Elementen oder die entsprechende Gruppe einer Involution niedrigerer Ordnung und niedrigeren Ranges mehrfach enthalten.

Es sei zuerst m gröfser als μ, die Involution aber gelagert in einem Netze νter Stufe. Ist nun D^m ein beliebiges $m$faches Element des Trägers (α), so suche man für jede Gruppe U_λ die Doppelpunktsgruppe der Involution D^m, U_λ auf. Dieselben bilden eine projectivische Involution $(m-1)$ter Ordnung, wenn U_λ eine solche im gegebenen Netze durchläuft (§ 76). Dem ganzen Netze entspricht ein collineares ihrer Doppelpunktsgruppen, falls nicht etwa D^m in dem ersteren sich vorfindet. Alsdann erhält man nur eine Doppelpunktsgruppe für jede von D^m ausgehende Involution, im Ganzen also nur ein Netz $(\nu-1)$ter Stufe und $(m-1)$ter Ordnung. Einem weiteren in dem ersten Netze enthaltenen $m$fachen Elemente entspricht ein $(m-1)$faches in dem Netze der Doppelpunktsgruppen. Wird vorausgesetzt, dafs sich in einem Netz $(m-1)$-ter Ordnung und $(\nu-1)$ter Stufe höchstens $\nu-1$ $(m-1)$fache Elemente befinden, wenn $m-1$ gröfser als $\nu-1$ ist, so folgt von selbst, dafs in einem νfachen Netze $m$ter Ordnung höchstens ν $m$fache Elemente liegen, wenn m gröfser als ν ist. Das letztere Resultat ist also durch einen Schlufs von $\nu-1$ auf ν erwiesen. Daher kann in diesem Falle D^m aufserhalb des Netzes angenommen werden, und es entspricht dem νfachen Netze ein νfaches der Doppelpunktsgruppen. Auf das ganze Netz μter Stufe, in welchem der Zeiger der gegebenen Involution sich befindet, beziehen wir collinear ein zweites so, dafs dem eigentlichen Träger der

Involution das Netz der Doppelpunktsgruppen entspricht. Dem Zeiger entspricht dann ein projectivischer in dem neuen Netze, und der alten entarteten Involution eine solche $[U']$ mit dem neuen Zeiger, die in dem Netze der Doppelpunktsgruppen liegt. Sie ist zwar noch vom Range μ, aber nur noch von der Ordnung $m-1$. Wenn keine unveränderlichen Elemente den Gruppen der gegebenen Involution gemeinsam sind, müssen beide von einander wesentlich verschieden sein. Zwei entsprechende Gruppen der Involutionen haben nur dann gemeinsame Elemente, wenn in derjenigen der gegebenen Involution mehrfache Elemente sich vorfinden, und zwar ist ein $p$faches Element einer Gruppe U_λ ein $(p-1)$faches ihrer entsprechenden. Unendlich viele Gruppen mit mehrfachen Elementen können daher nur vorkommen, wenn beide Gebilde in Involutionen niedrigeren Ranges zerfallen. Für die einzelnen Bestandtheile ist aber der Satz, welchen wir beweisen wollen, vorauszusetzen. Es enthält mithin jede einzelne Theilinvolution $[V], [W], [Z], \ldots$ nur eine endliche Anzahl singulärer Gruppen. In der untersuchten Involution müssen also einzelne Theilinvolutionen mehrfach auftreten; ihre Gruppe U_λ ist von der Form $V_\lambda^m W_\lambda^n \ldots Z_\lambda^q$, wo $V_\lambda, W_\lambda, \ldots Z_\lambda$ homologe Gruppen projectivischer Involutionen $[V], [W], \ldots [Z]$ sind. Die entsprechende Gruppe der Involution $[U']$ ist von der Form $X V_\lambda^{m-1} W_\lambda^{n-1} \ldots Z_\lambda^{q-1}$.

Falls nun m nicht gröfser als μ, jedoch gröfser als ν ist, hat man in dem noch νfachen Netze der Doppelpunktsgruppen zuerst alle Gruppen um $s+1$ unveränderliche Elemente zu vermehren, wenn die gegebene Involution bei der Ausartung mit s unveränderlichen Punkten $(s+m=\mu)$ erschien. (Vergl. § 106). Man bezieht nun, wie vorher, zwei Netze μter Stufe und μter Ordnung so collinear, dafs die beiden genannten νfachen Netze einander entsprechen. Dann entsprechen zwei entartete Involutionen μter Ordnung und μten Ranges mit projectivischen Zeigern einander. Während aber von der letzteren Involution sich $s+1$ unveränderliche Elemente ablösen lassen, lösen von der gegebenen sich s Punkte ab. Da beide Involutionen somit nicht wesentlich identisch sein können, so kann man, wie oben, weiter schliefsen. Wenn endlich m gleich ν ist (bei allgemeinen Involutionen gleich μ), so liegt D^m in dem νfachen Netz und man erhält nur ein $(\nu-1)$faches Netz der Doppelpunktsgruppen, das man collinear auf ein beliebiges aufserhalb D^m oder D^ν gelegenes $(\nu-1)$-

faches Theilnetz des gegebenen beziehen kann. Alle seine Gruppen versehe man noch mit einem unveränderlichen Elemente, und beziehe das von ihm und D^ν constituirte νfache Netz collinear auf das gegebene. Alle Gruppen beider νfachen Netze N und N' versehe man mit je derselben unveränderlichen Gruppe von $\mu-\nu$ Elementen, und betrachte die so entstandenen Netze als homologe Gebilde collinearer Netze μter Stufe. In dem ersteren kann man einen Zeiger der gegebenen Involution finden, ihm entspricht in dem zweiten ein projectivischer; aus der zur gegebenen homologen Entartung entsteht eine in N' gelegene Involution μten Ranges, welche aus dem gefundenen Zeiger durch Projection von einem $(\mu-\nu-1)$fachen, ihn nicht treffenden Netze aus entsteht. Diese entartete Involution aber haben wir von der Gruppe aus, die aus D^ν und $\mu-\nu$ unveränderlichen Elementen besteht, auf das Netz zu projiciren, welches die Doppelpunktsgruppen, um $\mu-\nu+1$ unveränderliche Punkte vermehrt, enthält. In diesem Netze entsteht eine Involution μten Ranges, die aus dem ursprünglichen Zeiger offenbar durch Projection von einem $(\mu-\nu)$fachen Netze aus entsteht. Während man nun die letztere Involution durch Ablösung einer constanten Gruppe auf die $(\nu-1)$te Ordnung reduciren kann, geht die erste nur auf die νte Ordnung zurück. Beide sind daher wesentlich von einander verschieden und können nur dann unendlich viele Gruppen gemeinsam haben, wenn beide in Theilinvolutionen zerfallen. Nach der Natur der Sache müssen nun wieder einzelne dieser Involutionen in der gegebenen mehrfach auftreten.

§ 115. Die Elemente des Trägers einer Involution μten Ranges, welche nicht μ verschiedenen Gruppen derselben angehören, können nur dann in unendlicher Anzahl auftreten, wenn die Involution in Bestandtheile zerfällt, und unter diesen sich wenigstens zwei gleiche befinden.

Wir beziehen zwei auf der gegebenen Involution gelegene Gruppenreihen

1) $$U_1 U_2 U_3 \dots AB \quad \text{und} \quad V_1 V_2 V_3 \dots AB$$

projectivisch auf einander, wenn die gegebene Involution allgemein ist; wenn sie entartet ist, weisen wir sie zwei projectivischen Anordnungen ihres Zeigers zu. Wenn U_1 an V_1 heranrückt, so rückt auch U_λ an V_λ heran. Die Coincidenzelemente beider Reihen gehören gleichzeitig zwei

benachbarten Gruppen an. An der Grenze erhält man daraus ein Element, welches einer ganzen Tangenteninvolution angehört, und mithin in weniger als μ verschiedenen Gruppen vorkommt. Zugleich bekommt man so alle verschiedenen Elemente der untersuchten Art. Denn nach § 102 mufs das Netz $(\mu-1)$ter Stufe, welches durch das Element bestimmt wird (§ 83) wenigstens von einer der Gruppen, die ihr mit der Involution gemeinsam sind, die Tangenteninvolution enthalten. Soll es unendlich viele solche Elemente geben, so müssen an der Grenze die Reihen 1) unendlich viele Elemente gemeinsam haben. In ihrer Schaar kommt aber wenigstens eine Involution $(\mu-1)$ten Ranges und $m$ter Ordnung vor, die einer bestimmten Grenze sich nähert. Diese Involution hat mit der gegebenen nur dann unendlich viele Punkte gemeinsam, wenn beide in Bestandtheile zerfallen, und einzelne von diesen Reihen ihnen beiden gemeinsam sind. Die gegebene Involution ist daher von der Form

$$[U] = [U'][U''][U'''] \ldots$$

Wären nun diese Bestandtheile alle von einander verschieden und nicht weiter zerlegbar, so gäbe es erstens nur einzelne Elemente E, die zwei Bestandtheilen gleichzeitig angehören, und zweitens, wenn wir unseren Satz für Gebilde niedrigeren Ranges voraussetzen, wie er für Involutionen zweiten Ranges gilt, nur eine endliche Anzahl von Elementen F, die in irgend einem Bestandtheil weniger Gruppen angehören, als dessen Rang anzeigt. Jeder von den E und F verschiedene Punkt bestimmte aber dann offenbar so viele verschiedene Gruppen, als der Rang von $[U]$ anzeigt. Sollen daher unendlich viele Elemente weniger als μ verschiedene Gruppen bestimmen, so müssen wenigstens zwei dieser Bestandtheile zusammenfallen; dann aber gehört wirklich jedes Element zu weniger als μ verschiedenen Gruppen.

§ 116. Zwei Involutionen der Ordnungen m und n, der Ränge μ und ν resp. $(\nu \leqq \mu)$ haben, projectivisch bezogen, im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu$ gemeinsame Stellen, wenn sie nicht eine zu beiden projectivische Involution $r$ter Ordnung und ϱten Ranges gemeinsam haben. Statt ihrer können auch Ausartungen eintreten.

Wir setzen voraus, dafs der Satz für die Zahlen ν und $\mu - 1$ $(\mu \geqq \nu)$ gilt, und dafs die gegebenen Involutionen nicht in Theile zerfallen $(U_1 U_2$

$U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$). Von den beiden entsprechenden Gruppen U_1 und V_1 kann vorausgesetzt werden, dafs sie kein Element mit einander gemeinsam haben, aus je m resp. n verschiedenen Elementen bestehen, von denen überdies jedes zu μ resp. ν verschiedenen Gruppen (§§ 114 und 115) gehört. Es sei nun $U_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine zu den gegebenen projectivische Involution $m$ter Ordnung $(\mu-\nu)$ten Ranges, so betrachten wir die projectivischen Involutionen $(m+n)$ter Ordnung μten Ranges (§ 112)

1) $V_1 U_1, V_2 W_2, V_3 W_3, V_4 W_4, \ldots \barwedge V_1 U_1, V_1 U_2, V_1 U_3, V_1 U_4, \ldots$

In der durch beide bestimmten Schaar giebt es eine Involution $(m+n)$-ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$, welche alle aufserhalb $U_1 V_1$ gelegenen Coincidenzstellen der Reihen 1) mit beiden gemeinsam hat. Mit $V_1 V_2 V_3 \ldots$ hat sie daher aufser ihren Coincidenzstellen mit $U_1 U_2 U_3 \ldots$ alle die Stellen gemeinsam, die ihr Element in V_1 haben, ohne dieser Gruppe anzugehören. Jedes Element von V_1 gehört aber noch zu $(\nu-1)$ anderen Stellen. Wenn wir daher den Satz für die Zahlen $\mu-1$ und ν voraussetzen, wie er für $\mu=\nu=2$ gilt, so haben die beiden gegebenen Involutionen

$$(m+n)\nu + n(\mu-1) - n(\nu-1) = m\nu + n\mu$$

gemeinsame Stellen. Da somit von $\mu-1, \nu$ auf μ, ν geschlossen werden kann, so ist der Satz allgemein bewiesen. Die Formel rechtfertigt sich auch für zerfallende Involutionen.

In dem entsprechenden Beweise für $\mu=2, \nu=2$ haben wir in Rücksicht auf spätere Anwendungen ein complicirteres Verfahren angewendet.

§ 117. Es seien zwei projectivische Schaaren

$$[U][V][W][Z] \ldots \barwedge [U'][V'][W'][Z'] \ldots$$

projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges gegeben. Man kann unendlich viele zu jenen projectivische Schaaren

$$[U''][V''][W''][Z''] \ldots \barwedge [U'''][V'''][W'''][Z'''] \ldots \barwedge \ldots \barwedge [U^{(\lambda)}][V^{(\lambda)}][W^{(\lambda)}][Z^{(\lambda)}] \ldots$$

aus Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, die zu jenen projectivisch sind, so bilden, dafs je die entsprechenden Involutionen zu Schaaren

$$[U][U'][U''] \ldots [U^{(\lambda)}] \barwedge [V][V'][V''] \ldots [V^{(\lambda)}] \barwedge [W][W'][W''] \ldots [W^{(\lambda)}] \barwedge \ldots$$

gehören, die zu einander projectivisch sind. Ist den ersteren Schaaren eine Involution $[U]$ entsprechend gemeinsam, so ist auch den letzteren Schaaren eine Involution $[X]$ entsprechend gemeinsam.

Der Beweis ist bereits in dem enthalten, was im § 110 entwickelt wurde. Wir können durch Annahme geeigneter Hülfsnetze μter Stufe die gegebenen in allgemeine Involutionen μten Ranges projiciren

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3\mathfrak{U}_4 \dots ; \; \mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_3\mathfrak{V}_4 \dots ; \; \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_4 \dots ; \; \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_4 \dots \quad 1)$$
$$\mathfrak{U}_1'\mathfrak{U}_2'\mathfrak{U}_3'\mathfrak{U}_4' \dots ; \; \mathfrak{V}_1'\mathfrak{V}_2'\mathfrak{V}_3'\mathfrak{V}_4' \dots ; \; \mathfrak{W}_1'\mathfrak{W}_2'\mathfrak{W}_3'\mathfrak{W}_4' \dots ; \; \mathfrak{Z}_1'\mathfrak{Z}_2'\mathfrak{Z}_3'\mathfrak{Z}_4' \dots , \quad 2)$$

deren Netze sämmtlich von einander unabhängig sind. Die unter 1) geschriebenen Netze gehören alle zu einer, die unter 2) geschriebenen zu einer zweiten projectivischen Schaar von Involutionen μten Ranges. Wir können nun die beiden $(2\mu + 1)$fachen Netze, in denen 1) und 2) liegen, collinear so beziehen (§ 110), dafs $[\mathfrak{U}]$ und $[\mathfrak{U}']$, $[\mathfrak{V}]$ und $[\mathfrak{V}']$, $[\mathfrak{W}]$ und $[\mathfrak{W}']$, u. s. w. einander entsprechen. Beide constituiren aber eine Schaar collinearer Netze. Jenen beiden projectivischen Schaaren 1), 2) entsprechen in den anderen Netzen derselben die projectivischen

$$\mathfrak{U}_1''\mathfrak{U}_2''\mathfrak{U}_3''\mathfrak{U}_4'' \dots , \; \mathfrak{V}_1''\mathfrak{V}_2''\mathfrak{V}_3''\mathfrak{V}_4'' \dots , \; \mathfrak{W}_1''\mathfrak{W}_2''\mathfrak{W}_3''\mathfrak{W}_4'' \dots \quad 3)$$
$$\mathfrak{U}_1^{(\lambda)}\mathfrak{U}_2^{(\lambda)}\mathfrak{U}_3^{(\lambda)}\mathfrak{U}_4^{(\lambda)} \dots , \; \mathfrak{V}_1^{(\lambda)}\mathfrak{V}_2^{(\lambda)}\mathfrak{V}_3^{(\lambda)}\mathfrak{V}_4^{(\lambda)} \dots \; \mathfrak{W}_1^{(\lambda)}\mathfrak{W}_2^{(\lambda)}\mathfrak{W}_3^{(\lambda)}\mathfrak{W}_4^{(\lambda)} \dots \quad 4)$$

Alle diese homologen Schaaren sind zu einander projectivisch, denn es gilt dies von den homologen Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{Z}_1 \dots \barwedge \mathfrak{U}_1'\mathfrak{V}_1'\mathfrak{W}_1'\mathfrak{Z}_1' \dots \barwedge \mathfrak{U}_1''\mathfrak{V}_1''\mathfrak{W}_1''\mathfrak{Z}_1'' \dots \barwedge \mathfrak{U}_1^{(\lambda)}\mathfrak{V}_1^{(\lambda)}\mathfrak{W}_1^{(\lambda)}\mathfrak{Z}_1^{(\lambda)} \dots$$

Homologe Involutionen in allen Feldern schliefsen sich zu Schaaren

$$5) \; [\mathfrak{U}][\mathfrak{U}'][\mathfrak{U}''] \dots [\mathfrak{U}^{(\lambda)}] \dots ; \quad 6) \; [\mathfrak{V}][\mathfrak{V}'][\mathfrak{V}''] \dots [\mathfrak{V}^{(\lambda)}] ;$$
$$7) \; [\mathfrak{W}][\mathfrak{W}'][\mathfrak{W}''] \dots [\mathfrak{W}^{(\lambda)}] \dots ; \quad 8) \; [\mathfrak{Z}][\mathfrak{Z}'][\mathfrak{Z}''] \dots [\mathfrak{Z}^{(\lambda)}] \dots$$

zusammen, die projectivisch sind, weil ihre Leitinvolutionen

$$\mathfrak{U}_\mu\mathfrak{U}_\mu'\mathfrak{U}_\mu'' \dots \mathfrak{U}_\mu^{(\lambda)} \dots , \; \mathfrak{V}_\mu\mathfrak{V}_\mu'\mathfrak{V}_\mu'' \dots \mathfrak{V}_\mu^{(\lambda)} \dots ,$$
$$\mathfrak{W}_\mu\mathfrak{W}_\mu'\mathfrak{W}_\mu'' \dots \mathfrak{W}_\mu^{(\lambda)} \dots , \; \mathfrak{Z}_\mu\mathfrak{Z}_\mu' \dots \mathfrak{Z}_\mu^{(\lambda)} \dots$$

zugleich Leitinvolutionen der Schaar von Netzen $(2\mu + 1)$ter Stufe sind. Aus diesen Gebilden gehen durch Projection diejenigen des Satzes hervor. Um den Zusatz zu beweisen, lassen wir zuerst $[\mathfrak{U}], [\mathfrak{U}'], [\mathfrak{U}''], \dots [\mathfrak{U}^{(\lambda)}], \dots$ zusammenfallen in $[\mathfrak{U}]$. Dies geschieht aber, wenn wir von dem Netze $(\mathfrak{U}^{(\varrho)})$ irgend einer der genannten Involutionen aus die ganze Doppelschaar auf das durch $(\mathfrak{U}), (\mathfrak{V}), (\mathfrak{V}')$ bestimmte Netz $(3\mu + 2)$ter Stufe projiciren. Dann

entstehen aus den Schaaren 1), 2), 3), 4), ... unter sich projectivische Schaaren, die sämmtlich die Involution $[\mathfrak{U}]$ entsprechend gemeinsam haben, aus den Schaaren 5), 6), 7), 8), ... entstehen projectivische, welche homologe Involutionen der vorigen Schaaren verbinden. Auch sie haben alle eine Involution entsprechend gemeinsam; da nämlich ein Netz $(2\mu+1)$ter Stufe alle Involutionen $[U^{(\varrho)}], [\mathfrak{V}^{(\varrho)}], [\mathfrak{W}^{(\varrho)}], [\mathfrak{Z}^{\varrho}]$ umfafst, so werden alle diese in eine Involution $[X]$ projicirt, die daher jeder Schaar homologer Involutionen angehört. Durch geeignete Projection kann man die soeben betrachtete Schaar in die behandelte überführen.

§ 118. Bilden $U'_1 U'_2 U'_3 U'_4 \ldots; U''_1 U''_2 U''_3 U''_4 \ldots; U'''_1 U'''_2 U'''_3 U'''_4 \ldots; \ldots$ eine Schaar projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, ist $V'_1 V'_2 V'_3 V'_4 \ldots; V''_1 V''_2 V''_3 V''_4 \ldots; V'''_1 V'''_2 V'''_3 V'''_4 \ldots; \ldots$ eine zu jener projectivische Schaar von Involutionen $n$ter Ordnung und νten Ranges, die zu jenen projectivisch sind, ist ferner allgemein W_λ die Coincidenzgruppe zweier entsprechender Leitinvolutionen $U'_\lambda U''_\lambda U'''_\lambda \ldots U^{(\nu)}_\lambda \ldots \barwedge V'_\lambda V''_\lambda V'''_\lambda \ldots V^{(\nu)}_\lambda \ldots$, so ist $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine zu allen jenen projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu)$ten Ranges.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Denn nach § 117 giebt es eine Involution $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges, welche mit je zwei homologen Gliedern der projectivischen Schaaren

1) $U'_1 V'_1, U'_2 V'_2, U'_3 V'_3, U'_4 V'_4, \ldots; U'_1 V''_1, U'_2 V''_2, U'_3 V''_3, U'_4 U''_4, \ldots; \ldots;$
$U'_1 V^{(\nu)}_1, U_2 V^{(\nu)}_2, U_3 V^{(\nu)}_3, U_4 V^{(\nu)}_4, \ldots$

2) $V'_1 U'_1, V'_2 U'_2, V'_3 U'_3, V'_4 U'_4, \ldots; V'_1 U''_1, V'_2 U''_2, V'_3 U''_3, V'_4 U''_4, \ldots; \ldots;$
$V'_1 U^{(\nu)}_1, V'_2 U^{(\nu)}_2, V'_3 U^{(\nu)}_3, V'_4 U^{(\nu)}_4, \ldots$

zu je einer Schaar gehört. Da dann W_λ den Involutionen

$$U'_\lambda V''_\lambda, V'_\lambda U''_\lambda; U'_\lambda V'''_\lambda, V'_\lambda U'''_\lambda; \ldots U'_\lambda V^{(\nu)}_\lambda, V'_\lambda U^{(\nu)}_\lambda$$

gleichzeitig angehört, so ist W_λ (§ 33, 3) die Coincidenzgruppe der projectivischen Reihen

$$U'_\lambda U''_\lambda U'''_\lambda \ldots U^{(\nu)}_\lambda \ldots \barwedge V'_\lambda V''_\lambda V'''_\lambda \ldots V^{(\nu)}_\lambda \ldots$$

§ 119. Ist $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ eine beliebige Involution $(\mu+1)$ten Ranges und $(m+1)$ter Ordnung, gebildet aus Punkten einer Geraden, haben die projectivischen Punktreihen $([A'], [A''], [A'''], \ldots [A^{(\lambda)}])$

$$MNA_3'A_4'A_5' \ldots ; MNA_3''A_4''A_5'' \ldots ; MNA_3'''A_4'''A_5''' \ldots ; \ldots$$
$$MNA_3^{(\lambda)}A_4^{(\lambda)}A_5^{(\lambda)} \ldots$$

mit ihr die Punkte M, N entsprechend gemeinsam, hat eine Involution $V_1' V_2' V_3' V_4' V_5' \ldots$ $m$ter Ordnung und μten Ranges, die zu den Reihen projectivisch ist, mit $[W]$ neben anderen die $m + \mu$ übrigen Coincidenzstellen zwischen $MNA_3'A_4'A_5' \ldots$ und $W_1 W_2 W_3 W_4 W_5 \ldots$ gemeinsam, so gehört $[V']$ zu einer Schaar $[V'][V''][V'''] \ldots$ unter einander projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, welche zusammen mit der projectivischen Schaar $[A'][A''][A'''] \ldots$ der zu den einzelnen $[V]$ projectivischen Punktreihen $[A]$ die Involution $[W]$ erzeugt. Jede Gruppe W_ν ist dann also die Coincidenzgruppe zwischen einer Leitreihe $A_\nu' A_\nu'' A_\nu''' \ldots$ und der zugehörigen Leitinvolution $V_\nu' V_\nu'' V_\nu''' \ldots$

In der Schaar, welche die beiden projectivischen Involutionen

$$M V_1', N V_2', A_3^{(\lambda)} V_3', A_4^{(\lambda)} V_4' \ldots, \quad W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$$

bestimmen, befindet sich eine Involution, die mit $MNA_1'A_2'A_3' \ldots$ einen beliebigen Punkt A_ϱ aufserhalb ihrer $n + \mu + 2$ Coincidenzpunkte mit $[W]$ entsprechend gemeinsam hat, und daher (§ 116) $MNA_3'A_4'A_5' \ldots$ als einen Theil enthält. Sie ist also von der Form

$$M V_1^{(\lambda)}, N V_2^{(\lambda)}, A_3' V_3^{(\lambda)}, A_4' V_4^{(\lambda)}, A_5' V_5^{(\lambda)} \ldots$$

Auf die beiden projectivischen Schaaren

$$M V_1^{(\lambda)}, N V_2^{(\lambda)}, A_3' V_3^{(\lambda)}, A_4' V_4^{(\lambda)}, \ldots ; \; W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots ;$$
$$M V_1', N V_2', A_3^{(\lambda)} V_3', A_4^{(\lambda)} V_4', \ldots$$
$$M V_1^{(\mu)}, N V_2^{(\mu)}, A_3' V_3^{(\mu)}, A_4' V_4^{(\mu)}, \ldots ; \; W_1, W_2, W_3, W_4, \ldots ;$$
$$M V_1', N V_2', A_3^{(\mu)} V_3', A_4^{(\mu)} V_4', \ldots$$

findet der Zusatz zum § 117 Anwendung. Sie bestimmen daher unendlich viele zu ihnen projectivische Schaaren von Involutionen μten Ranges, die alle mit jenen die Involution $W_1 W_2 W_3 \ldots$ entsprechend gemeinsam haben. Homologe Involutionen liegen in projectivischen Schaaren angeordnet, die alle eine Involution entsprechend gemeinsam haben. Die beiden Schaaren

$$M V_1^{(\lambda)}, N V_2^{(\lambda)}, A_3' V_3^{(\lambda)}, A_4' V_4^{(\lambda)}, \ldots ; \; M V_1^{(\mu)}, N V_2^{(\mu)}, A_3' V_3^{(\mu)}, A_4' V_4^{(\mu)}, \ldots$$

und

$$M V_1', N V_2', A_3^{(\lambda)} V_3', A_4^{(\lambda)} V_4', \ldots ; \; M V_1', N V_2', A_3^{(\mu)} V_3', A_4^{(\mu)} V_4', \ldots$$

oder $[A' V^{(\lambda)}]$, $[A' V^{(\mu)}]$ und $[A^{(\lambda)} V']$, $[A^{(\mu)} V']$ haben aber nur die eine Involution $[A' V']$ oder $M V_1'$, $N V_2'$, $A_3' V_3'$, $A_4' V_4'$, ... gemeinsam. Setzt man

$$[A'][A''][A'''] \ldots [A^{(\lambda)}][A^{(\mu)}][A^{(\nu)}] \ldots \barwedge [V'][V''][V'''] \ldots [V^{(\lambda)}][V^{(\mu)}][V^{(\nu)}] \ldots,$$

so gehört $[W]$ jeder der Schaaren $[A' V^{(\nu)}]$, $[A^{(\nu)} V']$ an und ist, wie der Satz behauptet, das Erzeugnifs der letzteren projectivischen Schaaren; jede Gruppe ist die Coincidenzgruppe von zwei entsprechenden Leitinvolutionen.

Viertes Capitel. §§ 120–178.

Allgemeine Theorie der algebraischen ebenen Curven.

Erster Abschnitt.

Die Kegelschnitte. §§ 120—128.

In diesem Capitel sollen Lehrsätze über die Punktgebilde einer beliebigen reellen Ebene aufgestellt werden, die in der analytischen Geometrie als algebraische Curven bezeichnet werden. Nachdem in dem Vorangegangenen die Hülfsmittel zu diesem Unternehmen ausführlich entwickelt sind, werden wir in diesem Capitel ohne Schwierigkeit zu dem genannten Ziele gelangen.

§ 120. Zwei projectivische Strahlbüschel $A_1(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ und A_2 $(B_1 B_2 C_1 \ldots)$, deren Centren beliebige reelle oder imaginäre Punkte der Ebene sind, erzeugen einen zu beiden perspectivischen Kegelschnitt, auf dem A_1, A_2 und die Punkte liegen, in denen zwei entsprechende Strahlen sich schneiden. Derselbe kann zu allen Strahlbüscheln perspectivisch gesetzt werden, die Punkte von ihm zu Centren haben.

Durch irgend fünf Punkte, von denen keine vier derselben Geraden angehören, läfst sich allemal ein und nur ein Kegelschnitt legen.

Wenn irgend drei der fünf Punkte, etwa A_1, A_2, C_1 einer Geraden a angehören, die beiden anderen aber aufserhalb derselben liegen, und daher eine andere Gerade b bestimmen, so löst sich der Kegelschnitt in a und b auf. Sollen zwei Büschel mit Centren aufserhalb a so bezogen werden, dafs in A_1, A_2, C_1, B_1, B_2 entsprechendeStrahlen sich treffen, so müssen sie zu a perspectivisch liegen. Zwei entsprechende Strahlen müssen sich entweder nur auf a schneiden oder zusammenfallen. Da nun in B_1 und B_2

entsprechende Strahlen sich treffen, so müssen beide Centren P und Q auf $B_1 B_2$ liegen. Liegt P auf dem Strahle a, Q aufserhalb desselben, so entsprechen dem Strahle a des ersteren drei verschiedene und daher (§ 16, 1) alle Strahlen des zweiten Büschels; alle von a verschiedenen Strahlen des Büschels P entsprechen einem Strahle des Büschels Q. Da aber nach B_1 und B_2 entsprechende Strahlenpaare führen, so gehört Q der Geraden $B_1 B_2$ an. Sollen endlich P und Q dem Strahle a angehören, so entspricht a, weil auf ihm drei Punkte liegen, sich selbst. Von den perspectivischen Büscheln müssen sich je zwei entsprechende Strahlen auf $B_1 B_2$ treffen. Sollen sich also von zwei projectivischen Büscheln je zwei entsprechende Strahlen in den drei Punkten A_1, A_2, C_1 von a und in B_1, B_2 treffen, so ist allemal das Geradenpaar ab ihr Erzeugnifs.

Liegen keine drei der fünf Punkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 auf einer Geraden, so ist das Erzeugnifs $(A_1 A_2)(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ der beiden Büschel $A_1(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ und $A_2(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ identisch mit dem Erzeugnifs $(B_1 B_2)(A_1 A_2 C_1 \ldots)$ der beiden Büschel $B_1(A_1 A_2 C_1 \ldots) \barwedge B_2(A_1 A_2 C_1 \ldots)$. Die beiden Büschel A_1 und A_2 schneiden auf $C_1 B_1$ und $C_1 B_2$, da $A_1 C_1$ und $A_2 C_1$ sich entsprechen, perspectivische Punktreihen aus. Verbindungslinien w entsprechender Punkte gehen, weil auch $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ zugehörige Punkte verbinden, durch den Kreuzungspunkt W dieser Geraden. Lassen wir w sich drehen und verbinden ihre Schnittpunkte mit $C_1 B_1$ und $C_1 B_2$ resp. mit A_1 und A_2, so beschreibt deren Kreuzungspunkt F den Kegelschnitt $(A_1 A_2)(B_1 B_2 C_1)$. Halten wir nun in irgend einer Zwischenlage F_1 die Geraden $A_1 F$ und $A_2 F$ fest, lassen aber $B_1 C_1$ und $B_2 C_1$ beweglich werden, so beschreibt ihr Schnittpunkt C einen Kegelschnitt $(B_1 B_2)(A_1 A_2 F_1)$, dem aber auch C_1 angehört, weil hier C seine Bewegung beginnt. C überschreitet F_1, wenn w die Lage $W F_1$ annimmt. Ein beliebiger Punkt F_1 des ursprünglichen Kegelschnittes gehört also auch demjenigen an, der, mit Hülfe der Strahlbüschel B_1 und B_2 erzeugt, durch die hinzukommenden Punkte A_1, A_2, C_1 sicher eindeutig bestimmt wird; beide sind daher mit einander identisch $[(A_1 A_2)(B_1 B_2 C_1 \ldots)$ und $(B_1 B_2)(A_1 A_2 C_1 \ldots)]$. Es ist mithin durch fünf Punkte nur ein Kegelschnitt möglich, und es sind überdies alle Strahlbüschel, die ihr Centrum auf dem Kegelschnitte haben und zu ihm perspectivisch sind, unter einander projectivisch.

Aus dem bewiesenen Satze folgen aber nach § 19 alle die Sätze, welche bei reellen Kegelschnitten allein unter Benutzung der verschiedenen Erzeugungsweisen derselben sich ableiten lassen; insbesondere folgt der Satz, dafs es in jedem Kegelschnittpunkte eine Tangente giebt, und dafs alle Tangenten auf zwei festen projectivische Punktreihen ausschneiden.

§ 121. Jede Gerade, welche nicht Tangente eines Kegelschnittes ist, begegnet ihm in zwei verschiedenen Punkten. Läfst man die Gerade um irgend einen ihrer Punkte sich drehen, so werden die Schnittpunktpaare von jedem seiner Punkte aus durch eine Involution zweiter Ordnung projicirt, welche zu dem Strahlbüschel projectivisch ist.

Diese Sätze sind im ersten Abschnitt des zweiten Capitels (§§ 25 und 26) bewiesen worden.

§ 122. Sind P und Q zwei dem Kegelschnitte nicht angehörige Punkte, so schneiden die Strahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ des Büschels P (mit dem Centrum P) in Punktepaaren, die von Q aus durch Paare einer zu ihm projectivischen Involution zweiter Ordnung und zweiten Ranges projicirt werden. Liegt P auf dem Kegelschnitt, so ist das zugehörige Gebilde eine (entartete) Involution erster Ordnung und zweiten Ranges.

Würde man die einzelnen Strahlen von Q ins Auge fassen, so hätte man die beiden Büschel P und Q als zwei-zweideutig bezogen zu betrachten[30].

Der Kegelschnitt kann durch zwei projectivische Strahlbüschel $r_1 r_2 r_3 \ldots$ und $s_1 s_2 s_3 \ldots$ erzeugt werden, deren Centren R und S ihm angehören, aber aufserhalb der Geraden PQ liegen. Die Strahlen r_λ werden vom Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in projectivischen Punktreihen getroffen. Dieselben werden von Q aus durch zu $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivische Strahlbüschel

$$Q(PA_{\lambda 1} A_{\lambda 2} A_{\lambda 3} \ldots R) \qquad 1)$$

projicirt, die alle die Strahlen QP und QR entsprechend gemeinsam haben und daher zu einer Schaar gehören. Die Leitbüschel

$$Q(PA_{1\mu} A_{2\mu} A_{3\mu} \ldots R) \qquad 2)$$

sind alle zum Strahlbüschel $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivisch und erzeugen mit ihm die Strahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$; das μte Büschel bestimmt den Strahl p_μ.

Die Strahlen s_λ werden ebenfalls durch das Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in projectivische Punktreihen zerlegt; sie werden von Q aus durch Strahlbüschel

3) $$Q(PA'_{\lambda 1} A'_{\lambda 2} A'_{\lambda 3} \ldots S)$$

projicirt, die zu einander und zu den Reihen 1) projectivisch sind. Die letzteren haben alle QP und QS mit einander entsprechend gemein. In allen Reihen 1) und 3) entspricht QP sich selbst; dem gemeinsamen Strahle QS aller Reihen 3) gehören aber in den verschiedenen Reihen 1) wechselnde Strahlen zu. Die Büschel 3) gehören zu einer Schaar. Ihre Leitbüschel

4) $$Q(PA'_{1\mu} A'_{2\mu} A'_{3\mu} \ldots S)$$

sind ebenfalls zu einander, aber auch zu dem Büschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ projectivisch, mit dem zusammen speciell das μte den Strahl p_μ erzeugt. Da nun $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots$ und $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ zu einander projectivisch sind, so sind es auch je zwei entsprechende Leitbüschel 2) und 4). Ihre Coincidenzstrahlen QS_μ, QS'_μ führen nach den Schnittpunkten S_μ, S'_μ von p_μ mit dem Kegelschnitt. Diese werden daher von P aus durch die Strahlenpaare einer zu $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivischen Strahleninvolution

$$Q(S_1 S'_1, S_2 S'_2, S_3 S'_3, S_4 S'_4, \ldots)$$

zweiter Ordnung und zweiten Ranges projicirt (§ 118). Dieselbe ist zunächst zu den projectivischen Involutionen der Schaaren 1) und 3) und damit zu dem Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivisch.

§ 123. Zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 haben stets Schnittpunkte mit einander gemeinsam, und zwar im Allgemeinen und höchstens vier verschiedene.

Die projectivischen Strahlbüschel R und S, welche K_1 erzeugen, treffen K_2 in Punktepaaren, die von einem seiner Punkte O aus durch die Strahlenpaare zweier projectivischer Involutionen zweiter Ordnung und ersten Ranges projicirt werden (§ 121). Die vier Coincidenzstrahlen derselben (§ 32) projiciren die gesuchten Punkte. Daher giebt es stets solche Punkte, im Allgemeinen aber vier verschiedene.

Anmerkung. Wir hätten auch zwei Involutionen zweiten Ranges mit dem Centrum Q benutzen können, die zu demselben Strahlbüschel P projectivisch sind und mit ihm K_1 und K_2 erzeugen. Alle Coin-

cidenzstrahlen beider Involutionen, die aufserhalb QP liegen, führen nach gemeinsamen Punkten beider Kegelschnitte. Doch ist das angewendete Verfahren bei Weitem einfacher.

§ 124. Durch zwei verschiedene Kegelschnitte K_1 und K_2 derselben Ebene ist ein Büschel K_1, K_2 von Kegelschnitten $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots$ bestimmt. Dieselben enthalten sämmtliche K_1 und K_2 gemeinsamen Punkte. Jeder andere Punkt gehört nur einem Kegelschnitte an. Auf allen Geraden, die von einem der ersteren ausgehen, bestimmen die Kegelschnitte projectivische Punktreihen. Sie treffen jede andere Gerade in den Punktepaaren einer Involution zweiter Ordnung und einen beliebigen Kegelschnitt in den Gruppen einer Involution vierter Ordnung. Alle diese Involutionen sind unter sich und mit den vorstehenden Punktreihen projectivisch. Den genannten Gebilden schliefsen sich noch als projectivisch die Tangentenbüschel in einfachen Grundpunkten an, wo also die gegebenen Kegelschnitte verschiedene Tangenten zeigen. Zu allen diesen Gebilden kann das Kegelschnittbüschel projectivisch gesetzt werden.

Beide Kegelschnitte haben (§ 123) wenigstens einen Punkt P gemeinsam. Wir können sie daher mit Hülfe eines Strahlbüschels P und zweier anderer dazu projectivischer mit den Centren O_1 und O_2 erzeugen. Die beiden zum Büschel P projectivischen Strahlbüschel O_1 und O_2 erzeugen einen Kegelschnitt K oder $R_1 R_2 R_3 \ldots$, der zu ihnen beiden perspectivisch ist. Die verschiedenen Strahlbüschel

$O_1(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $O_2(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $O_3(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $\ldots$ $O_\lambda(R_1 R_2 R_3 \ldots)$, $\ldots$

welche von Punkten $O_1, O_2, O_3, \ldots O_\lambda, \ldots$ der Curve K aus die Reihe $R_1 R_2 R_3 \ldots$ projiciren, erzeugen mit dem festen Strahlbüschel P die Kegelschnitte $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\lambda, \ldots$ des genannten Büschels. Jeder K_1 und K_2 gemeinsame Punkt gehört einem Strahle p_ϱ und den beiden entsprechenden $O_1 R_\varrho$ und $O_2 R_\varrho$ gleichzeitig an. Er ist also mit R_ϱ identisch und gehört folglich auch allen anderen Kegelschnitten des Büschels an. Irgend einem Strahle p_μ gehören bei der Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte die Strahlen des Büschels $R_\mu(O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots)$ zu. Die von $O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots$ eindeutig abhängende Anordnung der K_λ schneidet daher auf allen von P ausgehenden Strahlen zu einander projectivische Punktreihen aus. Auf irgend einer Geraden l schneidet das Büschel P

eine Punktreihe $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ aus, und die verschiedenen Büschel O_1, $O_2, O_3, O_4, \ldots$ treffen dieselbe in eben so vielen unter einander und zu $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ projectivischen Punktreihen

$$Q_{11} Q_{21} Q_{31} Q_{41} \cdots \barwedge Q_{12} Q_{22} Q_{32} Q_{42} \cdots \barwedge Q_{13} Q_{23} Q_{33} Q_{43} \cdots \barwedge \cdots$$

Sie haben alle die beiden Schnittpunkte zwischen l und K entsprechend gemeinsam und gehören daher zu einer Schaar. Mit $P_1 P_2 P_3 \ldots$ bestimmen sie die Punktepaare einer bestimmten Involution zweiter Ordnung, welche zugleich von dem Büschel $K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots$ auf l ausgeschnitten wird. Die Paare erscheinen in einer zu den Leitreihen

$$Q_{11} Q_{12} Q_{13} Q_{14} \cdots \barwedge Q_{21} Q_{22} Q_{23} Q_{24} \cdots \barwedge Q_{\mu 1} Q_{\mu 2} Q_{\mu 3} Q_{\mu 4} \cdots \barwedge \cdots$$

und also zu den Büscheln $R_\mu (O_1 O_2 O_3 O_4 \ldots)$ projectivischen Anordnung (§§ 25 und 26). Auf allen Geraden bestimmt das Kegelschnittbüschel Involutionen zweiter Ordnung, die zu einander projectivisch sind.

Hieraus ergiebt sich das Kegelschnittbüschel als unabhängig bestimmt von der Wahl der Hülfspunkte O_1 und O_2. Durch jeden beliebigen Punkt S geht ein Kegelschnitt K_λ des Büschels. Eine um S bewegte Gerade schneidet K_1 und K_2 in je zwei Punkten. Die Schnittpunkte zwischen l und K_λ bilden ein Glied der durch die ersteren Paare bestimmten Involution. Nach dieser Bestimmung ist es auch gleichgültig, welchen der gemeinsamen Punkte P von K_1 und K_2 man zur Bildung des Büschels verwendet.

Alle Kegelschnitte des Büschels bestimmen auf irgend einem anderen $\mathfrak{K}$ die Gruppen einer Involution vierter Ordnung. Denn die Punktepaare, welche $p_1, p_2, p_3, \ldots$ auf $\mathfrak{K}$ ausschneiden, werden von einem seiner Punkte Q aus durch Strahlenpaare einer projectivischen Involution zweiter Ordnung, ersten Ranges $Q(P_{11} P_{22} P_{33} \ldots)$ projicirt, wo also allgemein durch $QP_{\lambda\lambda}$ ein Strahlenpaar derselben bezeichnet wird. Die Punktepaare, welche $O_1(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $O_2(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $O_3(R_1 R_2 R_3 \ldots)$; $\ldots$ $O_\mu(R_1 R_2 R_3 \ldots)$ ausschneiden, werden durch eben so viele unter einander projectivische Involutionen zweiter Ordnung

$$Q(R_{11} R_{21} R_{31} \ldots) \barwedge Q(R_{12} R_{22} R_{32} \ldots) \barwedge Q(R_{13} R_{23} R_{33} \ldots) \barwedge \cdots \barwedge Q(R_{1\lambda} R_{2\lambda} R_{3\lambda} \ldots)$$

projicirt. Da nun diesen Reihen die Coincidenzstrahlen, welche nach den Schnittpunkten zwischen K und $\mathfrak{K}$ führen, gemeinsam sind, überdies aber

homologe Gruppen zu projectivischen Involutionen gehören, so sind alle jene Involutionen zweiter Ordnung und ersten Ranges Glieder einer Schaar (§ 73). Sie haben daher mit $Q(P_{11}P_{22}P_{33}\dots)$ die Gruppen einer Involution vierter Ordnung gemeinsam (§ 74). Ihre Gruppen erscheinen projectivisch zu $Q(R_{\mu 1}R_{\mu 1}R_{\mu 3}\dots)$, also auch projectivisch zu der Reihe $O_1 O_2 O_3 \dots$ auf K, durch deren Punkte die Kegelschnitte des Büschels eindeutig fixirt werden können.

Ist P ein einfacher Schnittpunkt der Kegelschnitte K_1 und K_2, zeigen also diese und folglich alle Kegelschnitte des Büschels von einander verschiedene Tangenten, so ist das Büschel derselben projectivisch auf die Kegelschnittreihe $O_1 O_2 O_3$ bezogen. Diejenige t_λ des Kegelschnittes K_λ entspricht nämlich in dem festen Büschel $p_1 p_2 p_3 \dots$ projectivisch dem Strahle $O_\lambda P$, welcher in noch einem Punkte R'_λ den Kegelschnitt K trifft. Zu der so entstehenden Reihe $R'_1 R'_2 R'_3 R'_4 \dots$ ist also das Tangentenbüschel $t_1 t_2 t_3 t_4 \dots$ des Kegelschnittbüschels projectivisch. Da aber R'_λ und O_λ ein Paar einer Involution bilden, so sind die Reihen $R'_1 R'_2 R'_3 R'_4 \dots$ und $O_1 O_2 O_3 O_4 \dots$ wieder unter sich und folglich mit dem Tangentenbüschel projectivisch. Wir können das Kegelschnittbüschel zu allen im Satze angegebenen Gebilden perspectivisch setzen, da diese alle unter einander projectivisch sind.

§ 125. Die concentrischen und projectivischen Strahleninvolutionen zweiter Ordnung und zweiten Ranges, welche zusammen mit einem festen Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \dots$ die Kegelschnitte $K_1, K_2, K_3, \dots K_\lambda, \dots$ eines Büschels erzeugen, gehören zu einer und derselben Schaar, die ihrerseits zu dem Büschel $K_1 K_2 K_3 \dots K_\lambda \dots$ projectivisch ist.

Die Punktepaare, welche $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ auf K_1, K_2, K_3 ausschneiden, mögen durch die drei zu einander projectivischen Involutionen zweiter Ordnung und zweiten Ranges (§ 122)

$$Q(R_1 R'_1, R_2 R'_2, R_3 R'_3, R_4 R'_4, \dots)\ ,\ Q(S_1 S'_1, S_2 S'_2, S_3 S'_3, S_4 S'_4, \dots)$$
$$Q(T_1 T'_1, T_2 T'_2, T_3 T'_3, T_4 T'_4, \dots)$$

von Q aus projicirt werden. Man lege nun durch die Punkte T_1 und T_λ, welche nicht Grundpunkte des Büschels sind, einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher P und Q enthält. Derselbe wird, von speciellen Lagen abgesehen, in je vier verschiedenen Punkten K_1 und K_2 treffen.

Zu einer Gruppe der durch erstere auf $\mathfrak{K}'$ bestimmten Involution gehören T_1 und T_λ. Die besagten Gruppen werden von Q aus durch Gruppen $q_1^{(4)}, q_2^{(4)}, q_3^{(4)}$ einer Strahleninvolution vierter Ordnung und ersten Ranges projicirt. Sie sind den drei Involutionen zweiten Ranges mit dem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$ gemeinsam, das mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ zusammen $\mathfrak{K}'$ erzeugt und also zu den drei Involutionen zweiten Ranges projectivisch ist. Nach § 110 ist daher $Q(T_\lambda T'_\lambda)$ eine Gruppe der Involution zweiter Ordnung und zweiten Ranges, die mit den ersten beiden zu einer Schaar gehört, und in der $Q(T_1 T'_1)$ das entsprechende Paar zu $Q(R_1 R'_1)$ und $Q(S_1 S'_1)$ ist. Da nun T_λ ein beliebiger Punkt von K_3 ist, so folgt der behauptete Satz.

§ 126. Durch drei beliebige Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, die nicht demselben Büschel angehören, ist ein Kegelschnittnetz zweiter Stufe bestimmt, dem erstens die Kegelschnitte $K_4, K_5, K_6, \ldots$ des Büschels K_2, K_3, zweitens alle Kegelschnitte $K'_2, K'_3, K'_4, K'_5, \ldots$ der Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; \ldots$ angehören[31].

Irgend zwei der genannten Kegelschnitte bestimmen ein ganz im Netze enthaltenes Büschel, und irgend zwei Büschel haben stets einen Kegelschnitt gemeinsam.

Zuerst hat das Büschel K'_l, K'_m mit dem anderen K_2, K_3 oder K_l, K_n einen Kegelschnitt K gemeinsam. Man setze

$$K_1 K_l K'_l \ldots \;\overline{\wedge}\; K_1 K_m K'_m \ldots$$

Das Erzeugniſs der beiden Büschel besteht zum einen Theil aus dem Kegelschnitt K_1. Es sei S irgend ein Punkt des anderen Bestandtheils, s eine ihn enthaltende Gerade. Sie trifft die beiden Büschel in den projectivischen Involutionen

$$U_1 U_l U'_l \ldots \;\wedge\; U_1 U_m U'_m \ldots$$

zweiter Ordnung und ersten Ranges. Die beiden Coincidenzpunkte S und S' auſserhalb U liegen auf der untersuchten Curve. Sie bilden gleichzeitig ein Paar der beiden Involutionen U_l, U_m und U'_l, U'_m (§ 71). Nach der ersten Bestimmung durchläuft S' einen Kegelschnitt K des Büschels K_l, K_m (§ 124), nach der zweiten einen Kegelschnitt K des Büschels K'_l, K'_m. Daher ist der zweite Bestandtheil des betrachteten Erzeugnisses ein beiden Büscheln gemeinsamer Kegelschnitt K.

Wir setzen nun

$$KK_l K_m K_n \ldots \barwedge KK_l' K_m' K_n' \ldots$$

Das Erzeugnifs dieser beiden Büschel ist aufser K ein Kegelschnitt, der zugleich den Büscheln K_l, K_l' und K_m, K_m' angehört und daher mit K_1 zusammenfällt. Er gehört aber auch mit irgend zwei entsprechenden Kegelschnitten zu einem Büschel, und daher mufs jedem der Büschel K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; ... je ein Kegelschnitt $K_2', K_3', K_4', K_5', \ldots$ des Büschels K_l', K_m' angehören.

Es ist nun zwei beliebigen Büscheln des Netzes ein Kegelschnitt gemeinsam. Denn sie treffen die Büschel K_1, K_l und K_1, K_m in den Kegelschnitten K_l', K_l'' und K_m', K_m''. Dafs aber K_l', K_m' und K_l'', K_m'' einen Kegelschnitt gemeinsam haben, folgt aus dem ersten Theile unserer Entwickelung.

Offenbar steht das Kegelschnittnetz in genauester Verbindung zu der Ebene mit ihren Punkten und Geraden, oder zu dem Involutionsnetz zweiter Stufe. Alle Sätze, welche für das eine oder andere dieser Gebilde zweiter Stufe gelten, haben ihr Analogon im Kegelschnittnetz.

§ 127. Irgend $\mu + 1$ Kegelschnitte ($\mu + 1 \leqq 5$) $K_1, K_2, K_3, \ldots K_{\mu+1}$, die nicht zu demselben Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehören, bestimmen ein Kegelschnittnetz μter Stufe, dem erstens die Kegelschnitte $K_{\mu+2}, K_{\mu+3}, K_{\mu+4}, \ldots$ des Netzes $(\mu - 1)$ter Stufe $K_2 K_3 \ldots K_{\mu+1}$ und zweitens die Büschel K_1, K_2; K_1, K_3; ... K_1, K_μ; $K_1, K_{\mu+1}$; $K_1, K_{\mu+2}$; $K_1, K_{\mu+3}$; ... angehören. Jedes Netz, welches allein aus Gruppen des Netzes μter Stufe bestimmt werden kann, mufs ganz in demselben liegen. Zwei solche Netze αter und βter Stufe haben, wenn $\alpha + \beta$ nicht kleiner als μ ist, ein Netz $(\alpha + \beta - \mu)$ter Stufe gemeinsam, also einen Kegelschnitt, falls $\alpha + \beta$ gleich μ ist. Irgend ein Punkt der Ebene kommt in den Kegelschnitten eines Netzes $(\mu - 1)$ter Stufe vor. Alle Netze $(\alpha + 1)$ter Stufe, welche von demselben Netz αter Stufe ausgehen, werden zu einem Netzbündel $(\mu - \alpha - 1)$ter Stufe gerechnet, resp. zu einem Netzbüschel, wenn $\alpha = \mu - 2$ ist. Ein jedes Netzbündel bestimmt auf allen $(\mu - \alpha - 1)$fachen Netzen, die seinen Träger nicht enthalten, collineare, resp. projectivische Gebilde.

Der Satz ist eine Übertragung der Lehrsätze 81—84 in's Gebiet der Curvennetze. Das Theorem ergiebt sich aus § 126 ganz so, wie die citirten §§ aus § 77 folgten.

§ 128. Durch irgend zwei projectivische Kegelschnittbüschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \overline{\wedge} \; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$$

und ein zwei entsprechende Kegelschnitte verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ ist eine zu diesem perspectivische Schaar unter sich projectivischer Kegelschnittbüschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \wedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \overline{\wedge} \; W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \overline{\wedge} \; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots \overline{\wedge} \ldots$$

bestimmt. Homologe Glieder ordnen sich zu projectivischen Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \overline{\wedge} \; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \overline{\wedge} \; U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots \overline{\wedge} \; U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots \overline{\wedge} \ldots$$

an, zu denen eben desshalb die Schaar perspectivisch gesetzt werden kann[32].

Der Satz ist eine Umschreibung eines Specialfalles vom § 86. Um aber ein Beispiel für die Übertragung zu geben, wollen wir den Beweis hier führen. Es mögen zuerst U_1, U_2, V_1, V_2 ein Netz dritter Stufe bestimmen. Keine zwei der Büschel U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3 werden daher einen Kegelschnitt mit einander gemeinsam haben. Das Netz zweiter Stufe $W_1 U_2 V_2$ hat also (§ 127) mit dem Büschel U_3, V_3 einen Kegelschnitt W_3 gemein. Die beiden Büschel U_2, V_2 und W_1, W_3 haben, da sie demselben Netze zweiter Stufe angehören, einen gemeinsamen Kegelschnitt W_2. Die beiden Netzbüschel

$$(W_1, W_3)(U_1 U_2 U_3 \ldots) \;\overline{\wedge}\; (W_1, W_3)(V_1 V_2 V_3 \ldots)$$

sind mit einander identisch, da die drei Paare entsprechender Kegelschnitte U_1, V_1; U_2, V_2; U_3, V_3 je mit W_1, W_3 zu demselben Netze gehören. Je zwei entsprechende Kegelschnitte U_λ und V_λ der beiden Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \overline{\wedge} \; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$$

bestimmen daher ein Büschel U_λ, V_λ, welches mit W_1, W_3 je einen Kegelschnitt W_λ gemeinsam hat. Aus dem Gegebenen ist klar, dafs von jeder Curve $U_1, V_1, W_1, Z_1 \ldots$ des Büschels U_1, V_1 nur ein Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots, \; V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots, \; W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots, \; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots, \ldots$$

ausgeht. Alle sind, da sie zu dem Netzbüschel W_1, W_2 z. B. perspectivisch sind, projectivisch. Aber auch die Leitbüschel

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots, \; U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots, \; U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots, \; U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots, \ldots$$

sind alle zu einander projectivisch, denn sie sind sämmtlich z. B. zu dem Netzbüschel U_2, V_2 perspectivisch.

Liegen $U_1 U_2 U_3 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 \ldots$ in demselben Netze zweiter Stufe, so setzen wir, wenn V_1 und U_1 nicht zusammenfallen, die beiden Büschel $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ und $V_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \mathfrak{V}_4 \mathfrak{V}_5 \ldots$ hinsichtlich einer Curve V aufserhalb des Netzes perspectivisch, so dafs also V, V_λ, $\mathfrak{V}_\lambda$ zu einem Büschel gehören. Für die Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \mathfrak{V}_4 \ldots$ gilt der aufgestellte Satz. Wenn man die Schaar projectivischer Büschel, die sie constituiren, und deren Leitbüschel von V aus auf $U_1 V_2 U_2$ projicirt, so erhält man zwei Reihen von Büscheln, die den Bedingungen des Satzes entsprechen. Es giebt aber auch in diesem Falle nur eine Schaar. Haben zuerst $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ eine Curve V entsprechend gemein, so ist sie allen anderen Büscheln mit den gegebenen gemeinsam, und diese sind also zweifellos bestimmt. Haben sie aber keine Gruppe gemeinsam, so gehört die U_2, V_2 und U_3, V_3 gemeinsame Curve X' keinem anderen Büschel U_4, V_4 an. Es mögen allgemein die Curven W_λ und W'_λ von U_2, V_2 und U_3, V_3 mit W_1 je in einem Büschel liegen. Setzt man nun

$$W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \wedge W_1 W'_2 W'_3 W'_4 \ldots \overline{\wedge} W_1 W''_2 W''_3 W''_4 \ldots,$$

so liegen W_4, W'_4, W''_4, X' in einem Büschel. Da nun U_4, V_4 X' nicht enthalten kann, so genügt allein das Büschel $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$ den gestellten Bedingungen, weil W_4, X' und U_4, V_4 nur die Curve W_4 gemeinsam haben. Falls $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ nur verschiedene Anordnungen desselben Büschels sind, kann man sich auf § 19 berufen.

Zweiter Abschnitt.

Aufstellung von Lehrsätzen über allgemeine Curven nter Ordnung. *§§ 129—138.*

§ 129. Zwei zu einander projectivische Büschel von Curven $r$ter und $(n-r)$ter Ordnung erzeugen eine Curve $n$ter Ordnung, auf der sich nämlich je zwei entsprechende Curven der beiden Büschel durchschneiden. Wenn n in die Form $2m+\varepsilon$ gesetzt wird ($\varepsilon = \{^0_1\}$), so sind m verschiedene Arten der Erzeugung von Curven $n$ter Ordnung zu unterscheiden.

Von diesen m Classen sind die beiden ersten ($r=1$ und $r=2$) mit einander identisch und umfassen alle übrigen. Jedoch kann nicht behauptet werden, dafs auch jede andere Classe alle übrigen umfafst.

§ 130. Wählt man auf einer Curve $n$ter Ordnung (K^n) einen Punkt S beliebig aus, so giebt es unendlich viele Büschel von Curven (n—1)-ter Ordnung K^{n-1}, die, projectivisch auf das Strahlbüschel S bezogen, mit ihm die Curve $n$ter Ordnung erzeugen. Die Grundpunkte eines jeden derartigen Büschels gehören sämmtlich der Curve an; man kann von ihnen im Allgemeinen um einen Punkt mehr willkürlich annehmen, als zur Bestimmung einer Curve (n—2)ter Ordnung hinreichen $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$.

Durch irgend vier Punkte der Curve, von denen keine drei in einer Geraden liegen, kann man ein Kegelschnittbüschel legen, das mit unendlich vielen auf dasselbe projectivisch bezogenen Büscheln von Curven (n—2)ter Ordnung zusammen die Curve $n$ter Ordnung erzeugt. Die Grundpunkte des letzteren Büschels liegen alle auf derselben, und man kann von ihnen im Allgemeinen um einen mehr willkürlich wählen, als zur Bestimmung einer Curve (n—3)ter Ordnung hinreichen $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$.

§ 131. Schneidet man die Curve $n$ter Ordnung durch die Strahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ eines Büschels mit dem Centrum P, so werden die so entstandenen Gruppen zu je n Punkten von Q aus durch Strahlengruppen $q_1^n, q_2^n, q_3^n, \ldots$ einer zu jenem Büschel projectivischen Involution $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges projicirt. Wenn P und Q beide aufserhalb der Curve gelegen sind, so entspricht dem Strahle PQ der $n$fach zählende QP.

Wenn P auf die Curve verlegt wird, so sinkt die Ordnung, wenn Q auf dieselbe gelangt, der Rang um eine Einheit herab. Im ersten Falle entspricht der Tangente in P eine Gruppe, in der QP vorkommt, im zweiten Falle entspricht dem Strahle PQ eine Gruppe, die aus dem (n—1)-fach zählenden Strahl QP und der Tangente in Q besteht.

Kann eine Curve durch ein beliebiges Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und eine projectivische Strahleninvolution $q_1^n q_2^n q_3^n \ldots$ $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges mit beliebigem Centrum Q erzeugt werden, so ist sie eine Curve $n$ter Ordnung nach der Definition des § 129.

§ 132. Zwei Curven $r$ter und (n—r)ter Ordnung können zusammen als Curve $n$ter Ordnung betrachtet werden.

§ 133. Zwei Curven von den Ordnungen m und n können nur dann unendlich viele Punkte mit einander gemeinsam haben, wenn entweder die eine die andere als Theil umfaſst und daneben noch eine Curve niedrigerer Ordnung als zweiten Theil enthält, oder wenn beide dieselbe Curve $r$ter Ordnung und daneben noch je eine Curve $(m-r)$ter resp. $(n-r)$ter Ordnung enthalten.

Im anderen Falle sind stets gemeinschaftliche Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens mn verschiedene, vorhanden. Der letztere Fall tritt dann immer, aber auch nur dann ein, wenn in jedem vorhandenen gemeinsamen Punkte die beiden Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen. Ist dies Merkmal bei s verschiedenen bekannten Schnittpunkten erfüllt, so sind noch andere gemeinsame Punkte vorhanden, falls s kleiner als mn ist.

§ 134. Werden zwei Gebilde von jedem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ in Gruppen zu m resp. n Punkten zerlegt, diese aber von einem besonderen Punkte Q aus durch zwei projectivische Strahleninvolutionen $m$ter resp. $n$ter Ordnung und μten resp. νten Ranges projicirt, so haben dieselben im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu - \mu\nu$ gemeinsame Punkte auſserhalb Q. Dem Strahle PQ entspricht, wie auch P gewählt ist, eine Gruppe, in der QP μfach resp. νfach vorkommt, und in der daneben noch je eine unveränderliche Tangentengruppe von $m-\mu$ resp. $n-\nu$ Strahlen vorkommt. Sind nun diese von einander verschieden, so sind unter allen Umständen auſserhalb Q gemeinsame Punkte vorhanden; unter ihnen zählt jeder Punkt einfach, in dem beide Gebilde bestimmte, aber verschiedene Tangenten zeigen.

§ 135. Irgend zwei verschiedene Curven U und V $n$ter Ordnung bestimmen ein Büschel $UVWZ \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung, dessen Curven sämmtliche Schnittpunkte von U und V mit einander gemeinsam haben. Ist S irgend ein U und V gemeinschaftlicher Punkt, und sind U und V die Erzeugnisse des Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ mit den Büscheln $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ von Curven $(n-1)$ter Ordnung, so bestimmen die Büschel $W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots$, $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$, ... der durch $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ bestimmten Schaar mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die übrigen Curven des Büschels $UVWZ \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung.

Irgend ein Punkt, der nicht beiden Curven U und V gleichzeitig angehört, bestimmt eine durch ihn gehende Curve des Büschels.

Die Geraden der Ebene treffen eine bestimmte Anordnung von Curven $U, V, W, Z, \ldots$ eines Büschels in projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung. Die Ordnung der genannten Involution sinkt um m Einheiten herab für Geraden, welche m Grundpunkte des Büschels enthalten. Zu den angegebenen Gebilden sind die Involutionen $2n$ter Ordnung projectivisch, welche das Büschel auf beliebigen Kegelschnitten ausschneidet, sowie die Tangentenbüschel in einfachen Grundpunkten, wo also U und V bestimmte, von einander verschiedene Tangenten zeigen.

Das Büschel von Curven $n$ter Ordnung wird durch Definition perspectivisch zu allen vorgenannten unter sich projectivischen Gebilden gesetzt.

Wenn unter den Grundpunkten eines Büschels U, V vier verschiedene sich finden, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so kann man die Curven des Büschels erzeugen mit Hülfe des durch sie gehenden Kegelschnittbüschels und der zu ihm projectivischen Büschel von Curven $(n-2)$ter Ordnung einer Schaar.

Zu einem Büschel gehören überhaupt diejenigen Curven K^n, welche mit einem festen und zu ihnen projectivischen Büschel von Curven K^r die Büschel von Curven K^{n-r} einer Schaar erzeugen. Das Büschel der K^n ist zu der Schaar projectivisch.

§ 136. Die Curven $n$ter Ordnung eines Büschels werden durch die Strahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ eines Büschels mit dem Centrum P in Punktgruppen zerlegt, die von Q aus durch eine Schaar zu einander projectivischer Strahleninvolutionen $n$ter Ordnung und $n$ten Ranges projicirt werden. Die Schaar ist zum Curvenbüschel projectivisch.

§ 137. Drei Curven K_1, K_2, K_3 $n$ter Ordnung constituiren ein Netz zweiter Stufe. Demselben gehören erstens die Curven $K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \ldots$ des Büschels K_2, K_3, zweitens die Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; K_1, K_4; K_1, K_5; \ldots$ vollständig an. Irgend zwei Curven des Netzes bestimmen ein ganz in ihm liegendes Büschel. Irgend zwei Büschel des Netzes haben stets eine Curve gemeinsam.

Durch irgend $\mu+1$ Curven $n$ter Ordnung $K_1, K_2, K_3, \ldots K_{\mu+1}$, die nicht einem Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören, ist ein Curvennetz μter Stufe bestimmt, dem erstens alle Curven $K_{\mu+2}, K_{\mu+3}, \ldots$ des Netzes $K_2 K_3 \ldots K_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe, zweitens die Büschel $K_1, K_2; K_1, K_3; \ldots K_1, K_\mu; K_1, K_{\mu+1}; K_1, K_{\mu+2}; \ldots$ angehören. Irgend ein Punkt gehört einem $(\mu-1)$fachen Netze des gegebenen an. Jedes aus Curven des gegebenen Netzes zu bildende Netz niedrigerer Stufe mufs ganz in ihm liegen. Zwei in letzterem enthaltene Theilnetze αter und βter Stufe haben eine Curve gemeinsam, wenn $\alpha+\beta=\mu$ ist, und ein Netz $(\alpha+\beta-\mu)$ter Stufe, wenn $\alpha+\beta>\mu$ ist. Netze gleicher Stufe können collinear bezogen werden.

Alle Netze $(\alpha+1)$ter Stufe eines μfachen Netzes, welche dasselbe Netz αter Stufe desselben enthalten, gehören zu einem Netzbündel $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe. Alle zu ihm perspectivischen Netze $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe, die mit seinem Träger keine Curve gemeinsam haben, sind zu einander collinear.

§ 138. Zwei zu einander projectivische Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung und ein zwei entsprechende Curven verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots$ bestimmen eine zu dieser perspectivische Schaar unter einander projectivischer Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \ldots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \ldots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \ldots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$$

Homologe Curven derselben liegen in projectivischen Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \ldots \barwedge U_2 V_2 W_2 Z_2 \ldots \barwedge U_3 V_3 W_3 Z_3 \ldots \barwedge U_4 V_4 W_4 Z_4 \ldots$$

angeordnet. Sie trifft Geraden und Kegelschnitte in Involutionsschaaren.

Dritter Abschnitt.

Übertragung der vorstehenden Resultate von n auf $n+1$. §§ 139—152.

Es sind alle aufgestellten Sätze mit alleiniger Ausnahme des im § 134 enthaltenen für $n=2$ und für $\mu=1$ bewiesen. Um für die durchzuführenden Inductionsschlüsse eine feste Basis zu haben, müssen wir also auch von diesem Satze den ersten Fall $(\mu=1)$ erledigen.

§ 139. Kann ein Gebilde als Erzeugnifs eines beliebigen Strahlbüschels P und einer dazu projectivischen Strahleninvolution $m$ter Ordnung mit dem Centrum Q bezeichnet werden, so mufs nothwendig bei jeder Erzeugungsweise dem Strahle PQ die Zusammenstellung aus $m-1$ festen Strahlen und dem Strahle QP entspechen. Wenn P auf die Curve fällt, wird allen Gruppen der Involution QP gemeinsam. In der übrig bleibenden Involution $(m-1)$ter Ordnung entspricht dem Strahle PQ die ihn nicht enthaltende Tangentengruppe. Zwei Curven $m$ter und $n$ter Ordnung, deren Tangentengruppen in Q keine gemeinsamen Strahlen haben, besitzen stets gemeinsame Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $m+n-1$ verschiedene. Zeigen in s $(< m+n-1)$ verschiedenen gemeinsamen Punkten beide Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten, so sind noch andere Schnittpunkte vorhanden.

Es sei P_1 ein beliebiger Punkt aufserhalb P. Zu dem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ ist hinsichtlich p'_λ ein Strahlbüschel $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3} q_{\lambda 4} \ldots$ perspectivisch, welches mit der $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ zugehörigen Involution $m$ter Ordnung eine Strahlengruppe einer Involution $(m+1)$ter Ordnung gemeinsam hat, weil die verschiedenen Strahlbüschel (q_λ) alle QP und QP_1 gemeinsam haben und daher zu einer Schaar gehören (§ 32). Alle Strahlen p'_λ sollen aber mit der Curve doch nur n Punkte gemeinsam haben; dieser Widerspruch löst sich nur dann, wenn in der PQ zugehörenden Involutionsgruppe QP vorkommt. Dann kommt QP in allen Gliedern der Involution $(m+1)$-ter Ordnung vor, und wenn wir von diesem erst künstlich hineingebrachten Bestandtheil absehen, so wird die Curve auch durch $p'_1 p'_2 p'_3 \ldots$ und eine zu ihm projectivische Involution $m$ter Ordnung erzeugt. Speciell für $P_1 Q$ wird aber allen Strahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ und folglich allen Gliedern der Involution QP_1 zugeordnet; dem einen Strahl PQ und also der Tangengruppe q^{m-1} wird jeder Strahl q zugeordnet. Dem Strahl $P_1 Q$ gehört mithin die Gruppe aus q^{m-1} und QP_1 zu. Läfst man nun P_1 auf die Curve fallen, so wird allen Gliedern der Involution QP gemeinsam sein. Sieht man von ihm ab, so bleibt eine Involution $(m-1)$ter Ordnung übrig, in der $P_1 Q$ die Gruppe q^{m-1} zugeordnet wird.

Wenn eine zweite Curve durch ein Strahlbüschel P und eine projectivische Involution Q $n$ter Ordnung erzeugt wird, so verlege man in einem Punkt der ersten Curve, der nicht zugleich der zweiten angehört,

das gemeinsame Centrum des Strahlbüschels. Wir erhalten für die erste Curve entsprechend eine projectivische Involution $(m-1)$ter Ordnung, für die andere eine solche $n$ter Ordnung; bei der ersteren Curve entspricht PQ nur die Tangentengruppe in Q, bei der zweiten aber ihre Tangentengruppe in Q, vermehrt um den Strahl QP. Sind nun beide Tangentengruppen von einander verschieden, so mufs jeder der höchstens $m+n-1$ Coincidenzstrahlen nach einem gemeinsamen Punkte beider Curven führen, und es sind solche gemeinsamen Punkte unter allen Umständen vorhanden.

Wir verschieben nun die Strahleninvolution $n$ter Ordnung zu sich selbst projectivisch unendlich wenig, halten aber die QP enthaltende Gruppe fest und irgend eine andere, die keinen der gemeinsamen Punkte enthält. Mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ erzeugen alle diese Involutionen Curven $n$ter Ordnung. Nach ihren gemeinsamen Punkten mit der Curve $m$ter Ordnung führen die Gruppen einer bestimmten Strahleninvolution $(m+n-1)$ter Ordnung; sie haben daher mit derselben $m+n-1$ verschiedene Punkte gemeinsam, die alle bei den untersuchten sich finden (§ 36a).

Man kann nun die gegebenen Curven $m$ter und $n$ter Ordnung durch ein Strahlbüschel S erzeugen, das irgend einen ihrer Schnittpunkte zum Centrum hat, und zwei Strahleninvolutionen $(m-1)$ter und $(n-1)$ter Ordnung mit dem Centrum Q. QS kommt in den Gruppen vor, die den Tangenten in S entsprechen. Sind diese verschieden, so ist QS kein Coincidenzstrahl der letzteren projectivischen Involutionen und kein Strahl der zu QS in der erwähnten Involution $(m+n-1)$ter Ordnung gehörenden Ergänzungsgruppe. Diejenige Ergänzungsgruppe, welche zu dem Nachbarstrahle von QS gehört, liegt aber der ersteren nahe, und alle ihre $m+n-2$ von einander verschiedenen Strahlen sind daher von QS endlich entfernt. Also zählen unter den gesuchten Punkten alle die einfach, in denen beide Curven von einander verschiedene Tangenten haben, und neben $s(< m+n-1)$ einfachen Schnittpunkten sind noch andere, einfache oder mehrfache, vorhanden.

§ 140—142. Von den gemeinsamen Punkten der Curven.

§ 140. Soll ein vorliegendes Gebilde mit Hülfe eines beliebigen Strahlbüschels $PQ, p_2, p_3, p_4, \ldots$ mit dem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $q_1^m, q_2^m, q_3^m, q_4^m, \ldots$ $m$ter Ordnung und μten Ranges

mit dem festen Centrum Q erzeugt werden können, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dafs letztere mit jedem projectivischen Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ $m+\mu$ Strahlen gemeinsam hat, von denen bei QP μ vereinigt sind.

Die Strahlbüschel $PQ, p_2, p_3 \ldots$ und $QP, q_2, q_3 \ldots$ erzeugen eine Gerade r. m der $m+\mu$ Coincidenzstrahlen zwischen $QP, q_2, q_3, q_3, \ldots$ und $q_1^m, q_2^m, q_3^m, q_4^m, \ldots$, projiciren die m Punkte, welche r nach der Voraussetzung allein mit der Curve gemeinsam hat; die μ übrigen müssen daher auf den Strahl QP entfallen, der allein bei der gedachten Erzeugungsweise zu dem Gebilde hinzutreten kann. Diese Bedingung ist aber, wie nothwendig, so auch hinreichend. Auf den Strahlen r_λ eines Büschels R schneidet das Büschel $PQ, PR, p_3, p_4, \ldots p_\varrho, \ldots$ Punktreihen aus, welche von Q aus durch projectivische Büschel

$$1) \qquad QP, QR, q_{\lambda 3}, q_{\lambda 4}, \ldots q_{\lambda \varrho}, \ldots$$

einer Schaar projicirt werden. Die Schaar selbst ist zu $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_\lambda \ldots$ projectivisch, weil dies mit ihren Leitbüscheln

$$2) \qquad q_{1\varrho}, q_{2\varrho}, q_{3\varrho}, q_{4\varrho} \ldots q_{\lambda\varrho} \ldots$$

der Fall ist. Wir betrachten nun ein Gebilde

$$q_{11}^{m-1}\, q_{12}^{m-1}\, q_{13}^{m-1}\, q_{14}^{m-1} \ldots$$

$(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges, das mit jedem Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ $\mu-1$ bei QP gelegene Strahlen gemeinsam hat. Mit dem speciellen Büschel $QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots q_{1\varrho}$, das mit $PQ, PR, p_3, p_4, \ldots p_\varrho, \ldots$ den Strahl r_1 erzeugt, soll es noch $m-1$ Strahlen gemeinsam haben, die nach Schnittpunkten zwischen r_1 und dem gegebenen Gebilde führen; der letzte Schnittpunkt soll mit R zusammen fallen. Nach § 119 kann dann $q_1^m q_2^m q_3^m q_4^m \ldots$ als das Erzeugnifs zweier projectivischer Schaaren

$$1) \; QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots \;\overline{\wedge}\; QP, QR, q_{23}, q_{24}, \ldots \;\overline{\wedge}\; QP, QR, q_{33}, q_{34}, \ldots$$

$$2) \; q_{11}^{m-1}, q_{12}^{m-1}, q_{13}^{m-1}, q_{14}^{m-1}, \ldots \;\overline{\wedge}\; q_{21}^{m-1}, q_{22}^{m-1}, q_{23}^{m-1}, q_{24}^{m-1}, \ldots \;\overline{\wedge}\; q_{31}^{m-1}, q_{32}^{m-1}, q_{33}^{m-1}, q_{34}^{m-1}, \ldots$$

betrachtet werden; die Gruppe q_ϱ^m ist die Coincidenzgruppe der beiden projectivischen Leitinvolutionen

$$3) \qquad q_{1\varrho}\, q_{2\varrho}\, q_{3\varrho}\, q_{4\varrho} \ldots \;\overline{\wedge}\; 4) \; q_{1\varrho}^{m-1}\, q_{2\varrho}^{m-1}\, q_{3\varrho}^{m-1}\, q_{4\varrho}^{m-1} \ldots$$

Somit gehören die drei Involutionen μten Ranges

$QPq_{11}^{m-1}, QRq_{12}^{m-1}, q_{\lambda 3}\, q_{13}^{m-1}, \ldots;\ q_1^m, q_2^m, q_3^m, \ldots;\ QPq_{\lambda 1}^{m-1}, QRq_{\lambda 2}^{m-1}, q_{13}\, q_{\lambda 3}^{m-1}, \ldots$

zu einer Schaar projectivischer Involutionen (§ 118). Sie haben daher mit einem beliebigen Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ Gruppen einer Involution $(m+\mu)$ter Ordnung gemeinsam. Da nun von den ersten beiden Gruppen μ Strahlen mit QP zusammenfallen, so mufs dasselbe bei der letzten der Fall sein. Die letztere Gruppe besteht aber aus den Coincidenzstrahlen von $QP, QR, q_{13}, q_{14}, \ldots$ mit dem Strahlbüschel $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$, unter denen ersichtlich QP vorkommt, und aus denen zwischen $QP, q_2, q_3, q_4, \ldots$ und $q_{\lambda 1}^{m-1}, q_{\lambda 2}^{m-1}, q_{\lambda 3}^{m-1}, q_{\lambda 4}^{m-1}, \ldots$, unter welchen daher QP $(\mu-1)$fach vorkommt. Man bringe nun die Gebilde $q_{\lambda 1}^{m-1} q_{\lambda 2}^{m-1} q_{\lambda 3}^{m-1} \ldots$ mit dem einen Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ zur Coincidenz. Die so entstehende Reihe von Gebilden $R_1^{m-1} R_2^{m-1} R_3^{m-1} R_4^{m-1} \ldots$ erzeugt mit dem Strahlbüschel $r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots$ zusammen die zu betrachtende Curve.

Von hier aus kann man nun den vorher eingeschlagenen Weg rückwärts machen, nachdem man statt $q_1 q_2 q_3 \ldots$ ein anderes Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ substituirt hat. Da man für die Gebilde R^{m-1} den Satz voraussetzen kann, der für den μten Rang zu erweisen ist, so kann man die R_λ^{m-1} durch ein beliebiges Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ und zu einander projectivische Involutionen $(m-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges des Centrums Q

$$s_{\lambda 1}^{m-1}\, s_{\lambda 2}^{m-1}\, s_{\lambda 3}^{m-1}\, s_{\lambda 4}^{m-1} \ldots \qquad 5)$$

erzeugen. Sie gehören zu einer Schaar projectivischer Involutionen. Irgend ein durch P und Q gelegter Kegelschnitt K trifft die Curvenreihe $R_1^{m-1} R_2^{m-1} R_3^{m-1} \ldots$ in einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Involution $(m+\mu-2)$-ter Ordnung. Diese Schnittgruppen werden nämlich ausgeschnitten durch die Coincidenzgruppen zwischen den Involutionen $q_{\lambda 1}^{m-1}\, q_{\lambda 2}^{m-1}\, q_{\lambda 3}^{m-1}\, q_{\lambda 4}^{m-1} \ldots$ und dem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$, das mit $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ zusammen K erzeugt. Geht K auch noch durch S, so sind die Gruppen auch $s_{\lambda 1}^{m-1} s_{\lambda 2}^{m-1} s_{\lambda 3}^{m-1} s_{\lambda 4}^{m-1} \ldots$ mit dem Strahlbüschel $q_1' q_2' q_3' q_4' \ldots$ gemeinsam, das zu K bezüglich $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ perspectivisch ist. Hieraus kann man folgern (vergl. § 111), dafs man es mit einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Schaar unter sich und zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ projectivischer Involutionen $(m-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges zu thun hat.

Nun erzeugt man weiter die Strahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ mit Hülfe des

Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und der perspectivischen Büschel Q einer Schaar, die mit ihren Leitbüscheln zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivisch ist. Das s_ϱ entsprechende bringt man mit der zugehörigen Leitinvolution $s_{1\varrho}^{m-1} s_{2\varrho}^{m-1} s_{3\varrho}^{m-1} \ldots$ zur Coincidenz und erhält so eine zu $s_1 s_2 s_3 \ldots$ projectivische Involution $s_1^m s_2^m s_3^m \ldots$ $m$ter Ordnung, μten Ranges, die mit jenem Strahlbüschel das vorliegende Gebilde erzeugt.

Natürlich braucht man, um diese letzteren Gruppen herzustellen, nicht den soeben angezeigten complicirten Weg einzuschlagen, vielmehr genügt es, zu s_λ die beiden Büschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ und $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3} q_{\lambda 4} \ldots$ perspectivisch zu setzen. s_λ^m besteht dann aus den m Strahlen, die $q_{\lambda 1} q_{\lambda 2} q_{\lambda 3}$ $q_{\lambda 4} \ldots$ und $q_1^m q_2^m q_3^m q_4^m \ldots$ aufserhalb QP gemeinsam haben.

Dies wird nun speciell auf SQ angewendet. Allen Strahlen p_1, p_2, $p_3, \ldots$ und mithin allen Gruppen $q_1^m, q_2^m, q_3^m, \ldots$ gehört der eine Strahl QS zu. Da nun μ Glieder der Involution QS enthalten, so zählt diese Gerade μfach in der SQ zugehörenden Gruppe. Andererseits gehört dem Strahle PQ und der ihm entsprechenden Gruppe q^m jeder Strahl q zu. q^m bildet mithin den zweiten Theil der gesuchten Gruppe. Wir haben hiervon den Strahl QP abzulösen, der in q^m jedenfalls μfach auftritt. Bei jeder beliebigen Erzeugung, von S und Q aus, gehört also SQ eine Gruppe zu, in der QS μfach vorkommt, und aufserdem eine bestimmte Gruppe von $m-\mu$ Strahlen, die von S unabhängig ist und als die Tangentengruppe in Q bezeichnet wird.

Auf ähnliche Weise, wie vorher, kann gezeigt werden, dafs die Curve durch das beliebige Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und eine projectivische Involution $t_1^m t_2^m t_3^m \ldots$ des Ranges und der Ordnung m erzeugt werden kann, wo S und T beliebig aufserhalb der Curve liegen, und in T keine Tangentengruppe stattfindet. Gelangt S resp. T auf die Curve, so sinkt Ordnung oder Rang um eine Einheit. Im letzteren Fall erhält man in T eine bestimmte Tangente, im ersteren aber eine Gerade s, der, wie immer T gewählt ist, eine Gruppe entspricht, in der TS vorkommt. Sie deckt sich mit der Tangente, welche man nach unserer Definition in S erhält, wenn man T und S vertauscht. Die Tangente in irgend einem Curvenpunkte S trifft in einem Punkte weniger die Curve aufserhalb S, als alle anderen Geraden durch S, wofern sie nicht der Curve ganz angehört. Für besondere Punkte des Gebildes kann die Ordnnug der In-

volution um ϱ Einheiten herabsinken. In diesem Falle giebt es in Q nicht eine bestimmte, sondern eine Gruppe von ϱ Tangenten.

§ 141. Sind in einer Ebene zwei Gebilde I und II gegeben, auf denen jedes Strahlbüschel der Ebene Gruppen zu m resp. n Punkten ausschneidet, die von einem bestimmten Centrum Q aus durch die Strahlengruppen zweier zu jenem projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges resp. $n$ter Ordnung und νten Ranges projicirt werden, so sind im Allgemeinen und höchstens $m\nu + n\mu - \mu\nu$ gemeinsame Punkte vorhanden, wenn es Strahlen giebt, die in m resp. n verschiedenen Punkten die beiden Gebilde treffen, beide nicht etwa einen Bestandtheil gemeinsam haben und in Q verschiedene Tangentengruppen zeigen.

Sind s verschiedene gemeinsame Punkte nachgewiesen, in deren jedem die Gebilde zwei bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen, so sind noch andere gemeinsame Punkte vorhanden, wenn s kleiner als $m\nu + n\mu - \mu\nu$ ist.

Nach § 115 giebt es nur einzelne Strahlen q, die in weniger als μ resp. ν verschiedenen Punkten den beiden Gebilden begegnen, und in jedem Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \dots$ nach § 114 nur einzelne, welche die Curven in weniger als m resp. n verschiedenen Punkten treffen. Ist ν kleiner als μ, so ergänzen wir die zweite Curve durch $\mu - \nu$ verschiedene Geraden, die weder Q, noch einen anderen gemeinsamen Punkt der beiden Curven enthalten. Die Gebilde zusammen können durch das Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \dots$ und eine projectivische Involution der Ordnung $n + \mu - \nu$ und des Ranges μ dargestellt werden. Wir legen nun durch P einen Strahl p, der in $m + n + \mu - \nu$ verschiedenen Punkten $A_1, A_2, \dots A_m$; $B_1, B_2, \dots B_n$; $B_{n+1}, \dots B_{n+\mu-\nu}$ den beiden gegebenen Curven und den $\mu - \nu$ Zusatzgeraden begegnet. Wir nehmen ferner an, was nach dem Gesagten statthaft ist, dafs die Geraden QA_λ dem Gebilde I in je μ und die Geraden QB_ϱ dem Gebilde II in je $\nu - 1$ resp. ν verschiedenen Punkten begegnen. Die Strahlen $QB_1, QB_2, \dots QB_{\nu+\mu-\nu}$ fügen wir allen Gruppen der Involution $m$ter und die Strahlen $QA_1, QA_2, \dots QA_m$ allen Gruppen der Involution $(n + \mu - \nu)$ter Ordnung hinzu. So entstehen zwei projectivische Involutionen

$$1)\ p_1^s p_2^s p_3^s \dots \quad \text{und} \quad 2)\ q_1^s q_2^s q_3^s \dots$$

der Ordnung s oder $m+n+\mu-\nu$ und des Ranges μ. Auch ihre Erzeugnisse mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ werden als Curve 1) und 2) bezeichnet. Da nun diese Involutionen eine Gruppe entsprechend gemeinsam haben, so giebt es in der durch beide bestimmten Schaar eine Involution

$$3) \qquad r_1^s r_2^s r_3^s \ldots,$$

die sich auf den Rang $\mu-1$ reducirt, und in der die p zugehörige Gruppe vollständig unbestimmt wird. Mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ erzeugt sie daher erstens die ganze Gerade p. Das Gebilde III, welches die Involution 3) $(\mu-1)$-ten Ranges mit $p_1 p_2 p_3 \ldots$ gemeinsam hat, geht durch alle gemeinsamen Punkte von 1) und 2) mit alleiniger Ausnahme der Punkte $A_1, \ldots A_m, B_1, \ldots B_{n+\mu-\nu}$ selbst. Nun haben die drei Involutionen 1), 2), 3), mit jedem zu ihnen projectivischen Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 \ldots$ die Gruppen einer Involution $(s+\mu)$ter Ordnung, ersten Ranges gemeinsam. Ist nun das Erzeugnifs der projectivischen Büschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und $q_1 q_2 q_3 \ldots$ eine Gerade, sind also QP und PQ entsprechende Geraden, so hat $q_1 q_2 q_3 \ldots$ mit den gegebenen beiden Involutionen je μ nach QP fallende Strahlen gemeinsam. Die betrachteten Punktgebilde haben daher mit jeder Geraden die Gruppen einer Involution $s$ter Ordnung gemeinsam. Also mufs sich, wenn man von der Geraden p absieht, das untersuchte Gebilde III auf die $(s-1)$te Ordnung reduciren. Die Gruppen der Involution 3) müssen sich bei der Deduction mit dem allen Gruppen gemeinsamen Strahle QP ergeben, von dem abgesehen wird.

Das ganze Curvengebilde 3) wird erhalten, wenn wir um irgend einen Punkt C desselben eine Gerade l sich drehen lassen und allemal die durch C bestimmte Gruppe der Involution $s$ter Ordnung aufsuchen, welche auf l durch die beiden Gebilde 1) und 2) bestimmt wird. Die letzteren können aber auch als die Erzeugnisse eines Strahlbüschels $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und zweier projectivischer Involutionen $s$ter Ordnung, μten Ranges

$$4) \qquad \mathfrak{p}_1^s \mathfrak{p}_2^s \mathfrak{p}_3^s \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1^s \mathfrak{q}_2^s \mathfrak{q}_3^s \ldots$$

dargestellt werden; in dieser Schaar giebt es eine Involution $\mathfrak{r}_1^s \mathfrak{r}_2^s \mathfrak{r}_3^s \ldots$, deren TC zugehörige Gruppe den Strahl QC enthält. Da alle drei Involutionen mit irgend einem Strahlbüschel $\mathfrak{q}_1' \mathfrak{q}_2' \mathfrak{q}_3' \ldots$ die Gruppen einer Involution $(s+\mu)$ter Ordnung gemeinsam haben, von denen μ Strahlen in QS vereinigt liegen, wenn $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und $\mathfrak{q}_1' \mathfrak{q}_2' \mathfrak{q}_3' \ldots$ eine Gerade l erzeugen, so

schneidet jede Gerade auf den gegebenen Gebilden 1) und 2) und dem Erzeugnifs von $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und einer dritten Involution der Schaar 4) die Gruppen einer Involution $s$ter Ordnung aus. Da sonach das Gebilde 3) mit dem Erzeugnifs von $t_1 t_2 t_3 \ldots$ und $\mathfrak{r}_1^s \mathfrak{r}_2^s \mathfrak{r}_3^s \ldots$ sich deckt, so mufs von der Involution $[\mathfrak{r}]$ als Bestandtheil das Strahlbüschel sich ablösen, welches zu p hinsichtlich $t_1 t_2 t_3 \ldots$ perspectivisch ist. Die übrig bleibende Involution $(s-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges erzeugt mit $t_1 t_2 t_3 \ldots$ die Curve III, welche sicherlich mit den gegebenen I und II alle ihre Schnittpunkte aufserhalb p gemeinsam hat. Sie geht aber auch mit der Geraden p zusammen durch alle Schnittpunkte von 1) und 2). Nun unterscheidet sich aber 1) von I um die $n+\mu-\nu$ Geraden $QB_1, QB_2, \ldots QB_n, QB_{n+1}, \ldots QB_{n+\mu-\nu}$. Diese haben insgesammt $(n+\mu-\nu)\nu$ Schnittpunkte mit II gemeinsam, welche also 3) sämmtlich enthalten mufs. Die Gerade p enthält die n Punkte $B_1, B_2, \ldots B_n$; die $(n+\mu-\nu)\nu-n$ übrigen müssen sämmtlich III und II gemeinsam sein. Setzen wir nun unseren Lehrsatz für die Gebilde II und III, die nothwendig verschiedene Tangentengruppen in Q haben, voraus, wie er für die Zahlen $\mu=1$, $\nu=1$ gilt (§ 139), so ergiebt sich für I und II höchstens folgende Anzahl gemeinsamer Punkte

$$(m+n+\mu-\nu-1)\nu+n(\mu-1)-(n+\mu-\nu)\nu+n-(\mu-1)\nu$$
$$=m\nu+n\mu-\mu\nu.$$

Um sicher zu sein, dafs im Allgemeinen diese Anzahl wirklich richtig ist, und dafs jedenfalls gemeinsame Punkte immer vorhanden sind, mufs man noch zeigen, dafs III die Punkte $B_1, B_2, \ldots B_n$ nicht enthält, in den Punkten B'_λ bestimmte andere Tangenten zeigt als II und auch da eine bestimmte Tangente haben mufs, wo I und II bestimmte, aber getrennte Tangenten hatten. In einem solchen Punkte P giebt es eine Gerade t_1, die Tangente von I, welche die Curve 1 in nur noch $s-2$ anderen Punkten trifft, während einer der gewöhnlichen $s-1$ Schnittpunkte nach P fällt. Da nun die Curve II P zum einfachen Punkt hat, und in ihm eine andere Tangente besitzt als I, so wird t_1 von 2) in $s-1$ Punkten aufserhalb P geschnitten. Die drei Gruppen, welche t_1 aufserhalb P auf 1), 2) und 3) ausschneidet, liegen aber in Involution, die letzte dieser Gruppen besteht also aus $s-1$ von P verschiedenen Punkten. Daher hat auch III oder 3) in P eine bestimmte Tangente t_3, die gleichmäfsig von

t_1 und t_2 verschieden ist. Jede Gerade, die durch einen der Punkte B_λ oder B'_μ geht, trifft, da diese Punkte aufserhalb I liegen, die Curve I in $s-1$ von B_λ oder B'_μ verschiedenen Punkten; die Curve II aber hat in jedem Punkte B_λ eine Tangente, die von p und $B_\lambda Q$ verschieden ist, weil p in den $n-1$ anderen Punkten $B_1, \ldots B_{\lambda-1}, B_{\lambda+1} \ldots B_n, B_\lambda Q$ aber $m-\nu$ bei Q vereinigten und in $\nu-1$ anderen Punkten B'_λ die Curve noch trifft. Auf dieser Tangente schneidet 2) $s-1$ Punkte aus, unter denen B_λ vorkommt; die Curve 3) trifft sie daher in einer Gruppe von $s-1$ anderen Punkten. Da B_λ auf p liegt, gehören sie sämmtlich der Curve III an, die also $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ nicht enthält. Die Curve I hat aber auch in den Punkten $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda}, \ldots$ eine bestimmte von QB'_λ, $QB'_{n+\lambda}, QB''_{n+\lambda}, \ldots$ verschiedene Tangente, welche 3 noch in je $s-1$ verschiedenen Punkten trifft, unter denen $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda} \ldots$ nicht mehr vorkommen. Einer von den je $s-1$ Punkten entfällt aber auf p. Daher hat III in allen Punkten $B'_\lambda, B'_{n+\lambda}, B''_{n+\lambda}, \ldots$ bestimmte und andere Tangenten als II. Die Tangentengruppe in Q gehört, wenn G und H die gegebenen sind, der Involution

$$GQ(B_1 B_2 \ldots B_n B_{n+1} \ldots R_{n+\mu-\nu})\ ;\ HQ(A_1 A_2 \ldots A_m)$$

an und hat daher mit $HQ(B_1 B_2 B_3 \ldots B_n)$ keine Gerade gemeinsam.

Die Involution $(s-1)$ter Ordnung und $(\mu-1)$ten Ranges, welche, damit III entsteht, auf irgend ein Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ bezogen werden mufs, kann in verschiedene Theile zerfallen, und es kann eine unveränderliche Gruppe von ϱ Strahlen q sich ablösen. Auch das Gebilde III zerfällt dann in mehrere Bestandtheile und in jene Gruppe von ϱ Geraden; unter diesen aber können $QB_1, \ldots QB_n$ nicht vorkommen, da $B_1, B_2, \ldots B_n$ III nicht angehören. Schneidet QB_1 noch in $B'_1, B''_1, \ldots B_1^{(\nu-1)}$, so liegt der Strahl QB in den Gruppen, die $PB'_1, PB''_1, \ldots PB_1^{(\nu-1)}$ zugehören. QB_1 trifft aber die $\mu-\nu$ Geraden, durch welche wir II ergänzten, noch in je einem Punkte $B_1^{(\nu)}, B_1^{(\nu+1)}, \ldots B_1^{(\mu)}$; sie liegt daher auch noch in den Gruppen, die $PB_1^{(\nu)}, PB_1^{(\nu+1)}, \ldots PB_1^{(\mu-1)}$ entsprechen. Daher können keine zwei der Bestandtheile (§ 115) der Curve III übereinstimmen. Wenn man die Geraden q ablöst, die nicht nothwendig von einander verschieden sind, so bleibt ein Gebilde übrig, welches nur von einzelnen Geraden irgend eines Büschels in weniger als $s-\varrho$ Punkten getroffen

wird. Nach einem einfachen Schnittpunkt von I und II führt entweder ein einzelner Bestandtheil oder eine einzelne der ϱ Geraden.

Für den letzteren Bestandtheil können wir voraussetzen, dafs er II in

$$(s-\varrho)\nu+n(\mu-1)-(\mu-1)\nu$$

im Allgemeinen verschiedenen Punkten trifft, unter denen die vorher genannten auszuschliefsenden $(n+\mu-\nu)\nu-n$ sich befinden. Die ϱ Geraden aber treffen die Curve in $\nu\varrho$ Punkten, die nur dann nicht alle von einander verschieden sind, wenn die Geraden entweder theilweise zusammenfallen, oder irgend eine von ihnen II berührt. Man wählt statt Q einen Punkt T aufserhalb der Curve, statt P den beliebigen Punkt S einer der Geraden. In der SQ entsprechenden Gruppe t^{m+1} kommt TQ $(n-\nu)$-fach vor und nicht öfter, weil SQ in der Tangentengruppe in Q nicht enthalten ist. Fallen von den übrigen ν Punkten mehrere bei S_λ zusammen, so entspricht bei der Erzeugung von S_λ und T aus dem Strahle $S_\lambda Q$ eine Gruppe mit weniger als $n-2$ Strahlen aufserhalb TS_λ; entweder ist daher S_λ ein mehrfacher Punkt in II, oder die Tangente der Curve II in S_λ fällt mit $S_\lambda Q$ zusammen. Nun bedenke man, dafs die ergänzten Curven 1, 2, 3, wenn S_λ in I und II ein einfacher Punkt ist, auch durch das Strahlbüschel $t_1 t_2 t_3 \dots$ und die Involutionen $(m+n+\mu-\nu-1)$ter Ordnung, $(\mu-1)$ten Ranges mit dem Centrum S_λ einer bestimmten Schaar erzeugt werden können. Da in den Involutionen zu 2) und 3) TS_λ eine Gruppe entspricht, in der $S_\lambda Q$ vorkommt, so mufs letzterer Strahl auch in der Involution zu 1) TS_λ entsprechen. Falls daher nicht I oder II S_λ zum mehrfachen Punkte hat, so müssen beide in S_λ dieselbe Tangente haben. Keinesfalls ist S_λ ein einfacher Schnittpunkt von I und II. Ebenso leicht zeigt man, dafs irgend σ der ϱ Geraden nur dann zusammenfallen, wenn alle Schnittpunkte derselben mit II nicht einfache Schnittpunkte von II und III sind. Auch in dem Falle, wo ϱ-Geraden sich ablösen, erhalten wir mithin im Allgemeinen und höchstens $m\nu+n\mu-\mu\nu$ einfache Schnittpunkte von I und II und neben $s(<m\nu+n\mu-\mu\nu)$ vorhandenen noch andere gemeinsame Punkte.

Der aufgestellte Satz ist folglich allgemein richtig, denn er gilt für $\mu=\nu=1$ (§ 139), und es kann von $(\mu-1,\nu)$ auf (μ,ν) geschlossen werden.

§ 142. Jede Curve $(n+1)$ter Ordnung ist das Erzeugnifs eines Strahlbüschels $p_1 p_1 p_3 \ldots$ mit beliebigem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \ldots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$-ten Ranges mit beliebigem Centrum Q, und umgekehrt ist ein Gebilde, für welches alle diese Erzeugungen gelten, eine Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Zwei Curven $(n+1)$ter und $m$ter Ordnung haben stets gemeinsame Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $(n+1)m$ verschiedene. Die Anzahl derselben kann über $(n+1)m$ nur hinausschreiten, wenn beide Curven eine und dieselbe Curve νter Ordnung gemeinsam haben. Sie kann unter $(n+1)m$ nur herabsinken, wenn es Punkte unter den genannten giebt, wo entweder beide dieselbe Tangente haben, oder wenigstens eine keine bestimmte Tangente zeigt. Kann man bei jedem von $s(<(n+1)m)$ gemeinsamen Punkte nachweisen, dafs beide Curven bestimmte, aber von einander verschiedene Tangenten zeigen, so haben beide Curven noch andere Punkte gemeinsam.

Die Curve K $(n+1)$ter Ordnung sei das Erzeugnifs der projectivischen Büschel

$$K_1 K_2 K_3 K_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; K_1' K_2' K_3' K_4' \ldots$$

von Curven $(m'+1)$ter und $(n-m')$ter Ordnung. Irgend eine K_λ ist das Erzeugnifs eines Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots s_\varrho$ und einer projectivischen Involution $(m'+1)$ter Ordnung und $(m'+1)$ten Ranges (§ 131).

$$1) \qquad q_{\lambda 1}^{m'+1} q_{\lambda 2}^{m'+1} q_{\lambda 3}^{m'+1} q_{\lambda 4}^{m'+1} \ldots q_{\lambda \varrho}^{m'+1}$$

Alle diese Involutionen bilden (§ 135) eine zum Büschel projectivische Schaar. Entsprechend ist K_λ' das Erzeugnifs von $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots s_\varrho$ und einer zu den vorigen concentrischen und projectivischen Strahleninvolution

$$2) \qquad q_{\lambda 1}^{n-m'} q_{\lambda 2}^{n-m'} q_{\lambda 3}^{n-m'} q_{\lambda 4}^{n-m'} \ldots q_{\lambda \varrho}^{n-m'}$$

$(n-m')$ter Ordnung und $(n-m')$ten Ranges. Für die Curve K wird dem Strahle s_ϱ die Coincidenzgruppe der entsprechenden Leitinvolutionen

$$3) \qquad q_{1\varrho}^{m'+1} q_{2\varrho}^{m'+1} q_{3\varrho}^{m'+1} q_{4\varrho}^{m'+1} \ldots \;\overline{\wedge}\; q_{1\varrho}^{n-m'} q_{2\varrho}^{n-m'} q_{3\varrho}^{n+m'} q_{4\varrho}^{n-m'} \ldots$$

zugeordnet. Daher ist (§ 118) K das Erzeugnifs des Strahlbüschels $s_1 s_2$ $s_3 \ldots s_\varrho$ und einer projectivischen Involution $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges

$$4) \qquad q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \ldots q_\varrho^{n+1} \;\overline{\wedge}\; s_1 s_2 s_3 \ldots s_\varrho$$

Umgekehrt ist ein Gebilde, für welches diese Erzeugungsweise bei beliebigen P und Q aufserhalb seiner gilt, eine Curve K^{n+1}. Denn dasselbe ist (Vergl. Beweis zu § 140) das Erzeugnifs eines beliebigen Büschels $r_1 r_2 r_3 \ldots$ und einer Curvenreihe $R_1 R_2 R_3 \ldots$. Diese R_λ werden erzeugt durch irgend ein Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und projectivische Involutionen $n$ter Ordnung, $n$ten Ranges einer zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Schaar; das Centrum S ist ebenfalls willkürlich. Wir haben es daher nach § 131 mit Curven $n$ter Ordnung und nach § 136 mit einem zu $r_1 r_2 r_3 \ldots$ projectivischen Büschel derselben zu thun. Daher ist das Gebilde eine Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Wenn zwei Curven $(m+1)$ter und $n$ter Ordnung irgend einer Geraden in $m+n+1$ von einander verschiedenen Punkten begegnen, so erfüllen die beiden Involutionen, welche mit irgend einem Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ zusammen dieselben erzeugen, die Bedingungen des § 141. Beide Curven haben daher stets Punkte, und zwar im Allgemeinen und höchstens $n(m+1)$ verschiedene, gemeinsam. Neben $s(< n(m+1))$ einfachen Schnittpunkten sind noch andere Punkte ihnen gemeinsam.

Wenn keine Gerade die Curve K^{n+1} in $n+1$ verschiedenen Punkten trifft, so mufs die Involution $q_1^{n+1} q_2^{n+1} q_3^{n+1} \ldots$ in k Involutionen der Rangzahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ zerfallen, wo

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k = n + 1$$

ist, jedes n_λ aber so oft aufgenommen ist, als die zugehörige Theilinvolution in der Involution $(n+1)$ter Ordnung vorkommt; ein Bestandtheil wenigstens kommt doppelt vor (§ 114). Da S aufserhalb des Gebildes liegt, so sind die Ordnungszahlen den Rangzahlen mindestens gleich; sie sind ihnen gleich, weil die Summe der Ordnungszahlen $n+1$ ist. Jedes Theilgebilde wird daher durch das Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und eine Involution $n_\lambda$ter Ordnung und $n_\lambda$ten Ranges erzeugt. Bei einer beliebigen Verlegung von S und Q aufserhalb der Curve können sich nun (vergl. § 140) die einzelnen Ordnungs- und Rangzahlen nicht verkleinern, die Ordnungs- und Rangzahl ihrer Gesammtheit bleibt aber ungeändert, woraus folgt, dafs K^{n+1} aus k Curven $n_1$ter, $n_2$ter, $\ldots$ $n_k$ter Ordnung sich zusammensetzt. Ebenso mufs K^m in i Curven $m_1$ter, $m_2$ter, $\ldots$ $m_i$ter Ordnung zerfallen, wenn sie jede Gerade in weniger als m verschiedenen Punkten trifft. Beide

Curven können indessen in dieser Weise zerfallen, auch wenn sie die Bedingungen des § 141 erfüllen.

Jedenfalls hat dann jeder Bestandtheil der einen mit jedem der anderen Curve gemeinsame Punkte, und es sind ihrer im Allgemeinen und höchstens

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{i} n_\lambda \cdot m_\mu = \sum_{\lambda=1}^{k} n_\lambda \sum_{\mu=1}^{i} m_\mu = (n+1)m$$

vorhanden.

Wenn beide Curven unendlich viele Punkte gemeinsam haben, so müssen sie eine und dieselbe Theilcurve enthalten.

§ 143—147. Die verschiedenen Erzeugungsweisen der Curven $(n+1)$ter Ordnung[33].

§ 143. Eine Curve $(n+1)$ter Ordnung K^{n+1}, welche das Erzeugnifs der beiden projectivischen Büschel $UVWZ\dots$ und $U'V'W'Z'\dots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung ist, entsteht zugleich aus einem Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$, dessen Centrum ein beliebiger Grundpunkt eines der beiden Büschel ist, und aus einem projectivischen Büschel $S_1 S_2 S_3 S_4 \dots$ von Curven $n$ter Ordnung.

Nach § 133 oder § 142 haben alle Curven $U_1, V_1, W_1, Z_1, \dots$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt S, und nach § 135 entstehen sie, wenn man auf das Büschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$ mit diesem Centrum die unter einander projectivischen Büschel

$$1)\qquad U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \barwedge V_1 V_2 V_3 V_4 \dots \barwedge W_1 W_2 W_3 W_4 \dots \barwedge Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$

von Curven $m$ter Ordnung einer Schaar bezieht. Das Büschel $UVWZ\dots$ ist zu deren Leitbüscheln

$$2)\qquad U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \barwedge U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \barwedge U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots \barwedge U_4 V_4 W_4 Z_4 \dots$$

projectivisch. In jedem Punkte der Curve $(n+1)$ter Ordnung schneidet sich ein Strahl s_λ mit irgend zwei zusammengehörigen Curven U_λ, U'; V_λ, V'; W_λ, W'; ... Man kann daher auf das eine Büschel $U'V'W'Z'\dots$ die sämmtlichen Büschel 2) beziehen, auf jede entstehende Curve aber

den zugehörigen Strahl des Büschels $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ Jedes Büschel von 2) aber erzeugt mit $U'V'W'Z' \ldots$ eine Curve S_λ $n$ter Ordnung.

Die so entstehenden Curven bilden (§ 135) ein zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ projectivisches Büschel $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots$, das mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die gegebene Curve erzeugt.

§ 144. Besitzt ein Büschel $UVWZ \ldots$ von Curven $(m+1)$ter Ordnung, welches mit einem projectivischen $U'V'W'Z' \ldots$ von Curven $(n-m)$-ter Ordnung eine Curve $(n+1)$ter Ordnung K erzeugt, vier getrennte Grundpunkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so kann man die Curve auch erzeugen mittels des um sie geschlungenen Kegelschnittbüschels und unendlich vieler projectivischer Büschel von Curven $(n-1)$-ter Ordnung.

Der Satz wird ganz analog wie der vorstehende bewiesen.

§ 145. Entsteht eine Curve $(n+1)$ter Ordnung aus den projectivischen Büscheln $UVWZ \ldots$ und $U'V'W'Z' \ldots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung, ist ferner K eine beliebige Curve $(n-2m-1)$-ter Ordnung $(m+1 \leqq n-m)$, ist endlich U'' eine beliebige Curve des Büschels UK, U', so kann man die gegebene Curve auch als Erzeugnifs der Curvenbüschel $UVWZ \ldots$ und $U''V''W''Z'' \ldots$ auffassen. Von den Grundpunkten des Büschels $U'V'W'Z' \ldots$ kann man auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung im Allgemeinen willkürlich einen mehr wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung hinreichen.

Nach § 132 können die Zusammenstellungen $KU, KV, KW, KZ, \ldots$ als Curven $(m-n)$ter Ordnung betrachtet werden; nach § 135 bilden sie ein zu $UVWZ \ldots$ projectivisches Büschel, denn sie werden von jeder Geraden l in einer speciellen Involution $(n-m)$ter Ordnung getroffen. In der durch die projectivischen Büschel

$$KU : KV : KW : KZ ; \ldots \;\overline{\wedge}\; U' : V' : W' ; Z' : \ldots$$

von Curven $(n-m)$ter Ordnung bestimmten Schaar (§ 138) giebt es auch ein Büschel $U''V''W''Z'' \ldots$; da nun

$$KU, U', U'' ; KV, V', V'' ; KW, W', W'' ; KZ, Z', Z'' ; \ldots$$

je zu einem Büschel gehören, so durchschneiden $U', U''; V', V''; W', W''; Z', Z''; \ldots$ sich auf den Curven $U; V; W; Z; \ldots$ Daher ist die gegebene

Curve $(n+1)$ter Ordnung auch das Erzeugnifs der projectivischen Büschel $U, V, W, Z, \ldots$ und $U'', V'', W'', Z'', \ldots$ von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$-ter Ordnung. Sämmtliche Grundpunkte von U'', V'' müssen auf der untersuchten Curve $(n+1)$ter Ordnung liegen, und U'' trifft aufserhalb U die Curve nur in Grundpunkten. Da U'' dem Büschel U', KU beliebig entnommen werden darf, so können wir einen beliebigen Punkt S_1 unter die Grundpunkte des neuen Büschels aufnehmen. Zu ihnen gehören ferner alle die Grundpunkte des alten Büschels, welche der Curve K angehören; denn da sie in U vorkommen, befinden sie sich auch in der Curve U'' des Büschels U', KU.

Das soeben erläuterte Verfahren können wir nun mehrfach anwenden. Wir legen durch S_1 die Curve K_1 $(n-2m-1)$ter Ordnung, durch S_2 aber die Curve U''' des Büschels $K_1 U, U''$. U''' bestimmt auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung eine Basis, in der S_1 und S_2 vorkommen. Jetzt legen wir durch S_1, S_2 eine Curve K_2 $(n-2m-1)$ter Ordnung und durch S_3 eine Curve $U^{(4)}$ des Büschels U''', UK_2, und haben dann ein Grundpunktsystem, in dem S_1, S_2 und S_3 vorkommen. In dieser Weise können wir λ beliebige Punkte $S_1, S_2, \ldots S_\lambda$ in die Basis des zweiten Büschels aufnehmen, wofern $S_1, S_2, \ldots S_{\lambda-1}$ sich in eine solche aufnehmen lassen, zugleich aber auf eine Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung gereiht werden können, die S_λ nicht enthält. λ kann also um 1 gröfser sein als die gröfste Zahl der Punkte, durch die man eine Curve $(n-2m-1)$-ter Ordnung legen kann. Gewisse extreme Zusammenstellungen sind aber deswegen ausgeschlossen, weil die Curve U' nicht in U und eine Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung zerfallen darf.

§ 146. Ist $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ ein Strahlbüschel mit einem beliebigen Curvenpunkt S als Centrum, so ist die Curve das Erzeugnifs von $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ und unendlich vielen projectivischen Büscheln aus Curven $n$ter Ordnung. Von den Grundpunkten eines solchen Büschels kann man im Allgemeinen willkürlich auf der Curve $(n+1)$ter Ordnung einen mehr wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-1)$ter Ordnung hinreichen.

Da wir S in die Basis des Büschels U^{n-m}, V^{n-m} verlegen können, das mit U^{m+1}, V^{m+1} zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt, so erhalten wir nach § 143 zuerst ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung,

welches mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt. Daraus aber ergeben sich nach § 145 unendlich viele andere.

§ 147. Sind A_1, A_2, A_3, A_4 vier beliebige Punkte einer Curve $(n+1)$ter Ordnung, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, so kann die Curve $(n+1)$ter Ordnung auf unendlich viele Weise mittels des um sie geschlossenen Kegelschnittbüschels und eines zu ihm projectivischen Büschels von Curven $(n-1)$ter Ordnung erzeugt werden $\{n+1 \geqq 3\}$.

Bei einer Curve dritter Ordnung legen wir durch die vier Punkte einen Kegelschnitt, der sie noch in 2. 3—4 oder 2 Punkten trifft. Ihre Verbindungslinie treffe die Curve noch in S. Nach § 146 kann die Curve durch das Strahlbüschel $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ und ein Kegelschnittbüschel erzeugt werden, von dessen Grundpunkten man drei willkürlich, also auch mit A_1, A_2, A_3 zusammenfallend, wählen kann. Da nun s zwei Punkte auf der Curve bestimmt, die einem Kegelschnitt des Büschels angehören, so ist A_4 der vierte Grundpunkt des Büschels.

Ist $n+1$ gröfser als 3, so kann man A_1, A_2, A_3, A_4 unter die Grundpunkte des Büschels von Curven $n$ter Ordnung aufnehmen, das mit einem beliebigen Strahlbüschel (S) zusammen die Curve $(n+1)$ter Ordnung erzeugt. Dann ergiebt sich aus § 144 sofort eine Erzeugungsweise nach Art des Satzes, und daraus fliefsen nach § 145 unendlich viele andere ab.

§ 148. Zwei beliebige Curven U^{n+1} und V^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung bestimmen ein Büschel, dessen Curven $W^{n+1}, Z^{n+1}, X^{n+1}, Y^{n+1}, \ldots$ durch sämmtliche gemeinsame Punkte der ersteren beiden hindurchgehen. Irgend ein U^{n+1} und V^{n+1} nicht gemeinsamer Punkt bestimmt eine Curve des Büschels. Die Curven desselben bestimmen auf allen Geraden Involutionen $(n+1)$ter Ordnung, auf allen Kegelschnitten Involutionen $2(n+1)$-ter Ordnung. Alle diese Reihen sind zu einander und zu den Tangentenbüscheln in einfachen Grundpunkten projectivisch. Zu ihnen allen wird das Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung projectivisch gesetzt.

Ist S ein Grundpunkt des Büschels, und sind $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots$ und $V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots$ die Büschel von Curven $n$ter Ordnung, die mit $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$

zusammen U^{n+1} und V^{n+1} erzeugen, so entstehen die Glieder des Büschels aus dem Strahlbüschel und den Büscheln einer Schaar

$$U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, \quad V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, \quad W_1^n W_2^n W_3^n W_4^n \ldots, \quad Z_1^n Z_2^n Z_3^n Z_4^n \ldots,$$
$$X_1^n X_2^n X_3^n X_4^n \ldots, \quad Y_1^n Y_2^n Y_3^n Y_4^n \ldots, \ldots$$

Das Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung ist zu den Leitbüscheln

$$U_1^n V_1^n W_1^n Z_1^n \ldots, \quad U_2^n V_2^n W_2^n Z_2^n \ldots, \quad U_3^n V_3^n W_3^n Z_3^n \ldots, \ldots$$

projectivisch.

Sind A_1, A_2, A_3, A_4 vier Grundpunkte des Büschels, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und erzeugen mit dem um sie geschlungenen Kegelschnittbüschel die projectivischen Büschel $U_1^{n-1} U_2^{n-1} U_3^{n-1} U_4^{n-1} \ldots$ und $V_1^{n-1} V_2^{n-1} V_3^{n-1} V_4^{n-1} \ldots$ von Curven $(n-1)$ter Ordnung die beiden gegebenen Curven, so erzeugen die übrigen Büschel der durch $U_1^{n-1} U_2^{n-1} U_3^{n-1} U_4^{n-1} \ldots$ und $V_1^{n-1} V_2^{n-1} V_3^{n-1} V_4^{n-1} \ldots$ bestimmten Schaar mit dem Kegelschnittbüschel die übrigen Curven des Büschels.

Überhaupt bilden die Curven $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1} \ldots$ ein Büschel, die durch ein festes Büschel $S_1^m S_2^m S_3^m S_4^m \ldots$ von Curven $m$ter Ordnung und durch die projectivischen Büschel

$$U_1^{n-m+1} U_2^{n-m+1} U_3^{n-m+1} \ldots : V_1^{n-m+1} V_2^{n-m+1} V_3^{n-m+1} \ldots : \ldots$$

von Curven $(n-m+1)$ter Ordnung einer Schaar erzeugt werden[34].

Das Strahlbüschel (S) bestimmt auf allen Geraden projectivische Punktreihen, die Schaar der Büschel von Curven $n$ter Ordnung aber schneidet alle Geraden in projectivischen Schaaren projectivischer Involutionen

$$1) \quad u_1 u_2 u_3 u_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; v_1 v_2 v_3 v_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; w_1 w_2 w_3 w_4 \ldots \;\overline{\wedge}\; z_1 z_2 z_3 s_4 \ldots$$

Die Involutionen selbst sind zu $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, \ldots$ die Leitinvolutionen aber zu den Leitbüscheln $U_1^n V_1^n W_1^n Z_1^n \ldots, U_2^n V_2^n W_2^n Z_2^n \ldots, \ldots$ projectivisch. Nach § 74 hat die Punktreihe, in welcher $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ die Gerade trifft, mit den Involutionen 1) die Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung gemeinsam. Sie ergiebt sich in projectivischer Anordnung zu den Leitinvolutionen $u_\lambda v_\lambda w_\lambda z_\lambda \ldots$ und also auch zu den Leitbüscheln $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \ldots$

Auf allen Kegelschnitten bestimmt $s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots$ eine projectivische Involution 2ter Ordnung, $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \ldots, V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \ldots, W_1^n W_2^n W_3^n W_4^n \ldots, \ldots$ aber bestimmen die Involutionen $2n$ter Ordnung (§ 135) einer

Schaar. Die zu ihnen projectivische Involution zweiter Ordnung hat mit ihnen die Gruppen einer Involution $(2n+2)$ter Ordnung gemeinsam, welche zu $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \dots$ projectivisch ist.

Ein U^{n+1} und V^{n+1} gemeinsamer Punkt gehört einem Strahle s_λ und den beiden ihm zugehörigen Curven U_λ^n und V_λ^n gleichzeitig an. Da er dann allen Curven $U_\lambda^n, V_\lambda^n, W_\lambda^n, Z_\lambda^n, \dots$ des durch erstere Curven bestimmten Leitbüschels angehört, so ist er allen Curven des untersuchten Büschels gemeinsam. Ein von den Grundpunkten verschiedener Punkt S gehört nur einer Curve des Büschels an. Denn eine ihn enthaltende Gerade s schneidet die Curven des Büschels in Gruppen einer Involution $(n+1)$ter Ordnung. Von derselben ist durch S eine Gruppe eindeutig bestimmt. Dieselbe durchläuft die einzige S enthaltende Curve des Büschels, wenn wir s um S drehen.

Da sonach es ganz gleichgültig ist, wie ursprünglich die zu $s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$ gehörenden Büschel $U_1^n U_2^n U_3^n U_4^n \dots$, $V_1^n V_2^n V_3^n V_4^n \dots$ gewählt wurden, so kann man einen Grundpunkt P den beiden Büscheln angehören lassen; es sei $U_\lambda^n V_\lambda^n W_\lambda^n Z_\lambda^n \dots$ das SP entsprechende Leitbüschel. Wenn P ein einfacher Grundpunkt ist, so zeigt dasselbe in P das Tangentenbüschel von $U^{n+1} V^{n+1} W^{n+1} Z^{n+1} \dots$ Dieses ist mithin zu allen Involutionen projectivisch, die zum Curvenbüschel perspectivisch sind.

Dafs überhaupt durch ein festes Büschel von Curven $m$ter Ordnung und eine Schaar projectivischer Büschel von Curven $(n+1-m)$-ter Ordnung ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung erzeugt wird, folgt sofort aus § 74. Dasselbe fällt projectivisch zu den Leitbüscheln der Schaar aus.

§ 149. Zwei Curven $m$ter Ordnung und $(n-m+1)$ter Ordnung können zusammen als eine Curve $(n+1)$ter Ordnung behandelt werden.

U^m und U^{n-m+1} seien die gegebenen Curven, V^m und V^{n-m+1} aber irgend zwei andere Curven $m$ter und $(n-m+1)$ter Ordnung. Wir betrachten dann die Erzeugnisse U^{n+1} und V^{n+1} der beiden Paare projectivischer Büschel

$$U^m V^m W^m Z^m \dots \;\overline{\wedge}\; V^{n-m+1} U^{n-m+1} W^{n-m+1} Z^{n-m+1} \dots$$
$$U^m V^m W^m Z^m \dots \;\overline{\wedge}\; V^{n-m+1} U^{n-m+1} W_1^{n-m+1} Z_1^{n-m+1} \dots$$

Auf irgend einer Geraden bestimmen die beiden Curven Gruppen, welche

mit der von U^m und U^{n-m+1} ausgeschnittenen Gruppe aus $n+1$ Punkten zu einer Involution gehören. Ist nun S irgend ein U^m und V^m gemeinsamer Punkt, so können U^{n+1} und V^{n+1} mit Hülfe des Strahlbüschels $s_1 s_2 s_3 \ldots$ und zweier projectivischer Büschel von Curven $n$ter Ordnung erzeugt werden. Diese Büschel constituiren eine Schaar, von der ein bestimmtes Büschel mit $s_1 s_2 s_3 \ldots$ die besondere Curve W^{n+1} des Büschels U^{n+1}, V^{n+1} erzeugt, welche durch irgend einen Punkt P von U^m bestimmt wird. Jede Gerade trifft aber $U^{n+1}, V^{n+1}, W^{n+1}, \ldots$ in drei Gruppen derselben Involution; daher zerfällt W^{n+1} in die beiden gegebenen Curven U^m und U^{n+1-m}.

§ 150. Ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung wird durch irgend ein Strahlbüschel $p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots$ und die zu ihm projectivischen Involutionen $q_{\lambda 1}^{n+1} q_{\lambda 2}^{n+1} q_{\lambda 3}^{n+1} q_{\lambda 4}^{n+1} \ldots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges einer zum Büschel projectivischen Schaar erzeugt.

Nach § 142 haben wir es mit projectivischen Involutionen $q_{\lambda 1}^{n+1} q_{\lambda 2}^{n+1} q_{\lambda 3}^{n+1} q_{\lambda 4}^{n+1} \ldots$ $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges zu thun. Nun hat aber das Büschel mit jedem P und Q enthaltenden Kegelschnitt die Gruppen einer Involution $(2n+2)$ter Ordnung gemeinsam. Da folglich mit jedem Strahlbüschel $q_1 q_2 q_3 q_4 \ldots$, welches zu ihnen allen projectivisch ist, die Involutionen $(n+1)$ten Ranges die Gruppen einer Involution $2(n+1)$ter Ordnung gemeinsam haben, so bilden sie nach § 110 eine Schaar. Da ihre Leitinvolutionen diejenigen Punktinvolutionen projiciren, welche das Büschel auf $p_1, p_2, p_3, \ldots$ fixirt, so ist die Schaar zum Büschel projectivisch.

§ 151. Durch irgend drei Curven $(n+1)$ter Ordnung K_1, K_2, K_3 ist ein Netz bestimmt, dem erstens die Curven $K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, \ldots$ des Büschels K_2, K_3 angehören, und ferner die Büschel, welche dieselben mit K_1 verbinden. Das durch irgend zwei Curven des Netzes bestimmte Büschel gehört demselben ganz an; irgend zwei Büschel des Netzes haben eine Curve gemeinsam.

Der Nachweis wird ganz analog geführt, wie der entsprechende bei Kegelschnitten sich ergab. Irgend ein Büschel K_l', K_m' hat mit K_l, K_m eine Curve K gemeinsam. Sie bildet zusammen mit K_1 das Erzeug-

nifs der Curvenbüschel $K_1 K_l K'_l \dots$ und $K_1 K_m K'_n \dots$ Dafs dieser zweite Theil des Erzeugnisses eben eine Curve ist, die K_l, K_m und K'_l, K'_m zugleich angehört, folgt aus § 71. Hieraus kann dann aber, wie es bei Kegelschnitten geschieht, leicht abgeleitet werden, dafs irgend zwei Büschel eine Curve des Netzes gemeinsam haben, und dafs irgend zwei Curven ein ganz im Netze enthaltendes Büschel bestimmen.

Anmerkung. Die Definition, welche uns (§ 81) auf die allgemeinen Involutionsnetze führte, kann ganz ebenso zur Herstellung von Curvennetzen höherer Stufe benutzt werden; von ihnen gelten dieselben Lehrsätze, die wir bei den Involutionsnetzen als richtig erkannten.

§ 152. Zwei zu einander projectivische Büschel $U_1 U_2 U_3 U_4 \dots$ und $V_1 V_2 V_3 V_4 \dots$ und ein drittes zwei entsprechende Curven verbindendes Büschel $U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots$ von Curven $(n+1)$ter Ordnung bestimmen eine zu diesem perspectivische Schaar zu jenen projectivischer Büschel

$$U_1 U_2 U_3 U_4 \dots \;\overline{\wedge}\; V_1 V_2 V_3 V_4 \dots \;\overline{\wedge}\; W_1 W_2 W_3 W_4 \dots \;\overline{\wedge}\; Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \dots$$

Homologe Curven liegen in Leitbüscheln

$$U_1 V_1 W_1 Z_1 \dots \;\overline{\wedge}\; U_2 V_2 W_2 Z_2 \dots \;\overline{\wedge}\; U_3 V_3 W_3 Z_3 \dots \;\overline{\wedge}\; U_4 V_4 W_4 Z_4 \dots$$

angeordnet, die zu einander projectivisch sind. Irgend eine Gerade wird von den Curven in einer Schaar projectivischer Involutionen $(n+1)$ter Ordnung, ein Kegelschnitt aber in einer Schaar projectivischer Involutionen $(2n+2)$ter Ordnung getroffen.

Die Überlegung, mit deren Hülfe wir den entsprechenden Lehrsatz über Kegelschnitte bewiesen haben, ist hinreichend allgemein gehalten, um zugleich auch für diesen allgemeineren Fall zu genügen, um darzuthun, dafs durch zwei gegebene projectivische Büschel ein Gebilde unserer Art bestimmt wird.

Dafs die beiden gegebenen Büschel $(n+1)$ter Ordnung nur eine Schaar bestimmen können, zeigt man entweder ebenfalls mit Hülfe der Methode, die wir im § 128 angewendet hatten, oder man benutzt, dafs jede Gerade sowohl jedem Leitbüschel, als auch jedem Büschel der Schaar selbst in je einer Involution $(n+1)$ter Ordnung begegnen mufs. Da die letzteren Involutionen somit zu einer Involutionsschaar gehören, diese aber durch zwei Involutionen eindeutig bestimmt ist, so sind auch durch

zwei Büschel alle übrigen der Schaar angehörigen Büschel eindeutig bestimmt.

Nunmehr sind alle im vorigen Abschnitt angegebenen Resultate von n auf $n+1$ übertragen und zwar finden sich die §§ 129—138 in dieser Art bewiesen in den folgenden §§: 143, 146, 147, 142, 149, 142, 141, 148, 150, 151 und 152.

Von hier aus ist die Möglichkeit des Fortschreitens z. B. in nachstehender Art gegeben. Curvennetze können collinear auf andere gleicher Stufe, aber auch auf Involutionsnetze μter Stufe bezogen werden. Den Involutionen μten Ranges, welche in dem letzteren sich vorfinden, entsprechen in dem Curvennetz Reihen, die sich projectivisch auf einförmige Gebilde beziehen lassen, sich zu Schaaren zusammenschliefsen lassen, u. s. w. Das auszeichnende Merkmal einer solchen Curvenreihe ist, dafs durch irgend einen Punkt der Ebene μ verschiedene Curven hindurchgehen, weshalb sie auch als ein Curvenbüschel vom μten Range bezeichnet werden kann. Von grofser Wichtigkeit werden diese Gebilde besonders für die Flächentheorie; eine Fläche $n$ter Ordnung wird nämlich von irgend einem Ebenenbüschel in Curven $n$ter Ordnung getroffen, die von jedem beliebigen Punkte Q aus durch ein projectivisches Büschel $n$ten Ranges aus Kegeln $n$ter Ordnung projicirt werden. Indessen würde die nähere Discussion dieser Gebilde über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen.

Vierter Abschnitt.

Aufstellung einer zweiten Reihe von Lehrsätzen über Curven $n$ter Ordnung. §§ 153—160.

§ 153. Wenn von den pn von einander verschiedenen gemeinschaftlichen Punkten zweier Curven $p$ter und $n$ter Ordnung ns auf einer Curve $s$ter Ordnung gelegen sind, so ist durch die übrigen $(p-s)n$ Schnittpunkte eine Curve $(p-s)$ter Ordnung möglich. Hierbei nehme man p und s beliebig grofs, p aber gröfser als s.

Wenn von den p^2 verschiedenen Schnittpunkten zweier Curven $p$ter Ordnung pn auf einer Curve $n$ter Ordnung liegen, so befinden sich die $(p-n)p$ übrigen auf einer Curve $(p-n)$ter Ordnung.

§ 154. Durch $\frac{n(n+3)}{2}$ beliebige Punkte einer Ebene kann man stets eine, durch $\frac{n(n+3)}{2}-1$ willkürliche von ihnen stets unendlich viele Curven $n$ter Ordnung legen; schneiden sich irgend zwei unter den letzteren Curven in noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ von einander verschiedenen Punkten, welche nicht auf derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung gelegen sind, so müssen alle Curven, die durch die $\frac{n(n+3)}{2}-1$ ersteren Punkte hindurchgehen, auch die letzteren nothwendigen Punkte enthalten. Alle diese Curven bilden ein Büschel, und ein letzter hinzugefügter Punkt bestimmt eine Curve desselben, wenn er von den nothwendigen verschieden ist.

Auf jeder nicht zerfallenden Curve $n$ter Ordnung kann man $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte finden, durch welche nur sie allein sich legen läfst.

§ 155. Befinden sich unter den pn verschiedenen Punkten $(p>n)$, welche den vollständigen Durchschnitt zweier Curven K^p und K^n der Ordnungen p und n bilden, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nicht auf einer Curve $(n-2)$ter Ordnung gelegene, so müssen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $np-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ übrigen Punkte enthalten, auch durch jene letzteren nothwendigen Punkte gehen[35].

§ 156. Sind $\frac{(m+n-p-1)(m+n-p-2)}{2}$ von den $m.n$ Schnittpunkten einer K^m mit einer K^n nicht auf einer $K^{m+n-p-3}$ gelegen, und ist $m+n-3>p>m>n$, so gehen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $mn-\frac{(m+n-p-1)(m+n-p-2)}{2}$ übrigen Punkte enthalten, auch durch die ausgesonderten Punkte hindurch[36].

Auf diese Sätze werden wir uns in dem nächsten Abschnitte stützen. Wir fügen hier jedoch auch die Sätze bei, welche wir über die Polaren entwickeln werden, ohne von n auf $n+1$ zu schliefsen.

§ 157. Die Tangenten, welche von einem Punkt P aus an eine Curve K^n $n$ter Ordnung sich legen lassen, haben ihre Berührungspunkte

auf einer Curve P^{n-1} der Ordnung $n-1$. Dieselbe kann definirt werden als Ort der Doppelpunkte aller der Involutionen, die auf von P ausgehenden Strahlen p durch ihre Schnittgruppe mit der K^n und den $n$fach zählenden Punkt P bestimmt werden. Zu dieser ersten Polare P^n findet man eine zweite, dritte, endlich eine $(n-1)$te. In der Reihe P^{n-1} $P^{n-2} P^{n-3} \ldots P^1$ steht alsdann jede folgende Curve zur vorhergehenden in demselben Verhältnifs, wie P^{n-1} zu K^n; die vorletzte Polare ist ein Kegelschnitt, die letzte aber eine Gerade.

§ 158. Nimmt man bezüglich irgend eines Punktes P die erste Polare P^{n-1} und bezüglich irgend eines Punktes Q derselben die Polargerade Q^1, so geht die letztere durch den Punkt P.

§ 159. Die μten Polaren, welche den Punkten einer Punktreihe hinsichtlich einer festen K^n entsprechen, bilden ein zu ihr projectivisches Büschel, den Punkten der Ebene entsprechen die Curven eines zu ihr collinearen Netzes.

§ 160. Die μten Polaren eines festen Punktes, bezüglich der Curven eines Netzes genommen, bilden ein zu diesem collineares Netz, diejenigen eines Büschels also ein projectivisches Büschel[37].

Fünfter Abschnitt.

Erweisung der vorstehenden Lehrsätze für Curven $(n+1)$ter Ordnung. §§ 161—172.

§ 161. Läfst man eine Gerade p sich um einen beliebigen Punkt P drehen, und sucht man in jeder Lage die Doppelpunkte der Involution auf, welche in P einen $(n+1)$fachen Punkt hat, und von der eine zweite Gruppe stets p mit K^{n+1} gemeinsam ist, so erhält man eine Curve P^n $n$ter Ordnung, welche als Polare von P hinsichtlich K^{n+1} bezeichnet wird und die Berührungspunkte aller Tangenten enthält, die sich von P aus an die Curve legen lassen.

Wir nehmen an, dafs die Curve nicht in Theile zerfällt, von denen einzelne übereinstimmen. P sei das Centrum, und eine Gerade q,

die K^{n+1} in $n+1$ verschiedenen Punkten trifft, die Axe zweier perspectivisch-collinearer Systeme. Dabei entsteht aus der ersten eine zweite Curve $\mathfrak{K}^{n+1}$ $(n+1)$ter Ordnung, die aufser den $n+1$ auf q gelegenen Punkten noch $n(n+1)$ andere mit der ersteren gemein hat. Sie müssen auf einer Curve $n$ter Ordnung liegen. Ist nämlich Q irgend einer der auf q gelegenen Punkte, und Q^n irgend eine durch die anderen n gehende Curve $n$ter Ordnung, so kann K^{n+1} als Erzeugnifs der Curvenbüschel $Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots$ und $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ dargestellt werden, $\mathfrak{K}^{n+1}$ aber als dasjenige zweier Büschel $Q^n \mathfrak{Q}_1^n \mathfrak{Q}_2^n \mathfrak{Q}_3^n \ldots$ und $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ Jedenfalls kann jede Curve (§ 146) mit Hülfe von $q q_1 q_2 q_3 \ldots$ und eines projectivischen Büschels $K^n K_1^n K_2^n K_3^n \ldots$ von Curven $n$ter Ordnung hergestellt werden. q wird dabei eine Curve K^n zugeordnet, die sich mit Q^n auf q schneidet. In dem Büschel, das beide constituiren, kommt q (§ 153) zusammen mit einer Curve K^{n-1} $(n-1)$ter Ordnung vor; also ist nach § 145 die angenommene Entstehungsweise gesichert. Die beiden Büschel $Q^n \mathfrak{Q}_1^n \mathfrak{Q}_2^n \mathfrak{Q}_3^n \ldots$ und $Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots$ erzeugen aber aufser Q^n noch eine Curve $\mathfrak{P}^n$ $n$ter Ordnung, welche mit q zusammen eine Curve des durch K^{n+1} und $\mathfrak{K}^{n+1}$ bestimmten Büschels bildet. Da q und $\mathfrak{P}^n$ zusammen eine Gruppe der Involution ausschneiden, welche auf p durch K^{n+1} und $\mathfrak{K}^{n+1}$ bestimmt wird, diese beiden Gruppen aber einander in zwei Punktreihen entsprechen, von denen P und (pq) die Doppelpunkte sind, so nähern sich an der Grenze die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}^n$ den Doppelpunkten der Involution, von der P ein $(n+1)$facher Punkt und (pK^{n+1}) eine Gruppe ist (§ 53). Dem zweifellos eindeutig bestimmten Orte P^n dieser Doppelpunktsgruppen kann man also eine Curve $n$ter Ordnung $\mathfrak{P}^n$ so weit nähern, als man nur immer will. Daher ist P^n selbst eine Curve $n$ter Ordnung. Wenn nun in der Schnittgruppe zwischen p und K^{n+1} ein mehrfacher Punkt vorkommt, so gehört er nach der Bedeutung von P^n auch dieser Curve an. Entweder giebt es alsdann in den genannten Punkten überhaupt keine bestimmte Tangente, oder dieselbe führt nach P. Die Anzahl der Tangenten, die von P aus an die Curve K^{n+1} gehen, ist also im Allgemeinen und höchstens $n(n+1)$.

§ 162. Nimmt man hinsichtlich eines Punktes P die Polaren P_1^n, $P_2^n, P_3^n, P_4^n, \ldots$ in Bezug auf die Curven $K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, K_4^{n+1}, \ldots$

eines Büschels von Curven $(n+1)$ter Ordnung, so erhält man ein zu dem gegebenen projectivisches Büschel. Dasselbe gilt dann von den zweiten, dritten, vierten, endlich $n$ten Polaren. Die letzteren bilden ein zum Curvenbüschel projectivisches Strahlbüschel.

Bei der betrachteten Collineation entspricht dem Curvenbüschel $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ ein projectivisches $\mathfrak{K}_1^{n+1} \mathfrak{K}_2^{n+1} \mathfrak{K}_3^{n+1} \ldots$ Dem Erzeugniſs derselben gehört q vollständig an. Wir können dasselbe aber auch herstellen mit Hülfe eines der Büschel und irgend eines anderen, welches zu ihrer Schaar gehört. Ein beliebiger Punkt des Erzeugnisses, also auch von q, kann unter die Grundpunkte eines solchen Büschels aufgenommen werden (§ 145). Ein solcher Punkt bestimmt aber in den Leitbüscheln $\mathfrak{K}_1^{n+1}, K_1^{n+1}; \mathfrak{K}_2^{n+1}, K_2^{n+1}; \mathfrak{K}_3^{n+1}, K_3^{n+1}; \ldots$ die Curven $q\mathfrak{P}_1^n; q\mathfrak{P}_2^n; q\mathfrak{P}_3^n; \ldots$ Daher bilden die Curven $\mathfrak{P}_1^n, \mathfrak{P}_2^n, \mathfrak{P}_3^n, \ldots$ eine Gesammtheit, die von jeder Geraden in einer zu $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ projectischen Involution $n$ter Ordnung geschnitten wird. Sie bilden mithin (§ 148) ein zu $K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ projectivisches Büschel, und dasselbe ist mit den $P_1^n, P_2^n, P_3^n, \ldots$ der Fall, denen sie sich, immer im Büschel liegend, an der Grenze nähern.

§ 163. Wenn in einem Büschel von Curven K^{n+1} ein Glied aus $n+1$ von P ausgehenden Strahlen besteht, so haben alle Curven desselben eine und dieselbe Polare P^n hinsichtlich P.

Denn bei der Collineation entspricht jede Gerade p, also auch die aus $n+1$ solchen Geraden bestehende Curve, sich selbst. Daher erzeugen die Büschel

$$K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} K_4^{n+1} \ldots \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{K}_1^{n+1} \mathfrak{K}_2^{n+1} \mathfrak{K}_3^{n+1} \mathfrak{K}_4^{n+1} \ldots$$

in diesem Falle eine Curve $(n+1)$ter Ordnung (§ 151), welche die Gerade q als Theil enthält und den Büscheln $K_1^{n+1}, \mathfrak{K}_1^{n+1}; K_2^{n+1}, \mathfrak{K}_2^{n+1}; K_3^{n+1}, \mathfrak{K}_3^{n+1}; \ldots$ gleichzeitig angehört. Ihr zweiter Bestandtheil $\mathfrak{P}^n$ geht an der Grenze in die erste Polare aller Curven $K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, \ldots$ über.

§ 164. Wenn der Punkt Q auf der ersten Polare P^n eines beliebigen Punktes P hinsichtlich K^{n+1} sich befindet, so geht seine Polargerade hinsichtlich derselben Curve durch P.

Man lege durch P $n+1$ verschiedene Geraden $p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$; auf einer beliebigen durch Q gehenden Geraden q sollen dieselben mit K^{n+1}

eine Involution $(n+1)$ter Ordnung bestimmen, in der Q zu einer regulären Gruppe gehört, was offenbar angängig ist, sobald Q aufserhalb der betrachteten Curve liegt. In Bezug auf alle Curven des Büschels, zu dem K^{n+1} und die $n+1$ Geraden gehören, hat P dieselbe erste Polare, auf der auch Q liegt. Die durch Q gehende Curve des Büschels hat Q zum einfachen Punkte und daher hier die Tangente QP. Hinsichtlich der $n+1$ Strahlen ist die erste Polare nichts anderes als die Gruppe der n Doppelstrahlen der Involution aus dem $(n+1)$fachen Strahle PQ und der gegebenen Gruppe $p_1 p_2 \ldots p_{n+1}$. Die zweite Polare besteht aus $n-1$ P enthaltenden Geraden, endlich die $n$te aus einer von P ausgehenden Geraden. Alle Polargeraden bilden aber ein Strahlbüschel. Das Centrum desselben mufs Q sein, weil diesen Punkt zwei verschiedene und damit alle Polargeraden enthalten.

§ 165. Nimmt man hinsichtlich der Punkte $P, Q, R, S, \ldots$ einer Geraden l die ersten Polaren in Bezug auf eine feste Curve K^{n+1}, so erhält man ein zu der gegebenen Punktreihe projectivisches Büschel $P^n Q^n R^n S^n \ldots$

Nur die Punkte, in denen P^n und Q^n sich schneiden, ergeben die Polargerade l. Damit nämlich die Polargerade eines Punktes durch P geht, mufs er P^n, damit sie durch Q geht, Q^n angehören. l gehört als Polargerade den Schnittpunkten von P^n und Q^n, aber ebenso denjenigen von P^n und R^n, von P^n und $S^n, \ldots$ zu. Folglich haben $P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots$ alle dieselben Punkte mit einander gemein und müssen zu demselben Büschel gehören, wenn P^n und Q^n in n^2 verschiedenen Punkten sich treffen. Das dann entstehende Büschel ist projectivisch zu der Punktreihe $PQRS\ldots$ P^n z. B. schneidet die Gerade l in der Doppelpunktsgruppe der Involution, welche die feste Gruppe AA_1A_2 enthält, in der K^{n+1} und l sich treffen, überdies aber bei P einen $(n+1)$fachen Punkt besitzt. P haben wir in $Q, R, S, \ldots$ übergehen zu lassen. Die fragliche Gruppe gehört der Involution $AA_1; A_2\mathfrak{D}$ an (§ 53), wo $\mathfrak{D}$ die für AA_1 analog gebildete Gruppe ist. Setzen wir nun voraus, dafs $\mathfrak{D}$ eine Involution $(n-1)$-ter Ordnung projectivisch zu $PQRS\ldots$ durchläuft, so beschreibt $A_2\mathfrak{D}$ eine Involution $n$ter Ordnung, und das Büschel $AA_1; A_2\mathfrak{D}$ markirt auf jeder Involution ihres Netzes eine zu ihm und auch zu $PQRS\ldots$ pro-

jectivische Reihe. Dies ist also auf der Involution der Fall, welche die Curven des Büschels P^n, Q^n auf l bestimmen, und auf deren Untersuchung es ankommt. Da auch für den Werth 2 von $n+1$ der Satz richtig ist, so ist durch einen Schlufs von n auf $n+1$ dargethan, dafs das Büschel $P^n Q^n R^n S^n \ldots$ projectivisch zu $PQRS\ldots$ ist. Dabei ist aber immer vorausgesetzt, dafs $P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots$ in n^2 verschiedenen Punkten sich treffen.

Wir legen nunmehr durch P und Q zwei Gruppen zu je $n+1$ Strahlen, so beschaffen, dafs die Polaren von P resp. Q bezüglich je der anderen Gruppen aus n von einander verschiedenen Strahlen bestehen. K_1^{n+1} sei irgend eine Curve $(n+1)$ter Ordnung des durch die beiden Gruppen zu $n+1$ Strahlen bestimmten Büschels. Hinsichtlich irgend eines Punktes R von PQ ergeben nach § 162 die drei Curven erste Polaren, welche einem Büschel angehören. Jedoch für die beiden Gruppen von je $n+1$ Strahlen ergiebt sich für alle Punkte $R, S, T, \ldots$ je dieselbe Gruppe von n Strahlen als Polare, und die n^2 verschiedenen Punkte, in denen sie sich treffen, gehören also den Polaren $P_1^n, Q_1^n, R_1^n, S_1^n, \ldots$ an, welche hinsichtlich $P, Q, R, S, \ldots$ in Bezug auf K_1^{n+1} genommen sind. Die ersteren bilden mithin ein zu der letzteren Punktreihe projectivisches Büschel. Man nehme für jede Curve des Büschels $K^{n+1} K_1^{n+1} K_2^{n+1} K_3^{n+1} \ldots$ hinsichtlich $P, Q, R, S, \ldots$ die ersten Polaren

$$1)\quad P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots : P_1^n, Q_1^n, R_1^n, S_1^n, \ldots ; P_2^n, Q_2^n, R_2^n, S_2^n, \ldots : P_3^n, Q_3^n, R_3^n, S_3^n, \ldots .$$

Jedenfalls kann vorausgesetzt werden, dafs P_2^n, Q_2^n und P_3^n, Q_3^n sich in je n^2 verschiedenen Punkten treffen. Nöthigenfalls kann dies erreicht werden, indem man K_2^{n+1} und K_3^{n+1} an K_1^{n+1} heranrückt. Dabei rücken P_2^n, P_3^n an P_1^n und Q_2^n, Q_3^n an Q_1^n heran, indem

$$2)\qquad P^n P_1^n P_2^n P_3^n \ldots \barwedge Q^n Q_1^n Q_2^n Q_3^n \ldots \barwedge R^n R_1^n R_2^n R_3^n \ldots \barwedge S^n S_1^n S_2^n S_3^n \ldots$$

projectivische Büschel sind, welche aus den Polaren von $P, Q, R, S, \ldots$ hinsichtlich der Curven $K^{n+1}, K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, K_3^{n+1}, \ldots$ bestehen. P_2^n, Q_2^n, sowie P_3^n, Q_3^n müssen sich daher gleich P_1^n, Q_1^n in je n^2 verschiedenen Punkten schneiden. Dann liegen die drei letzten Gebilde von 1) in projectivischen Büscheln angeordnet, wie oben gezeigt worden ist. Dieselben sind wegen der Beziehungen 2) Glieder einer Schaar. In einem

Büschel liegen wegen derselben Beziehungen auch die Curven $P^n, Q^n, R^n, S^n, \ldots$ Diese bilden also, wie der Satz behauptet, ein zu $PQRS\ldots$ projectivisches Büschel $P^n Q^n R^n S^n \ldots$ auch dann, wenn sie in weniger als n^2 verschiedenen Punkten sich treffen sollten.

§ 166. Jedes Büschel K_1^m, K_2^m von Curven $m$ter Ordnung sendet nur eine endliche Anzahl von Curven aus, die einer vorliegenden Curve $(n+1)$ter Ordnung K^{n+1} in weniger als $m(n+1)$ verschiedenen Punkten begegnen, falls irgend eine Curve K_ϱ^m des Büschels $m(n+1)$ verschiedene Punkte mit K^{n+1} gemeinsam hat.

Zwei Curven $m$ter und $(n+1)$ter Ordnung können sich in weniger als $m(n+1)$ Punkten nur treffen, wenn (§ 142) wenigstens in einem derselben beide Curven dieselbe Tangente zeigen, oder für eine von ihnen die Tangente unbestimmt wird. Zeigt wenigstens eine Curve eine bestimmte Tangente t_1, und hat die andere entweder dieselbe oder keine bestimmte Tangente, so müssen für jeden Punkt derselben die beiden Polaren in dem bezüglichen mehrfachen Schnittpunkt sich treffen. Zeigt keine der Curven eine bestimmte Tangente, so geht jede Polare der einen oder der anderen Curve durch denselben. Wir lassen einen Punkt die Gerade l durchlaufen und nehmen für die Lagen $P, Q, R, \ldots$ die Polaren

$$P^n, Q^n, R^n, \ldots;\ P_1^{m-1}, Q_1^{m-1}, R_1^{m-1}, \ldots;\ P_2^{m-1}, Q_2^{m-1}, R_2^{m-1}, \ldots;$$
$$P_3^{m-1}, Q_3^{m-1}, R_3^{m-1}, \ldots; \ldots$$

der Curven $K^{n+1}; K_1^m; K_2^m; K_3^m; \ldots$ In einem der untersuchten Punkte treffen sich K^{n+1} und eine K_λ^m mit irgend zwei zusammengehörigen Curven

$$P^n, P_\lambda^{m-1};\ Q^n, Q_\lambda^{m-1};\ R^n, R_\lambda^{m-1};\ S^n, S_\lambda^{m-1}; \ldots$$

Nun erzeugt aber $K_1^m K_2^m K_3^m K_4^m \ldots$ mit den projectivischen Büscheln

$$P_1^{m-1} P_2^{m-1} P_3^{m-1} P_4^{m-1} \ldots \barwedge Q_1^{m-1} Q_2^{m-1} Q_3^{m-1} Q_4^{m-1} \ldots \barwedge$$
$$R_1^{m-1} R_2^{m-1} R_3^{m-1} R_4^{m-1} \ldots \barwedge \ldots,$$

welche zu einer Schaar gehören (§ 165), die Curven $P^{2m-1}, Q^{2m-1}, R^{2m-1}, \ldots$ eines Büschels, welches zu $P_\lambda^{m-1} Q_\lambda^{m-1} R_\lambda^{m-1} \ldots$ und folglich auch zu $P^n Q^n R^n \ldots$ projectivisch ist. Letzteres erzeugt mit $P^{2m-1} Q^{2m-1} R^{2m-1} \ldots$ eine Curve $(n+2m-1)$ter Ordnung, welche alle Punkte der verlangten Art

mit K^{n+1} gemeinsam hat. Dieselbe trifft die Curve K^{n+1} aber höchstens in $(n+1)(n+2m-1)$ Punkten, unter denen die Grundpunkte des Büschels K_1^m, K_2^m sich finden, die auf K^{n+1} liegen.

Die Curve kann nun mit K^{n+1} nur dann mehr als $(n+1)(n+2m-1)$ Punkte gemeinsam haben, wenn beiden dieselbe Theilcurve angehört. Diese aber müfste K_ϱ^m in einzelnen ihrer Schnittpunkte mit K^{n+1} treffen, unter denen sich jedoch kein Punkt der gesuchten Art finden kann.

§ 167. Wenn $(n+1)p$ der p^2 verschiedenen Schnittpunkte zweier Curven $p$ter Ordnung $(p > n+1)$ auf einer Curve K^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung liegen, so befinden sich die $(p-n-1)p$ übrigen auf einer Curve $(p-n-1)$ter Ordnung.

Die p^2 Schnittpunkte sind die Grundpunkte eines Büschels, von dessen Curven wir eine, K^p, durch einen $((n+1)p+1)$ten Punkte der K^{n+1} legen können. Sie trifft die letztere in unendlich vielen Punkten (§ 142) und hat daher zuerst einen Bestandtheil $r$ter Ordnung mit ihr gemeinsam. Er trifft in höchstens rp Punkten die beiden gegebenen Curven $p$ter Ordnung. Daher begegnen sich die beiden Curven K^{p-r} und K^{n+1-r}, durch welche die Curve zu K^p und K^{n+1} zu ergänzen ist, in $p(n-r+1)$ Punkten. Auch sie haben daher noch einen Bestandtheil gemeinsam, und man überzeugt sich so, dafs eine Curve $p$ter Ordnung des Büschels die Curve $(n+1)$ter Ordnung vollständig enthält. Ihr zweiter Theil ist eine Curve $(p-n-1)$ter Ordnung.

§ 168. Wenn $m(n+1)$ von den $p(n+1)$ verschiedenen Schnittpunkten zweier Curven K^p und K^{n+1} $p$ter und $(n+1)$ter Ordnung $(p > n+1)$ auf einer Curve $m$ter Ordnung liegen, so liegen die übrigen $(p-m)(n+1)$ auf einer Curve K^{p-m} $(p-m)$ter Ordnung.

Für $n+1=3$, also $n=2$, folgt der Lehrsatz am einfachsten aus dem Satze, dafs jede durch $3p-1$ Punkte einer K^3 gelegte K^p auch in einem bestimmten $3p$ten Punkte die erstere trifft. Wir nehmen zu diesem Zwecke irgend vier der gegebenen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, von denen keine drei in einer Geraden liegen, zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, das mit einem Strahlbüschel A zusammen die K^3, mit einem Büschel von Curven K^{p-2} die K^p (§ 147) erzeugt. In jedem der $3p-4$ übrigen Schnittpunkte beider Curven trifft sich ein Kegelschnitt mit seiner Gera-

den und seiner K^{p-2}. A und die $3p-4$ anderen Punkte liegen daher im Durchschnitt der gegebenen K^3 mit einer Curve $(p-1)$ter Ordnung K^{p-1}, die nämlich das Erzeugnifs des Strahlbüschels und des projectivischen Büschels der K^{p-2} ist[38]. Wird vorausgesetzt, wie es für $p-1=2$ zutrifft, dafs $3p-4$ von ihnen den letzten eindeutig bestimmen, so gilt dasselbe von $3p-1$ der gegebenen für den letzten Schnittpunkt der K^p, da nämlich A durch A_1, A_2, A_3, A_4 zweifellos bestimmt wird und mit $3p-5$ anderen zusammen den $3p$ten Schnittpunkt bestimmt. Ist ein Theil der $3p$ Schnittpunkte der volle Durchschnitt einer K^m, so bildet diese zusammen mit einer K^{p-m} durch $3(p-m)-1$ der übrigen Punkte eine K_1^p, die $3p-1$ und folglich alle $3p$ Schnittpunkte der K^p mit der K^3 enthält, woraus aber offenbar der Satz folgt.

Für den allgemeinen Fall mufs, unter Voraussetzung des entsprechenden Satzes für n und kleinere Zahlen (§ 153), ein anderes Verfahren eingeschlagen werden[39]. Ist zuerst m kleiner als $n+1$, so liegen eben nach der Voraussetzung die $(p-n-1)m$ Punkte, in welchen sich K^p und K^m aufserhalb K^{n+1} noch treffen, auf einer Curve K^{p-n-1} $(p-n-1)$ter Ordnung. Sie bildet mit der K^{n+1} zusammen eine zweite Curve $\mathfrak{K}^p$ $p$ter Ordnung. Von den p^2 Schnittpunkten zwischen K^p und $\mathfrak{K}^p$ liegen pm auf der K^m. Daher liegen nach dem bereits Bewiesenen (§ 167) die übrigen Schnittpunkte auf einer Curve K^{p-m} $(p-m)$ter Ordnung, auf der also auch die Schnittpunkte zwischen K^p und K^{n+1} aufserhalb K^m liegen. Der Beweis setzt nur scheinbar voraus, dafs K^p und K^m sich in pm verschiedenen Punkten treffen. An die Stelle von K^p kann nämlich jede andere Curve $p$ter Ordnung treten, die K^{n+1} in denselben $p(n+1)$ Punkten trifft. Ergänzen wir nun letztere durch eine Curve K^{p-n-1}, die keinen der Schnittpunkte zwischen K^p und K^{n+1}, sowie zwischen K^p und K^m enthält, zu einer $\mathfrak{K}^p$, so schneiden (§ 166) nur eine endliche Anzahl von Curven des Büschels $K^p, \mathfrak{K}^p$ die K^m in weniger als pm Punkten, wenn K^{p-m-1} und K_m sich in $(p-m-1)m$ verschiedenen Punkten treffen.

Da K^m und K^{n+1} sich in $m(n+1)$ von einander verschiedenen Punkten treffen, so können von den Theilen, in die irgend eine etwa zerfällt, keine zwei übereinstimmen. Daher folgt aus § 142 (resp. 131) in Verbindung mit § 114, dafs unendlich viele Geraden in m, unendliche viele Zusammenstellungen von $p-n-1$ Geraden in $(p-n-1)m$ verschiede-

nen Punkten die Curve K^m treffen. Aus § 166 folgt sehr leicht, dafs auch allgemeine Curven K^{p-n-1} derselben Bedingung Genüge leisten. Unser Satz ist daher für den Fall $m < n+1$ auch dann bewiesen, wenn die Curve $p$ter Ordnung K^p der Curve K^m in $p \cdot m$ von einander verschiedenen Punkten nicht begegnen sollte.

Falls m nicht kleiner als $n+1$ ist, dient zum Beweise der Restsatz. Werden die $(n+1)m$ Punkte, welche K^{n+1} und K^m gemeinsam sind, in zwei Gruppen I) und II) zerlegt, machen II) und III) den Durchschnitt einer Curve $q$ter, III) und IV) aber den vollständigen Durchschnitt einer Curve $r$ter Ordnung aus, so bilden I) und IV) den vollständigen Durchschnitt einer Curve $(r+m-q)$ter Ordnung. Der Beweis folgt, falls q kleiner als $n+1$ ist, und die in I), II), III) und IV) vorkommenden Punkte alle von einander verschieden sind, unmittelbar aus dem bereits Bewiesenen. Denn die vier Gruppen bilden zusammen den Durchschnitt unendlich vieler Curven $(r+m)$ter Ordnung mit K^{n+1}, die Punkte von II) und III) aber sind einer K^q mit der K^{n+1} gemeinsam. Da q kleiner als $n+1$ vorausgesetzt wird, so liegen I) und IV) auf derselben Curve $(r+m-q)$ter Ordnung.

Wir versuchen nun insbesondere die Annahmen n und $n-1$ für q und r einzuführen. Dann darf II) höchstens $\frac{n(n+3)}{2}$, III) höchstens $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte enthalten, denn im Allgemeinen finden besondere Beziehungen unter den $m(n+1)$ Schnittpunkten nicht statt, und es bestimmen daher irgend $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte (§ 154) eine eigentliche Curve $n$ter Ordnung, die keine weiteren Schnittpunkte der beiden Curven K^{n+1} und K^m enthält. Da nun II) und III) den Durchschnitt einer K^n mit der K^{n+1} ausmachen sollen, so mufs

$$\frac{n(n+3)}{2} + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \geqq (n+1)n$$

sein. Die Zahl linker Hand ist aber gleich $n(n+1)+n-1$ und daher wirklich gröfser als die rechter Hand. Die beabsichtigte Mafsregel ist daher in unendlich vielen Weisen durchführbar. Legen wir die Curve $n$ter Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ der $m(n+1)$ Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1}, so ist sie nur als Glied eines Netzes zweiter Stufe bestimmt. In

diesem giebt es, wenn man von ganz besonderen Lagen absieht, die als Grenzfälle sich erledigen, ein Büschel, dessen fernere Grundpunkte aufserhalb der K^{n+1} liegen. Auf K^{n+1} schneiden unendlich viele Curven dieses Büschels noch $\frac{(n-1)(n+1)}{2} - (n-1) + 2 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} - n + 3$ verschiedene Punkte aus. Ist n gröfser als 3, so geht durch dieselben entweder ein Büschel von Curven $(n-1)$ter Ordnung oder ein ganzes Netz. Für $n = 3$ erhalten wir eine einzelne Curve. Es werden sich, von Grenzfällen abgesehen, durch die letzteren Punkte Curven $(n-1)$ter Ordnung legen lassen, welche die K^{n+1} in $(n-1)(n+1)$ verschiedenen Punkten treffen, unter denen solche von I) nicht mehr vorkommen. I) und IV) bilden nun den Durchschnitt einer Curve $(n-1+m-n)$ter oder $(m-1)$-ter Ordnung. Da m beliebig grofs sein kann, so gilt diese Überlegung auch für K^p. Bezeichnet man mit V) die Punktgruppe, die sie aufser I) und II) noch mit K^{n+1} gemeinsam hat, so liegen V), I) und IV) im Durchschnitt einer Curve $(p-1)$ter Ordnung. Damit ist der Satz auf den entsprechenden zurückgeführt, wo nur $p-1$ und $m-1$ an die Stelle von p und m treten. In entsprechender Weise können wir zwei Gruppen I_1) und IV_1) finden, die zusammen mit V) den Durchschnitt einer K^{p-2} mit der K^{n+1} ausmachen, andererseits für sich allein aus den Schnittpunkten einer Curve $(m-2)$ter Ordnung bestehen. Den entsprechenden Schlufs können wir so lange wiederholen, bis die dritte Curve auf die Ordnung n herabsinkt. Alsdann liegt V) mit I_{m-n-1}) und IV_{m-n-1}) in dem Durchschnitt der K^{n+1} und einer K_1^{p+n-m}, I_{m-n-1}) und IV_{m-n-1}) aber bilden den Durchschnitt der K^{n+1} und einer K_1^n. Daher liegt nach dem ersten Theile unseres Beweises die Gruppe V) auf einer Curve $(p-m)$ter Ordnung.

Man kann mit grofser Leichtigkeit Schnittpunktsysteme herstellen, in denen solche Gruppen von $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ Punkten vorkommen, die ein allgemeines Netz von Curven $n$ter Ordnung constituiren, denen allen nur jene Punkte gemeinsam sind. Ferner kann erreicht werden, dafs eine Curve desselben die K^{n+1} in noch $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - n + 3$ verschiedenen Punkten trifft, deren Verbindungscurve $(n-1)$ter Ordnung nur in einfachen Punkten der K^{n+1} begegnet. Hieraus folgt der Lehrsatz, indem nämlich eine singuläre Anordnung der Punkte wirklich den Aus-

nahmefall bildet, und daher andere Schnittpunktsysteme in jeder Nähe liegen, für welche der Satz gilt.

§ 169. Wenn auf einer eigentlichen Curve $(n+1)$ter Ordnung unter ihren $p(n+1)$ Schnittpunkten mit einer K^p $(p \geqq n+1)$ $\frac{n(n-1)}{2}$ solche sich finden, die nicht derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören, so gehen alle Curven $p$ter Ordnung, welche die $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ übrigen enthalten, auch durch jene letzten Punkte.

Die $(n+1)p$ Punkte mögen in zwei Gruppen I) und II) vertheilt werden. Es fragt sich, wie viele Punkte mufs die letztere mindestens enthalten, wenn sich I) mit anderen Gruppen IV) der K^{n+1}, die aus derselben Anzahl von Punkten bestehen, wie II), durch Curven $p$ter Ordnung verbinden lassen soll. Eine Curve K_q, die II) mit einer Hülfsgruppe III) verbindet, bildet eine Curve $(p+q)$ter Ordnung K^{p+q} mit derjenigen Curve $\mathfrak{K}^p$ $p$ter Ordnung, die I) und IV) verbindet. Da aber I) und II) durch eine Curve $p$ter Ordnung verbunden sind, so geht eine Curve $q$ter Ordnung K^q durch III) und IV). Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs II) von I) nicht eindeutig abhängt, ist also die, dafs die Punkte der Gruppe III), welche mit denen von II) in einer K^q liegen, auch wenn sie von einander verschieden sind, nicht hinreichen, die Gruppe II) zu bestimmen. Diese Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn, q kleiner als $n+1$ vorausgesetzt, II) nicht mehr, III) aber weniger als $\frac{q(q+3)}{2}$ Punkte enthält. Ist also

$$q(q+3) - 1 \geqq q(n+1) \; ; \; n+1 > q \; ,$$

so kann man sicher sein, dafs statt irgend $\frac{q(q+3)}{2}$ gegebener Punkte des Schnittpunktsystems eine andere Gruppe der K^{n+1} mit derselben Punktzahl sich substituiren läfst. Die Ungleichung kann nur dann bestehen, wenn q wenigstens gleich $n-1$ ist, Verlegungscurven niedrigerer Ordnung lassen sich nur dann anwenden, wenn besondere Beziehungen obwalten.

Die Gruppe III) gestattet aber unendlich vielen K^{n-1} den Durchgang, wenn sie aus höchstens (§ 154) $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - 1$ Punkten besteht. Dann aber besteht II) aus wenigstens $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ Punkten. Solche Gruppen

also, welche von den gegebenen Schnittpunkten zwei mehr enthalten, als zur Bestimmung einer Curve K^{n-2} hinreichen, können durch gleichzahlige ersetzt werden, ohne dafs Beziehungen zwischen ihnen angenommen werden.

$\frac{(n-1)n}{2}$ Punkte lassen sich, während die $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ übrigen fest bleiben, durch andere $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte ersetzen, wenn sie auf einer K^{n-2} liegen. Diese trifft nämlich noch in

$$(n-2)(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n - 2 - \frac{n^2-n}{2}$$
$$= \frac{n^2-n-2}{2} - 1 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} - 1$$

Punkten, durch welche sich daher ein Büschel von Curven $(n-2)$ter Ordnung legen läfst. Jede bestimmt auf der K^{n+1} eine Gruppe von $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten, die mit den $(n+1)p - \frac{n(n-1)}{2}$ festen Punkten zusammen ein Schnittpunktsystem bilden. Diese Bedingung ist nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig, damit irgend $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte oder einzelne von ihnen allein an einem Schnittpunktsystem verändert werden können.

Sind $\frac{n(n-1)}{2} - l$ Punkte ein allein veränderlicher Theil II) eines solchen Schnittpunktsystems, so ist die Gruppe III) von

$$(n-1)(n+1) - \frac{(n-1)n}{2} + l = \frac{(n-1)(n+2)}{2} + l$$

Punkten, die unter gewöhnlichen Umständen eine Curve $(n-1)$ter Ordnung be- resp. überbestimmen, für ein ganzes Büschel resp. ein Netz durchlässig. Es seien zuerst Curven $(n-1)$ter Ordnung durch diese im Allgemeinen getrennten Punkte möglich, die sich nur noch in einer Gruppe V) von

$$(n-1)^2 - \frac{(n-1)(n+2)}{2} - l = \frac{(n-1)(n-4)}{2} - l \qquad 2)$$

im Allgemeinen getrennten Punkten treffen. Sie lassen sich schon für $l=0$ durch eine Curve $(n-4)$ter Ordnung verbinden, a fortiori also, wenn l gröfser als 0 ist (§ 154). Diese K^{n-4} bildet mit der gegebenen K^{n+1} eine Curve K^{2n-3}. Sie schneidet die II) und III) verbindende K^{n-1} aufser in diesen noch in der Gruppe V) und der anderen VI) von $\frac{(n-4)(n-1)}{2}$ $+ l$ Punkten, in denen K^{n-1} und K^{n-4} sich aufserhalb V) noch treffen.

Da nun III) und V) den Durchschnitt einer zweiten Curve K_1^{n-1} $(n-1)$-ter Ordnung mit K^{n-1} ausmachen, so liegen nach § 168 II) und VI) in derselben Curve K^{n-2} $(n-2)$ter Ordnung. Die Curve K^{n-4}, welche nur die Gruppe V), also $\frac{(n-4)(n-1)}{2}-l$ Punkte, zu enthalten braucht, gehört eben deswegen einem $l$fachen Netz an, in dem sie willkürlich gewählt werden kann. Daher geht auch durch die Gruppe II) von $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-l$ Punkten noch ein Netz $l$ter Stufe von Curven $(n-2)$ter Ordnung, während im allgemeinen Falle nur ein solches $(l-1)$ter Stufe, im Falle des verschwindenden l aber überhaupt keine Curve durch eine solche Anzahl von Punkten sich legen läfst. Mit irgend l anderen Grundpunkten, welche den gegebenen Curven K^p und K^{n+1} gemeinsam sind, liegen die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-l$ Punkte in einer Curve $(n-2)$ter Ordnung.

Es ist noch der Fall zu bedenken, wo die Gruppe III) nicht mehr von eigentlichen Curven $(n-1)$ter Ordnung umfafst werden kann, dieselben vielmehr sämmtlich in eine unveränderliche Curve und eine allein bewegliche Curve $m$ter Ordnung zerfallen $(m < n-1)$. Die beweglichen Punktgruppen II), II_1), II_2), ... welche mit I) Schnittpunktsysteme von Curven K^p mit K^{n+1} bilden, sind dann auf Curven $m$ter Ordnung $K^m, K_1^m, K_2^m, \ldots$ gelagert. Doch müssen diese Gruppen wenigstens $m(n+1-m)$ Punkte enthalten, denn die Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1} gehören entweder II) an, oder werden auch von allen anderen Curven $K_1^m, K_2^m, \ldots$ bestimmt und gehören zu den m^2 Grundpunkten von K_1^m, K_2^m. Es enthalte II) zuerst $(n+1)m-\frac{m(m+3)}{2}+1+l$ Punkte, so dafs K^m in nicht mehr Punkten K^{n+1} noch trifft, als zur Bestimmung eines Büschels eben hinreichen. Weil nun

$$\frac{(n-m-2)(n-m+1)}{2}-l=\frac{(n-1)n}{2}-(n+1)m+\frac{m(m+3)}{2}-l-1$$

ist, so liegt von irgend $\frac{(n-1)n}{2}$ Punkten des Schnittpunktsystems, in dem II) vorkommt, der Rest auf einer Curve $(n-m-2)$ter Ordnung; alle Punkte zusammen gehören einer Curve $(n-2)$ter Ordnung an.

Andererseits mögen $(n+1)m-\frac{m(m+3)}{2}-l$ Punkte, wo $l=0$ ebenfalls zu beachten ist, in jeder der Gruppen II, II_1, II_2, ... gelegen

sein. Zwei Curven K^m und K_1^m schneiden sich in $\frac{m(m+3)}{2}+l$ Punkten von K^{n+1} und in $m^2-\frac{m(m+3)}{2}-l=\frac{m(m-3)}{2}-l$ Punkten aufserhalb derselben. Durch diese läfst sich daher ein $l$fach unendliches Netz von Curven $(m-3)$ter Ordnung legen. Jede einzelne bildet mit K^{n+1} eine Curve $\mathfrak{K}^{n+m-2}$ $(n+m-2)$ter Ordnung. Von den $m(n+m-2)$ Schnittpunkten derselben mit K^m liegen m^2 auf K_1^m, die übrigen, unter ihnen die Punkte von II), im Durchschnitt einer Curve $(n-2)$ter Ordnung mit K^m. Man erhält ein $l$fach unendliches Netz solcher Curven, keine zwei schneiden, wenn l gröfser als 0 ist, dasselbe Punktsystem auf K^m aus, alle aber enthalten die Punktgruppe II). Eine einzelne der Curven bildet mit denjenigen ein Netz $\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$ter Stufe, welche aus K^m und den Curven $(n-m-2)$ter Ordnung der Ebene bestehen. Daher erhalten wir insgesammt ein Netz $\left(\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}+l\right)$ter Stufe, dessen Curven alle die Punktgruppe II) enthalten. Da wir eine Curve desselben durch irgend $\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}+l$ Punkte legen können, so lassen irgend $\frac{(n-1)n}{2}$ Punkte, unter denen eine solche besondere Punktgruppe vorkommt, sich durch eine Curve $(n-2)$ter Ordnung verbinden.

§ 170. Wenn eine Curve $p$ter Ordnung durch alle Schnittpunkte zweier Curven $m$ter und $(n+1)$ter Ordnung bis auf

$$\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$

beliebige unter ihnen hindurchgeht, so mufs sie auch diese letzteren enthalten, wenn sie nicht derselben Curve $(m+\overline{n+1}-p-3)$ter Ordnung angehören, und

$$m+\overline{n+1}-3>p>m>n+1>3 \text{ ist.}$$

Es sei eine Curve K^p möglich, welche nur

$$\nu=\tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$$

Punkte des vollständigen Durchschnittes zwischen K^m und K^{n+1} nicht enthält. Durch diese Punkte lassen sich unendlich viele $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ legen; irgend eine von ihnen bildet mit K^p eine Curve $K^{m+\overline{n+1}-2}$. $m(n+1)$ von

ihren Schnittpunkten mit K^{n+1} liegen auf K^m, die übrigen auf einer Curve K^{n-1} $(n-1)$ter Ordnung. Unter den $(n-1)(m+\overline{n+1}-p-2)$ Schnittpunkten der K^{n-1} mit $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ kommen die aufserhalb K^m gelegenen Schnittpunkte der letzteren mit K^{n+1} vor. Überdies haben K^{n-1} und $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$

$$\begin{aligned}(n-1)(m+\overline{n+1}-p-2) &- (n+1)(m+\overline{n+1}-p-2)\\ &+ \tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-1)(m+\overline{n+1}-p-2)\\ &= \tfrac{1}{2}(m+\overline{n+1}-p-2)(m+\overline{n+1}-p-5)\end{aligned}$$

gemeinsame Punkte, die gerade zur Bestimmung einer Curve $K^{m+\overline{n+1}-p-5}$ hinreichen. Sie bildet mit K^{n+1} eine Curve $(m+2(n+1)-p-5)$ter Ordnung. $(m+\overline{n+1}-p-2)(n-1)$ von ihren Schnittpunkten mit $K^{m+\overline{n+1}-p-2}$ liegen auf K^{n-1}. Die anderen, also auch die betrachteten ν Punkte liegen auf einer Curve der Ordnung $(m+\overline{n+1}-p-3)$. Ist durch diese Punkte eine solche Curve nicht möglich, so mufs die Gruppe jeder Curve $p$ter Ordnung angehören, welche die $m(n+1)-\nu$ übrigen Schnittpunkte zwischen K^m und K^{n+1} enthält.

§ 171. Durch $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte der Ebene ist im Allgemeinen eine Curve $(n+1)$ter Ordnung möglich, durch irgend $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-1$ Punkte ein Büschel, dessen Curven einander sämmtlich noch in denselben $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander verschiedenen Punkten begegnen. Nur wenn bei irgend zweien der Curven die ferneren Schnittpunkte derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören, reichen die $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-1$ Punkte nicht zur Bestimmung eines Büschels und alle gegebenen Punkte nicht zur Bestimmung einer Curve aus.

$C_1\, C_2 \ldots C_{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)}$ seien die gegebenen Punkte; unter den $(n+1)^2$ von einander verschiedenen Grundpunkten eines Büschels von Curven K^{n+1} mögen sich die λ ersten der gegebenen Punkte $\left[\lambda \text{ kleiner als } \frac{(n+1)n+4)}{2}-1\right]$ bereits befinden. Irgend $\frac{n(n-1)}{2}+1$ der übrigen Grundpunkte verbinde man durch eine Curve K^{n-1}; die durch $C_{\lambda+1}$ gehende Curve K_1^{n+1} des Büschels trifft sie noch in $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-1$ Punk-

ten. Dieselben bestimmen mit $C_{\lambda+1}$ eine Curve K_1^{n-1}. Die Punktgruppe, welche diese Curve allein auf der K_1^{n+1} ausschneidet, und in der $C_{\lambda+1}$ liegt, bildet mit den fest gebliebenen Grundpunkten die Basis eines neuen Büschels von Curven K^{n+1}. Wenn man auf solche Art schliefst, kann man, von einem ganz beliebigen Büschel mit $(n+1)^2$ verschiedenen Grundpunkten ausgehend, Büschel herstellen, unter deren Grundpunkten

$$C_1\,;\; C_1, C_2\,;\; C_1, C_2, C_3;\; C_1, C_2, C_3, C_4\,;\; \ldots\; C_1 C_2 C_3 \ldots C_{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)-1}$$

sich vorfinden. Das letzte Büschel ist nur in dem Ausnahmefall durch die angegebenen Grundpunkte nicht eindeutig bestimmt, wenn irgend zwei durch diese Punkte gelegte Curven $(n+1)$ter Ordnung sich noch in $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten einer K^{n-2} treffen. Im Allgemeinen ist daher durch den letzten Punkt eine Curve eindeutig bestimmt.

Nur bei ganz besonderen Lagen von $C_{\lambda+1}$ kann die Hülfscurve K_1^{n+1} in Theile zerfallen, da in einem Büschel mit $(n+1)^2$ verschiedenen Grundpunkten nur eine endliche Zahl zerfallender Curven sich vorfinden kann. Die $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte werden ferner ebenfalls in nur sehr speciellen Fällen so gelegen sein, dafs keine eigentliche K^{n-1} sie verbindet. Diejenigen Punktsysteme, welche auf solche speciellen Lagen führen, dürfen daher als Grenzfälle erledigt werden.

§ 172. Auf jeder Curve K^{n+1} $(n+1)$ter Ordnung kann man $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte so bestimmen, dafs nur sie allein durch dieselben hindurchgeht.

Hierzu ist nach den §§ 169 und 171 der Nachweis nothwendig und hinreichend, dafs unter ihren $(n+1)^2$ Schnittpunkten mit irgend einer anderen Curve $\mathfrak{K}^{n+1}$ $(n+1)$ter Ordnung $\frac{(n-1)n}{2}$ solche Punkte sich finden, die nicht derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung angehören. Zu diesem Zwecke schneiden wir die K^{n+1} durch $n+1$ von einander verschiedene Geraden. Da wir dieselbe als allgemein voraussetzen, wird sie von ihnen in $(n+1)^2$ verschiedenen Punkten getroffen werden. Wir wählen der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots\, n-2, n-1$ Schnittpunkte auf den $n-1$ ersten Geraden aus. Lägen nun diese Punkte auf derselben Curve $(n-2)$ter Ordnung, so

müfste dieselbe jedenfalls die letzte Gerade ganz enthalten und daneben (§ 142) eine Curve $(n-3)$ter Ordnung. Diese wieder müfste in die vorletzte Gerade und eine Curve $(n-4)$ter Ordnung zerfallen; letztere müfste wieder die drittletzte Gerade enthalten, und so würde man endlich auf eine Gerade kommen, welche die drei ersten Punkte enthalten müfste, die aber unmöglich ist. Nach § 169 ist daher die vorliegende Curve jedenfalls die einzige, welche durch die übrigen $\frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1$ Schnittpunkte der $n+1$ gezogenen Geraden und irgend einen ihrer anderen Punkte hindurchgeht, nach der Entwickelung des § 171 kann man unendlich viele andere Gruppen von $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkten der K^{n+1} finden, durch welche nur sie allein sich legen läfst.

Sechster Abschnitt.

Bestimmung einer Curve nter Ordnung durch gegebene Punkte. §§ 173—178.

§ 173. Nach Grafsmann's Definition ist die Curve $n$ter Ordnung der Ort eines Punktes, der in einer aus ihm durch lineale Construction abgeleiteten Geraden liegt. In derselben kommt neben gegebe-

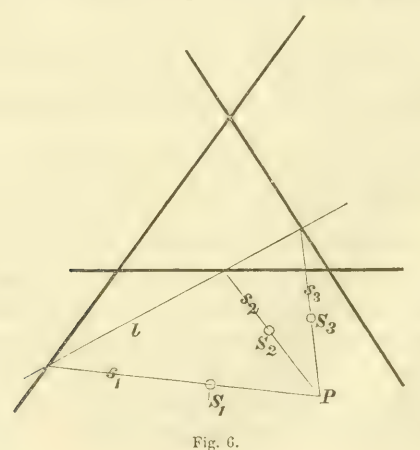


Fig. 6.

nen Punkten und Geraden der bewegliche Punkt $n$mal vor. So durchschneiden sich in jedem Punkte einer Curve dritter Ordnung drei Geraden s_1, s_2, s_3, die von festen Punkten S_1, S_2, S_3 ausgehen und die Seiten eines gegebenen Dreiecks in drei Punkten einer Geraden l treffen (Fig. 6).

So kann man jede Curve vierter Ordnung mit Hülfe von vier um S_1, S_2, S_3, S_4 beweglichen Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4 erzeugen, welche in die durch nebenstehende Figur 7 angedeutete und leicht verständliche Abhän-

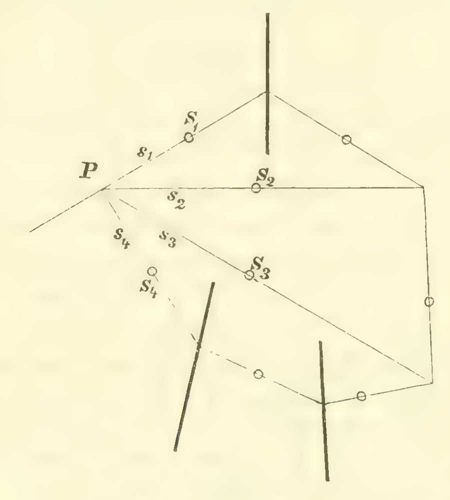


Fig. 7.

gigkeit gesetzt sind. Sieht man davon ab, dafs die drei Strahlen des ersten Falles in einem Punkte der betrachteten Curve dritter Ordnung sich schneiden, so hat man es mit einer zweifach unendlichen Gesammtheit von Geradentripeln zu thun. In jedem Tripel ist eine Gerade durch die beiden anderen bestimmt. Wird eine von ihnen beliebig festgehalten, so ist l nur noch um einen Punkt der einen Dreiecksseite drehbar. Die beiden anderen Strahlen können daher noch projectivische Strahlbüschel beschreiben. In jedem Curvenpunkt treffen sich drei zusammengehörige Strahlen dieser trilinear bezogenen Büschel.

Giebt man bei der zweiten Betrachtungsweise die Forderung auf,

dafs die vier Strahlen in einem Punkte der K^4 sich treffen sollen, so ist doch noch durch irgend drei derselben ein zugehöriger des vierten Büschels eindeutig bestimmt. Wenn man irgend zwei derselben fixirt, so beschreiben die beiden anderen Strahlen projectivische Gebilde. Daher stehen die vier Büschel in vierfach linearer Beziehung, und es ist die Curve vierter Ordnung der Ort der Punkte, in denen je vier entsprechende Strahlen der linear bezogenen Büschel sich treffen. Diese Betrachtungsweise der Curven soll im Folgenden verallgemeinert werden[40].

§ 174. Man kann $n+1$ verschiedene Strahlbüschel so in Beziehung setzen, dafs zu n beliebig ausgewählten Strahlen $o_{i1}^{(\alpha)}, o_{i_2}^{(\beta)}, o_{i_3}^{(\gamma)}, \ldots o_{i_n}^{(\nu)}$ von irgend n Büscheln im Allgemeinen ein einziges Element $o_{i_{n+1}}^{(\alpha\beta\gamma\ldots\nu)}$ oder $o_{i_{n+1}}^{(\rho)}$ des letzten Trägers gehört. Werden irgend $n-1$ dieser Strahlen, etwa $o_{i_1}^{(\alpha)}, o_{i_2}^{(\beta)}, \ldots o_{i_{n-1}}^{(\mu)}$, festgehalten, so beschreiben die beiden anderen, $o_{i_n}^{(\nu)}$ und $o_{i_{n+1}}^{(\rho)}$, projectivische Büschel. Wird einer jener $n-1$ Strahlen in andere und andere Lagen gebracht, so gehören dem festen Büschel, das der $n$te, $o_{i_n}^{(\nu)}$, beschreibt, die Büschel einer Schaar zu. Die beiden Doppelstrahlen $(o_{i_{n+1}}^{(\rho)})_1$ und $(o_{i_{n+1}}^{(\rho)})_2$ derselben bilden mit den zugehörigen Strahlen $(o_{i_n}^{(\nu)})_1$ und $(o_{i_n}^{(\nu)})_2$, sowie mit der festen Anordnung der $n-2$ ersten Strahlen eine singuläre Gruppe, der in dem $(n-1)$ten Büschel kein bestimmter Strahl zukommt.

Durch irgend zwei $(n+1)$fach lineare Systeme ist eine ganze Schaar solcher Systeme bestimmt. Fixirt man irgend $n-1$ der Strahlen, und läfst man einen $n$ten ein bestimmtes Büschel durchlaufen, so entsprechen demselben in den verschiedenen Systemen die Büschel einer Schaar; die Leitbüschel aller dieser Schaaren sind zu einander projectivisch.

Man kann aus Curven genügend hoher Ordnung, die in der Ebene des letzten Strahlbüschels liegen, ein Netz von beliebig hoher Ordnung (λ) zusammensetzen.

Es mögen die Büschel

$$U_{11} U_{21} U_{31} \ldots U_{\alpha 1} \;\overline{\wedge}\; U_{12} U_{22} U_{32} \ldots U_{\alpha 2} \;\overline{\wedge}\; U_{13} U_{23} U_{33} \ldots U_{\alpha 3} \;\overline{\wedge}\; \ldots \;\overline{\wedge}\; U_{1\beta} U_{2\beta} U_{3\beta} \ldots U_{\alpha\beta}$$

einer in ihm gelegenen Schaar projectivisch auf das Büschel $o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)}$ bezogen werden, ihre Leitbüschel

$$U_{11}U_{12}U_{13}\dots U_{1\beta} \barwedge U_{21}U_{22}U_{23}\dots U_{2\beta} \barwedge U_{31}U_{32}U_{33}\dots U_{3\beta} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 1}U_{\alpha 2}U_{\alpha 3}\dots U_{\alpha\beta}$$

aber zu dem Büschel $o_2' o_2'' o_2''' \dots o_2^{(\beta)}$ projectivisch sein; alsdann gehört jeder Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)} o_2^{(\beta)}$ eine bestimmte Curve zu.

Es seien nun zwei projectivische Schaaren in dem Gesammtnetze gegeben, deren Büschel ebenfalls alle unter einander projectivisch sind. Dieselben mögen in folgender Weise bezeichnet werden:

$$U_{111}U_{121}U_{131}\dots U_{1\beta 1} \barwedge U_{211}U_{221}U_{231}\dots U_{2\beta 1} \barwedge U_{311}U_{321}U_{331}\dots U_{3\beta 1} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 11}U_{\alpha 21}U_{\alpha 31}\dots U_{\alpha\beta 1}$$

und

$$U_{112}U_{122}U_{132}\dots U_{1\beta 2} \barwedge U_{212}U_{222}U_{232}\dots U_{2\beta 2} \barwedge U_{312}U_{322}U_{332}\dots U_{3\beta 2} \barwedge \dots \barwedge U_{\alpha 12}U_{\alpha 22}U_{\alpha 32}\dots U_{\alpha\beta 2}\,.$$

Alle diese Büschel sind zu einander projectivisch, und dasselbe gilt von allen Leitbüscheln, etwa von

$$U_{111}U_{211}U_{311}\dots U_{\alpha 11} \barwedge U_{121}U_{221}U_{321}\dots U_{\alpha 21} \barwedge U_{1\beta 1}U_{2\beta 1}U_{3\beta 1}\dots U_{\alpha\beta 1}$$

und

$$U_{112}U_{212}U_{312}\dots U_{\alpha 12} \barwedge U_{122}U_{222}U_{322}\dots U_{\alpha 22} \barwedge U_{1\beta 2}U_{2\beta 2}U_{3\beta 2}\dots U_{\alpha\beta 2}$$

Man kann die beiden Netze dritter Stufe, in denen die Schaaren liegen, in einer einzigen Weise so beziehen, dafs den Curven U_{111}, U_{121}, U_{211}, U_{221}, U_{331} die anderen U_{112}, U_{122}, U_{212}, U_{222}, U_{332} entsprechen. Bei dieser collinearen Beziehung entsprechen sich nämlich zunächst die Büschel $U_{131}U_{231}U_{331}\dots U_{\alpha 31}$ und $U_{132}U_{232}U_{332}\dots U_{\alpha 32}$, denn nur durch das erstere Büschel kann man U_{331} mit irgend zwei Curven (U_{131} und U_{231}) der Büschel U_{111}, U_{121} und U_{211}, U_{221} verbinden, und andererseits verbindet allein das zweite Büschel U_{332} mit zwei Curven U_{132} und U_{232} der beiden Büschel U_{112}, U_{122} und U_{212}, U_{222}.

Hieraus folgt aber, dafs auch

$$U_{111}U_{121}U_{131}\dots U_{1\beta 1} \barwedge U_{112}U_{122}U_{132}\dots U_{1\beta 2}$$

entsprechende Büschel sind, und dafs

$$U_{211}U_{221}U_{231}\dots U_{2\beta 1} \barwedge U_{212}U_{222}U_{232}\dots U_{2\beta 2}$$

einander zugehören. Weiter folgt, dafs die Büschel

$$U_{311}U_{321}U_{331}\dots U_{3\beta 1} \barwedge U_{312}U_{322}U_{332}\dots U_{3\beta 2}$$

sich entsprechen. Denn das erstere Büschel allein verbindet U_{331} mit Curven U_{311}; U_{321}; U_{341}; ... der Büschel

$$U_{111}, U_{211}; U_{121}, U_{221}; U_{141}, U_{241}; \dots$$

Ihm gehört das einzige Büschel gleicher Art im zweiten Netze dritter Stufe zu. Nunmehr entsprechen sich in den collinearen Netzen dritter Stufe je zwei Leitbüschel

$$U_{\alpha 11} U_{\alpha 21} U_{\alpha 31} \dots U_{\alpha\beta 1} \barwedge U_{\alpha 12} U_{\alpha 22} U_{\alpha 32} \dots U_{\alpha\beta 2}.$$

Überhaupt gehören zwei analog bezeichnete Curven $U_{\lambda\mu 1}$ und $U_{\lambda\mu 2}$ einander zu. Die beiden Netze dritter Stufe constituiren eine Schaar collinearer Netze, von denen homologe Curven in projectivischen Büscheln angeordnet liegen.

Den beiden gegebenen Schaaren projectivischer Büschel gehören andere Schaaren in allen übrigen Netzen dritter Stufe zu. Homologe Büschel in allen diesen Schaaren ordnen sich zu einer neuen Schaar; dasselbe ist mit homologen Leitbüscheln der Fall.

Wir erhalten mithin eine dreifache Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma})$ von Curven $U_{\alpha\beta\gamma}$; bei festem β und γ erhalten wir Büschel

$$U_{1\beta\gamma} U_{2\beta\gamma} U_{3\beta\gamma} \dots U_{\alpha\beta\gamma},$$

die alle unter sich projectivisch sind und auf ein festes Strahlbüschel $o_1' o_1'' o_1''' \dots o_1^{(\alpha)}$ bezogen werden können. Bei festem α und γ erhalten wir andere projectivische Büschel

$$U_{\alpha 1\gamma} U_{\alpha 2\gamma} U_{\alpha 3\gamma} \dots U_{\alpha\beta\gamma},$$

die alle auf ein Strahlbüschel $o_2' o_2'' o_2''' \dots o_2^{(\beta)}$ bezogen werden können. Schliefslich können die Büschel

$$U_{\alpha\beta 1} U_{\alpha\beta 2} U_{\alpha\beta 3} \dots U_{\alpha\beta\gamma}$$

sämmtlich zu dem Strahlbüschel $o_3' o_3'' o_3''' \dots o_3^{(\gamma)}$ in Beziehung gesetzt werden. Alsdann gehört eben jedem Tripel $o_1^{(\lambda)} o_2^{(\mu)} o_3^{(\nu)}$ eine Curve $U_{\lambda\mu\nu}$ zu. Wenn man zwei Strahlen festhält, so bewegt sich die Curve projectivisch zum dritten. Läfst man für eine feste Lage eines Strahles und für andere und andere Lagen eines zweiten Strahles den dritten immer dasselbe Büschel beschreiben, so durcheilt $U_{\alpha\beta\gamma}$ die Büschel einer Schaar.

Irgend zwei dreifache Gesammtheiten $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma 2})$ setzen die Netze 7 ter Stufe, denen sie angehören, auf eine einzige Art in colli-

neare Beziehung. Wenn man α, β und γ entweder $=1$ oder $=2$ macht, so erhält man acht Paare entsprechender Curven. Weist man noch U_{3331} und U_{3332} einander zu, so ist die Collineation eindeutig gegeben, und eben in ihr entsprechen $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma 2})$ einander. Liegen beide in unserem Netze (U), so erhält man offenbar eine ganze Schaar $(U_{\alpha\beta\gamma 1})$ $(U_{\alpha\beta\gamma 2})\,(U_{\alpha\beta\gamma 3})\ldots(U_{\alpha\beta\gamma\delta})$, deren Curven eine vierfache Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\delta})$ ausmachen.

Indem man auf gleiche Art weiter schliefst, kommt man endlich zu einer $n$fachen Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu})$ aus Curven unseres Netzes (U). Jede einzelne Curve kann einer Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)} o_2^{(\beta)} o_3^{(\gamma)} o_4^{(\delta)} \ldots o_n^{(\nu)}$ zugeordnet werden. Werden $n-1$ der Strahlen festgehalten, so bewegt sich der letzte Strahl mit der Curve projectivisch. Giebt man einem vorletzten Strahle andere und andere Lagen, so entsprechen dem vom letzten Strahle beschriebenen Büschel die Curvenbüschel einer bestimmten Schaar.

Jetzt ergänzt man alle Strahlen $o'_{n+1}, o''_{n+1}, o'''_{n+1}, \ldots$ des $(n+1)$ten Büschels durch dieselbe Curve K $(\lambda-1)$ter Ordnung. Wir nehmen an, dafs dies besondere Büschel in dem Netze (U) bereits vorkommt. Auf dasselbe projiciren wir von einem Netze $(\lambda-1)$ter Stufe aus alle Curven der Gesammtheit $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu})$. Sieht man bei den Projectionen von der unveränderlichen Curve K ab, so erhält man aus jeder Curve $U_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\nu}$ einen Strahl, aus jedem Curvenbüschel ein Strahlbüschel und aus den Curvenbüscheln einer Schaar Strahlbüschel einer Schaar. In ihre gemeinsamen Strahlen werden zwei bestimmte Leitbüschel der ersteren Schaar projicirt.

Werden $n-2$ der ersten Strahlen, etwa $o_{i_3}^{(\gamma)}, o_{i_4}^{(\delta)}, \ldots o_{i_n}^{(\mu)}$, festgehalten, so besteht zwischen den allein beweglichen drei Strahlen o_{i_1}, o_{i_2}, o_{n+1} die im § 31 behandelte trilineare Beziehung. Betrachtet man daher die beiden ersten Strahlen als beweglich, den letzten aber als fest, wo er dann die verschiedenen Bezeichnungen

$$o_{n+1}^{(\alpha_1\beta_1\gamma\delta\ldots\nu)},\ o_{n+1}^{(\alpha_2\beta_2\gamma\delta\ldots\nu)},\ o_{n+1}^{(\alpha_3\beta_3\gamma\delta\ldots\nu)},\ \ldots$$

erfährt, so beschreiben (§ 31) die beiden ersteren projectivische Strahlbüschel

$$o_{i_1}^{(\alpha_1)}\, o_{i_1}^{(\alpha_2)}\, o_{i_1}^{(\alpha_3)} \ldots \;\overline{\wedge}\; o_{i_2}^{(\beta_1)}\, o_{i_2}^{(\beta_2)}\, o_{i_2}^{(\beta_3)} \ldots$$

Man sieht mithin, dafs zwischen irgend $n+1$ Strahlbüscheln eine $(n+1)$-fach lineare Beziehung eingeleitet werden kann.

Da zwei beliebige Gesammtheiten $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 1})$ und $(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 2})$ zu einer ganzen Schaar

$$(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 1})(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 2})(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu 3})\ldots(U_{\alpha\beta\gamma\ldots\nu\varrho})$$

solcher Gesammtheiten Veranlassung geben, so ist durch irgend zwei verschiedene $(n+1)$fach lineare Systeme, welche für die genannten Strahlbüschel bestehen, sofort eine ganze Schaar linearer Systeme gegeben. Werden $n-1$ der Strahlen festgehalten, und durchläuft einer der beiden anderen Strahlen ein Strahlbüschel, so gehören demselben in den verschiedenen Systemen die Büschel einer Schaar zu; die Leitbüschel aller dieser Schaaren sind zu einander projectivisch.

§ 175. Jede Curve $(n+1)$ter Ordnung kann auf mehrfache Art als Erzeugniſs $(n+1)$fach linear bezogener Strahlbüschel dargestellt werden. Die Centren $O_1, O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ dieser Büschel können auf der Curve beliebig gewählt werden. In jedem Curvenpunkte treffen sich die $n+1$ zusammengehörigen Strahlen einer Gruppe. Die Curven eines Büschels, von dem $O_1, O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ Grundpunkte sind, können durch die $(n+1)$fach linearen Systeme einer Schaar dargestellt werden. Das Büschel erweist sich als projectivisch zu der Schaar. Umgekehrt erzeugt jedes $(n+1)$fach lineare System eine Curve $(n+1)$ter Ordnung, und jede Schaar $(n+1)$fach linearer Systeme erzeugt ein Büschel von Curven $(n+1)$ter Ordnung.

Wir erhalten diese Sätze durch Schlüsse von n auf $n+1$. Die Curve K^{n+1} ist das Erzeugniſs der Büschel

$$o_1' o_1'' o_1''' \ldots o_1^{(\alpha)} \;\overline{\wedge}\; K_1^n K_2^n K_3^n \ldots K_\alpha^n .$$

Wir können $O_2, O_3, \ldots O_{n+1}$ als Grundpunkte des letzteren Büschels betrachten. Diese Curven $n$ter Ordnung sind Erzeugnisse $n$fach linearer Systeme einer zum Strahlbüschel projectivischen Schaar. Halten wir irgend $n-2$ Strahlen, etwa $o_2^{(\beta)}, o_3^{(\gamma)}, o_4^{(\delta)}, \ldots o_{n-1}^{(\mu)}$, fest, so beschreiben o_n und o_{n+1} für jede Curve K_α projectivische Strahlbüschel

$$o_n' o_n'' o_n''' \ldots o_n^{(\nu)} \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(1,\alpha)} o_{n+1}^{(2,\alpha)} o_{n+1}^{(3,\alpha)} \ldots o_{n+1}^{(\nu,\alpha)} ;$$

die letzteren Büschel durchlaufen mit wechselnden α eine Schaar. Ihre Leitbüschel

$$o_{n+1}^{(1,1)} o_{n+1}^{(1,2)} o_{n+1}^{(1,3)} \dots o_{n+1}^{(1,\alpha)} \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(2,1)} o_{n+1}^{(2,2)} o_{n+1}^{(2,3)} \dots o_{n+1}^{(2,\alpha)} \;\overline{\wedge}\; \dots \;\overline{\wedge}\; o_{n+1}^{(\nu,1)} o_{n+1}^{(\nu,2)} o_{n+1}^{(\nu,3)} \dots o_{n+1}^{(\nu,\alpha)}$$

sind sämmtlich projectivisch zu $o'_1 o''_1 o'''_1 \dots o_1^{(\alpha)}$. Wenn man also die Strahlen $o_2, o_3, \dots o_{n-1}$ fixirt, dem $n$ten andere und andere Lagen giebt, und den ersten ein bestimmtes Büschel durchlaufen läfst, so beschreibt der $(n+1)$te Strahl zu diesem projectivisch die Strahlbüschel einer Schaar. Die $n+1$ Strahlbüschel sind daher in $(n+1)$fach linearer Beziehung. In jedem Curvenpunkte schneiden sich $n+1$ zusammengehörige Strahlen.

Dieses Verfahren dient umgekehrt auch zu dem Nachweise, dafs durch jedes $(n+1)$fach lineare System eine Curve $(n+1)$ter Ordnung bestimmt ist.

Die Curven $(n+1)$ter Ordnung K_1^{n+1}, K_2^{n+1} eines Büschels sind die Erzeugnisse des Strahlbüschels $o'_1 o''_1 o'''_1 \dots o_1^{(\alpha)}$ mit den Curvenbüscheln

$$K_{11}^n K_{21}^n K_{31}^n \dots K_{\alpha 1}^n \;\overline{\wedge}\; K_{12}^n K_{22}^n K_{32}^n \dots K_{\alpha 2}^n .$$

Hieraus leiten wir lineare Darstellungen derselben ab und aus ihnen eine Schaar $(n+1)$fach linearer Systeme; dieselbe setzen wir zu dem Strahlbüschel $o' o'' o''' \dots$ projectivisch. Bei einer festen Zusammenstellung $o_1^{(\alpha)}, o_2^{(\beta)}, \dots o_{n-1}^{(\mu)}$ gehören dem Büschel $o'_n o''_n o'''_n \dots o_n^{(\nu)}$, welches der vorletzte Strahl beschreibt, für die drei zu o', o'' und o''' gehörigen $(n+1)$-fach linearen Systeme die projectivischen Strahlbüschel einer Schaar zu. Hält man also $o_1^{(\alpha)}$ fest, so bestimmen die drei $n$fach linearen Systeme, die wir für $O_2, O_3, \dots O_{n+1}$ übrig behalten, die Curven $K_{\alpha 1}^n, K_{\alpha 2}^n, K_{\alpha 3}^n$ eines Büschels. Nun ist aus den $n+2$ Strahlbüscheln mit den Centren O, $O_1, O_2, \dots O_{n+1}$ ein $(n+2)$fach lineares System zusammengesetzt. Halten wir die Strahlen $o''', o_2^{(\beta)}, o_3^{(\gamma)}, \dots o_{n-1}^{(\mu)}$ in irgend einer Lage fest, so gehören zu einem festen, von dem vorletzten Strahle beschriebenen Büschel für die verschiedenen Lagen $o'_1, o''_1, o'''_1, \dots o_1^{(\alpha)}$ die Büschel einer projectivischen Schaar. Mithin erzeugen die $n$fach linearen Systeme, die mit Hülfe der n letzteren Büschel sich bestimmen lassen, die Curven $K_{13}^n, K_{23}^n, K_{33}^n, K_{43}^n, \dots$ eines zu $o'_1 o''_1 \dots o_1^{(\alpha)}$ projectivischen Büschels. Diese verschiedenen Büschel gehören zu einer Schaar, weil auch $K_{\alpha 1}^n$, $K_{\alpha 2}^n, K_{\alpha 3}^n, K_{\alpha 4}^n, \dots$ Curven eines Büschels sind. Nun bestimmen die Büschel dieser Schaar mit $o'_1 o''_1 o'''_1 \dots$ die Curven des gegebenen Büschels. Dieselben können also andererseits durch die $(n+1)$fach linearen Systeme der von uns construirten Schaar erzeugt werden.

§ 176. Kennt man von einem Büschel von Curven $n$ter Ordnung n gemeinsame Punkte $O_1, O_2, \ldots O_n$ und für irgend zwei von ihnen die Darstellungen mit Hülfe der von jenen Punkten ausgehenden Strahlbüschel, so kann man für jede andere Curve des Büschels, von der ein Punkt bekannt ist, eine Darstellung finden unter alleiniger Anwendung des Lineals, wenn für alle auftretenden imaginären Strahlen Darstellungen gegeben sind, die zu irgend einem Wurfe (ABA_1B_1) projectivisch sind.

Es sei O der Punkt, durch welchen die Curve des Büschels fixirt wird, $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$ seien die festen Grundpunkte, a_n' und a_n'' die Strahlen, welche für die gegebenen Darstellungen der Zusammenstellung $OO_1, OO_2, \ldots OO_{n-1}$ zugehören. Lassen wir nun den vorletzten Strahl die Reihe $O_{n-1}O, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1} \ldots$ durchlaufen, so müssen die zugehörigen Strahlen des letzten Büschels für die beiden gegebenen Darstellungen die projectivischen Strahlbüschel

$$a_n' b_n' c_n' d_n' \ldots \barwedge a_n'' b_n'' c_n'' d_n'' \ldots$$

beschreiben, welche wir kennen; die zu ihnen projectivische und ihrer Schaar angehörige Reihe

$$O_n O, b_n, c_n, d_n, \ldots$$

liefert uns alsdann unendlich viele Sätze

$$O_1O, \ldots O_{n-2}O, O_{n-1}O, O_nO \; ; \; O_1O, \ldots O_{n-2}O, b_{n-1}, b_n \; ;$$
$$O_1O, \ldots O_{n-2}O, c_{n-1}, c_n \; ; \ldots ,$$

die alle der gesuchten Darstellung angehören. Die Strahlen a_n, b_n, c_n aber finden sich durch eine lineare Construction. Man schneide die drei Büschel durch eine der Einfachheit wegen reelle Gerade l in den Reihen

$$A_n' B_n' C_n', \ldots \barwedge A_n'' B_n'' C_n'' \ldots \barwedge A_n B_n C_n \ldots$$

A_n als der Schnittpunkt von OA_n und l ist gegeben. Durch die Strahlbüschel

$$\mathfrak{A}_0'(A_n' B_n' C_n' \ldots) \barwedge \mathfrak{A}_0''(A_n'' B_n'' C_n'')$$

erzeuge man nun einen Kegelschnitt $\mathfrak{ABCD} \ldots$ Jeder einzelne Punkt ergiebt sich im Falle der Imaginareität durch eine lineare Construction, wenn $\mathfrak{A}_0'$ und $\mathfrak{A}_0''$ reell sind. Denn von A_n' und A_n'' kennen wir jedenfalls Darstellungen, die zu dem Normalwurf projectivisch sind und von irgend zwei festen Strahlen $\mathfrak{A}_0'M$ und $\mathfrak{A}_0''N$ ausgehen. Hieraus findet man aber linear diejenigen zum Normalwurf projectivischen Darstel-

lungen, die von $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{A}_0''$ resp. $\mathfrak{A}_0''\mathfrak{A}_0'$ ausgehen, hieraus endlich den Punkt $\mathfrak{A}$ in einer zum Normalwurf projectivischen Darstellung. Analoges gilt für $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ Nunmehr ziehen wir die Gerade $A_n\mathfrak{A}$, was ebenfalls linear angeht, weil A_n zu dem Normalwurf projectivisch dargestellt ist. Man suche alsdann (linear) den zweiten Schnittpunkt $\mathfrak{A}_0$ derselben mit dem Kegelschnitt. Das Büschel $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\ldots)$ projicirt nun die Reihe $A_nB_n C_n\ldots$; von O_n aus wird dieselbe in $a_nb_nc_n\ldots$ projicirt. Hält man jetzt $O_1O, O_2O, \ldots O_{n-3}O$ und b_n fest, und läfst man den von O_{n-1} ausgehenden Strahl das Büschel $a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}d_{n-1}\ldots$ durchlaufen, so gehören ihm in den drei Darstellungen die projectivischen Büschel

$$a'_{n-2}, b'_{n-2}, c'_{n-2}, d'_{n-2}, \ldots \;\overline{\wedge}\; a''_{n-2}, b''_{n-2}, c''_{n-2}, d''_{n-2}, \ldots \;\overline{\wedge}\; O_{n-2}O, b_{n-2}, c_{n-2}, d_{n-2}, \ldots$$

zu, von denen die beiden ersten nach der Voraussetzung gegeben, das dritte aber nach dem so eben gelehrten Verfahren linear zu construiren ist. So erhält man zu den Strahlen $O_1O, \ldots O_{n-3}O, c_{n-1}, b_n$ den bestimmten linear zugehörigen d_{n-2}. Endlich erhält man durch Fortsetzung dieses Verfahrens linear den Strahl a_1, der für die betrachtete Curve den willkürlich gewählten Strahlen $b_2, c_3, d_4, \ldots$ entspricht, die von $O_2, O_3, O_4, \ldots$ ausgehen[41].

§ 177. Haben alle Curven K^n zweier Büschel die Grundpunkte $O_1, O_2, O_3, \ldots O_n$ mit einander gemeinsam, und gehört beiden Büscheln eine Curve gleichzeitig an, so kann man die lineare Darstellung der letzteren unter alleiniger Benutzung des Lineals finden, wofern in jedem Büschel zwei Curven bereits linear dargestellt sind.

Haben alle Curven $n$ter Ordnung eines Netzes νter Stufe die Punkte $O_1, O_2, \ldots O_n$ mit einander gemein, ist in demselben ein beliebiges Netz $(\nu-1)$ter Stufe gegeben und ein einzelnes Büschel, dessen Curven alle durch $B_1, B_2, \ldots B_{\nu-2}$ gehen, so kann man allein mit Hülfe des Lineals die Darstellung der Curve finden, welche dem Büschel mit dem Netze gemeinsam ist, wofern lineare Darstellungen von ν Curven des Netzes bekannt sind.

Ist im ersten Falle noch ein Grundpunkt B_1 oder B_2 des einen oder des anderen Büschels bekannt, so ist die Aufgabe ohne weiteres gelöst, denn man braucht nur die Darstellung der Curve aufsuchen, die je

in dem anderen Büschel durch B_1 oder B_2 bestimmt wird. Im anderen Falle aber benutzt man, dafs in jeder linearen Darstellung den $n-1$ Strahlen $O_n O_1, O_n O_2, \ldots O_n O_{n-1}$ die Tangente der betreffenden Curve in O_n zugehören mufs. Die betrachtete Curve mufs daher sicherlich in beiden Büscheln so dargestellt sein, dafs dieser besonderen Gruppe derselbe Strahl aus der Reihe $a_n b_n c_n d_n \ldots$ zugehört. In allen diesen Darstellungen von Curven des ersten Büschels entsprechen der Gruppe $O_{n-1} O_1$, $O_{n-1} O_2, \ldots O_{n-1} O_{n-2}, O_{n-1} O_n$ die Strahlen eines Büschels, das zu dem vorigen projectivisch ist:

1) $$a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} d_{n-1} e_{n-1} \ldots (\overline{\wedge}\ a_n b_n c_n d_n e_n \ldots)$$

Aber auch in den Darstellungen der Curven des zweiten Büschels müssen dieser Zusammenstellung, damit die den Tangenten $a_n, b_n, c_n, d_n, \ldots$ entsprechenden Curven desselben entstehen, die Strahlen eines projectivischen Büschels

2) $$a'_{n-1} b'_{n-1} c'_{n-1} d'_{n-1} e'_{n-1} \ldots (\overline{\wedge}\ a_n b_n c_n d_n e_n \ldots)$$

zugeordnet werden. 1) und 2) haben im Allgemeinen zwei gemeinsame Strahlen, deren einer die Tangente in O_{n-1} ist und der früheren in O_n projectivisch entspricht. Um ihn auszusondern, machen wir dieselbe Überlegung mit Vertauschung von $n-2$ gegen $n-1$. Wir erhalten dann zwei zu jenen projectivische Strahlbüschel

3) $$a_{n-2} b_{n-2} c_{n-2} d_{n-2} \ldots \overline{\wedge}\ 4)\ a'_{n-2} b'_{n-2} c'_{n-2} d'_{n-2} \ldots;$$

ein Coincidenzstrahl derselben ist die Tangente der gesuchten Curve in O_{n-2}. Ihm entspricht nach seiner Bedeutung die Tangente in O_{n-1} in den beiden Büscheln 1) und 2); dem zweiten Coincidenzstrahl von 3) und 4) aber entsprechen in den Büscheln 1) und 2) zwei von einander verschiedene Strahlen. Der andere Coincidenzstrahl wird also zu dem zweiten der Büschel 1) und 2) nicht homolog sein.

Man beziehe nun die Büschel 1) und 3) auf das Hülfsbüschel $p_1 p_2 p_3 \ldots$ projectivisch. Den Strahlbüscheln 2) und 4) gehören dabei zwei unter sich und zu jenem projectivische Büschel $p'_1 p'_2 p'_3 \ldots$ und $p''_1 p''_2 p''_3 \ldots$ zu. Alle drei haben einen Coincidenzstrahl gemeinsam, während die beiden anderen Coincidenzstrahlen zwischen $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und $p'_1 p'_2 p'_3 \ldots$, resp. zwischen $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und $p''_1 p''_2 p''_3 \ldots$, von einander verschieden sind. Nach dem bekannten Steiner'schen Verfahren kann man

linear zwei Geraden herstellen, die auf einem beliebigen durch O gelegten Kegelschnitt die zweiten Schnittpunkte der gesuchten Coincidenzstrahlenpaare ausschneiden. Beide müssen einander in dem Schnittpunkt des gemeinsamen Coincidenzstrahls mit dem Kegelschnitt treffen; eben deswegen läfst sich dieser linear auffinden. Ihm entsprechen in den beiden Büscheln in O_{n-1} und O_{n-2} die beiden Tangenten der gesuchten Curve. Aus den beiden gegebenen Schaaren linearer Systeme erhält man nunmehr im Allgemeinen zwei verschiedene lineare Darstellungen der Curven. Beiden sind die Strahlengruppen gemeinsam, die nach Curvenpunkten führen.

Um nun die zweite Aufgabe zu lösen, denken wir uns irgend ν von einander unabhängige Curven $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\nu$ des Netzes $(\nu-1)$ter Stufe hergestellt. Es seien alsdann $K'_1, K'_2, K'_3, \ldots K'_{\nu-1}$ Curven $n$ter Ordnung der Büschel $K_1, K_\nu; K_2, K_\nu; K_3, K_\nu; \ldots K_{\nu-1}, K_\nu$, die alle durch B_1 hindurchgehen; sie bilden ein Netz $(\nu-2)$ter Stufe, in dem die gesuchte Curve liegt. Es seien ferner $K''_1, K''_2, \ldots K''_{\nu-2}$ die durch B_2 bestimmten Curven der Büschel $K'_1, K'_{\nu-1}; K'_2, K'_{\nu-2}; K'_3, K'_{\nu-1}; \ldots K'_{\nu-2}, K'_{\nu-1}$. Sie bilden ein Netz $(\nu-3)$ter Stufe, dem die gesuchte Curve angehört und enthalten alle die Punkte B_1 und B_2. Hat man in dieser Art allgemein μ Curven $K_1^{(\mu)}, K_2^{(\mu)}, K_3^{(\mu)}, \ldots K_{\nu-\mu}^{(\mu)}$ des Netzes $(\nu-1)$ter Stufe hergestellt, welche $B_1, B_2, \ldots B_\mu$ enthalten und ein Netz $(\nu-\mu-1)$ter Stufe bilden, das die gesuchte Curve enthält, so bilden die Curven $K_1^{(\mu+1)}, K_2^{(\mu+1)}, K_3^{(\mu+1)}, \ldots K_{\nu-\mu-1}^{(\mu+1)}$ der Büschel $K_1^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; K_2^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; K_3^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}; \ldots K_{\nu-\mu-1}^{(\mu)}, K_{\nu-\mu}^{(\mu)}$, welche $B_{\mu+1}$ enthalten, ein Netz $(\nu-\mu-2)$ter Stufe, dem die gesuchte Curve angehört. So kommt man endlich auf ein Büschel $K_1^{(\nu-2)} K_2^{(\nu-2)}$, welches mit dem gegebenen die gesuchte Curve gemeinsam hat. Während nun die linearen Darstellungen, aus denen $K_1^{(\nu-2)}$ und $K_2^{(\nu-2)}$ entstehen, aus der vielfachen Anwendung des Satzes vom § 176 hervorgehen, sucht man diejenige der zu betrachtenden Curve nach der Methode, welche in dem ersten Theile des jetzigen § auseinander gesetzt wurde.

§ 178. Es seien $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte $[O, A_1, A_2, \ldots A_{2n+1}, B_1, B_2, \ldots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}]$ in einer reellen Ebene gegeben mit der Bestimmung, durch dieselben eine Curve $(n+1)$ter Ordnung hindurchzulegen.

Man kennzeichne durch $[X_1 X_2 \dots X_{n-1}]$ ein Büschel von Curven K^n, welches aufser durch die Grundpunkte $B_1, B_2, \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ noch durch die in Klammern gesetzten $n - 1$ anderen Punkte bestimmt wird, ferner bezeichne man mit $a_1, a_2, \dots a_{2n+1}$ die Strahlen $OA_1, OA_2, OA_3, \dots OA_{2n+1}$, mit a einen beliebigen Strahl des Büschels O.

Die zu lösende Aufgabe ist dann $X_1, X_2, \dots X_{n-1}$ der projectivischen Beziehung

$$a_1 a_2 \dots a_{2n+1} \;\overline{\wedge}\; [X_1 X_2 \dots X_{n-1}](A_1 A_2 \dots A_{2n+1})$$

gemäfs zu bestimmen[42].

Man setze

$$[A_2 A_3 \dots A_n](A_1, {}^{1}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \;\overline{\wedge}\; (a_1, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho})$$
$$[A_3 A_4 \dots A_1](A_2, {}^{2}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \;\overline{\wedge}\; (a_2, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho})$$
$$[A_4 A_5 \dots A_2](A_3, {}^{3}_{n+\varrho}, A_{2n+1}, A_{n+\varrho}) \;\overline{\wedge}\; (a_3, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[A_1 A_2 \dots A_{n-1}](A_n, {}^{n}_{n+\varrho}, A_{2n+\varrho}, A_{n+\varrho}) \;\overline{\wedge}\; (a_n, a, a_{2n+1}, a_{n+\varrho})$$
$$\varrho = 1, 2, 3, \dots n.$$

Dem Strahle a gehört dann diejenige Curve K zu, welche den n Netzen $(n-1)$ter Stufe

1) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+1}, [A_3 A_4 \dots A_n]^2_{n+1}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+1}$

2) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{n+2}, [A_3 A_4 \dots A_1]^2_{n+2}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{n+2}$

. . . .

n) $[A_2 A_3 \dots A_n]^1_{2n}, [A_3 A_4 \dots A_n]^2_{2n}, \dots [A_1 A_2 \dots A_{n-1}]^n_{2n}$

gleichzeitig angehört. Von irgend einem Punkte X der Ebene kann man mit alleiniger Hülfe des Lineals entscheiden, ob er zur Curve gehört oder nicht, wofern alle gegebenen imaginären Punkte und Geraden gleich X projectivisch zu einem Normalwurf dargestellt sind.

Die gegebene Lösung des Problems setzt die analoge Aufgabe für Curven $n$ter Ordnung voraus. Aus dem $n$fachen Netz, welches die durch die Punkte $B_1 \dots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ gehenden Curven $n$ter Ordnung noch bilden, werden durch Angabe von $2n + 1$ verschiedenen Punkten ebenso viele verschiedene $(n-1)$fache Netze herausgehoben. Die Aufgabe ist nun, ein einzelnes Netz erster Stufe [ein Büschel] so zu legen, dafs die Reihe der Curven, die ihm mit den genannten Netzen gemeinsam sind, zu einer gegebenen Reihe von $2n + 1$ Strahlen projectivisch ist. In dieser Fassung bezieht

sich das Problem auf alle geometrischen Netze, mögen sie aus gleichzahligen Anordnungen von Punkten (Involutionsnetz), aus Curven gleicher Ordnung, oder, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht, aus Flächen bestehen. Wir ersetzen der bequemeren Ausdrucksweise wegen diese allgemeine Netzaufgabe durch ihre reciproke, wo also $2n+1$ beliebige Glieder $G_1, G_2, \ldots G_{2n+1}$ des Netzes gegeben sind, dagegen ein Netz N $(n-2)$ter Stufe so zu suchen ist, dafs

$$N(G_1 G_2 \ldots G_{2n+1}) \barwedge a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}$$

ist, wobei $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ Elemente eines einförmigen Gebildes sind. Man betrachte nun die Reihe $n$ten Ranges

$$G^{(1)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+1} \barwedge a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+1}, \qquad 1)$$

wo $G^{(1)}$ durch a eindeutig bestimmt wird (§ 104). Jedes Netzbüschel, welches $G^{(1)}, G_1, G_2, \ldots G_n, G_{2n+1}$ mit irgend $n-1$ festen Gliedern der Reihe 1) verbindet, ist zu $a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1}$ projectivisch. Umgekehrt mufs jeder Träger $(n-2)$ter Stufe der genannten Art die Reihe $n$ten Ranges in $n-1$ Gliedern treffen.

Jetzt betrachten wir neben 1) noch die $n-1$ anderen Reihen $n$ten Ranges

$$\left.\begin{array}{lll} G^{(2)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+2} & \barwedge & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+2} \\ G^{(3)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{n+3} & \barwedge & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{n+3} \\ \cdots & & \cdots \\ G^{(n)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1} G_{2n} & \barwedge & a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1} a_{2n} \end{array}\right\} \qquad 2)$$

Im allgemeinen Falle können keine zwei dieser n Reihen identisch sein. Daher ist durch $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, \ldots G^{(n)}$ ein bestimmtes Netz $(n-1)$ter Stufe bestimmt, das aufser in $G^{(1)}$ noch in $n-1$ anderen Gliedern der Reihe $n$ten Ranges 1) begegnet. Von dem sie verbindenden Netze N $(n-2)$-ter Stufe aus wird $G^{(1)} G_1 G_2 \ldots G_n G_{2n+1}$ durch ein zu $a a_1 a_2 \ldots a_n a_{2n+1}$ projectivisches Büschel projicirt. Nun kann aber nach der besonderen Natur von N $G^{(1)}$ mit $G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}, \ldots G^{(n)}$ vertauscht werden; defshalb mufs N alle Reihen $n$ten Ranges in je $n-1$ Gliedern treffen. Von hier aus werden daher alle in den Reihen 2) links stehenden Gruppirungen durch Büschel projicirt, die zu den Reihen rechts projectivisch sind; man hat also

$N(G^{(\lambda)}G_1G_2G_3\ldots G_nG_{n+1}\ldots G_{2n}G_{2n+1}) \;\overline{\wedge}\; aa_1a_2a_3\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{2n}a_{2n+1}$.

Nun beachte man die Bestimmung von $G^{(\lambda)}$, welche offenbar ganz allgemein so vor sich geht, wie sie an dem speciellen Fall der Involution μten Ranges im § 104 gelehrt wird, so dafs man also $G^{(\lambda)}$ aus den Beziehungen

$$[G_2G_3\ldots G_n](G_1G_{2n+1}G_{n+\lambda}G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_1a_{2n+1}a_{n+\lambda}a)$$
$$[G_3\ldots G_nG_1](G_2G_{2n+1}G_{n+\lambda}G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_2a_{2n+1}a_{n+\lambda}a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[G_1G_2\ldots G_{n-1}](G_nG_{2n+1}G_{n+\lambda}G^{(\lambda)}) \;\overline{\wedge}\; (a_na_{2n+1}a_{n+\lambda}a)$$

erhält. Geht man nun wieder zu dem Curvennetz zurück, so entsprechen den Gliedern $G_1, G_2, G_3, \ldots$ je die durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bestimmten Netze $(n-1)$ter Stufe, dem Netze $G_2G_3\ldots G_n$ das Curvenbüschel $[A_2A_3\ldots A_n]$, dem Netze $(n-1)$ter Stufe $G_2G_3\ldots G_nG^{(1)}$ die Curve $[A_2A_3A_4\ldots]^1_{n+1}$ und der Gruppe $G^{(1)}$ das die n Curven

3) $[A_2A_3\ldots A_n]^1_{n+1}, [A_3A_4\ldots A_1]^2_{n+1}, \ldots [A_1A_2\ldots A_{n-2}]^n_{n+1}$

umfassende Netz $(n-1)$ter Stufe; dem Netze $(n-1)$ter Stufe $G^{(1)}G^{(2)}\ldots G^{(n)}$ entspricht, wie wir es behaupteten, die Curve, welche dem Netze 3) mit den $n-1$ anderen

$$4)\quad \begin{cases} [A_2A_3\ldots A_n]^1_{n+2}, [A_3A_4\ldots A_1]^2_{n+2}, \ldots [A_1A_2\ldots A_{n-1}]^n_{n+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [A_2A_3\ldots A_n]^1_{2n}, [A_3A_4\ldots A_1]^2_{2n} \ldots [A_1A_2\ldots A_{n-1}]^n_{2n} \end{cases}$$

gemeinsam ist. Die Darstellungen, welche von irgend n der Punkte B aus allen diesen Curven zukommen, mögen sich linear auffinden lassen, wie überhaupt diejenige einer durch $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$ Punkte bestimmten Curve K^n. Wir wollen dann zeigen, dafs auch die lineare Darstellung der Curve $(n+1)$ter Ordnung sich mit alleiniger Benutzung des Lineals auffinden läfst.

Mit dem ersten Netze $(n-1)$ter Stufe

$$[A_2A_3\ldots A_n]^1_{n+1}[A_3A_4\ldots A_nA_1]^2_{n+1}\ldots[A_1A_2\ldots A_{n-1}]^n_{n+1}$$

hat irgend ein anderes

$$[A_2A_3\ldots A_n]^1_{n+\lambda}[A_3A_4\ldots A_nA_1]^2_{n+\lambda}\ldots[A_1A_2\ldots A_{n-1}]^n_{n+\lambda}$$

ein Netz $(n-2)$ter Stufe gemeinschaftlich. Dasselbe kann durch die $n-1$ Curven

$$[A_3 A_4 \ldots A_n]^2_{n+\lambda, n+1}\,; [A_4 \ldots A_n A_2]^3_{n+\lambda, n+1}\,; \ldots [A_2 A_3 \ldots A_{n-1}]^n_{n+\lambda, n+1}$$

des ersten Netzes bestimmt werden, die zugleich den Büscheln

$$[A_2 A_3 \ldots A_n]^1_{n+\lambda}\,, [A_3 A_4 \ldots A_n A_1]^2_{n+\lambda}\,; [A_2 A_3 \ldots A_n]^1_{n+\lambda}\,, [A_4 A_5 \ldots A_1 A_2]^3_{n+\lambda}\,; \ldots$$
$$[A_2 A_3 \ldots A_n]^1_{n+\lambda}\,, [A_1 A_2 \ldots A_{n-1}]^n_{n+\lambda}$$

angehören. Ihre Darstellungen kann man (§ 177) mit alleiniger Hülfe des Lineals auffinden. Das Problem ist also darauf zurückführbar, die Curve aufzufinden, welche $n-1$ in einem Netze $(n-1)$ter Stufe gelegenen Netzen $(n-2)$ter Stufe gemeinsam ist. Ähnlich bestimmt man in dem ersten derselben $n-2$ Netze $(n-3)$ter Stufe, denen ebenfalls die gesuchte Curve gemeinschaftlich ist. Schliefslich erhält man die linearen Darstellungen von zwei Büscheln, denen die a entsprechende K^n gleichzeitig angehört; hieraus kann man aber ihre lineare Darstellung ableiten.

Fünftes Capitel. §§ 179–196.

Analytische Erläuterungen zu den vorstehenden geometrischen Entwickelungen.

§ 179. Von Staudt identificirt, wie wir gesehen hatten, zwei conjungirt imaginäre Punkte oder Strahlen mit einer gegebenen elliptischen Punkt- oder Strahleninvolution. Die Trennung eines Paares wird durch Betrachtung des Sinnes bewirkt. Auf einer Geraden liegen die Punkte, deren Darstellungen, was Involution und Sinn anbetrifft, zu ihrer eigenen Darstellung perspectivisch sind.

Auch die imaginäre Gerade im analytischen Sinne kann als Ordnungslinie einer elliptischen Involution betrachtet werden. Wenn

1) $p \equiv \alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0$ und $q \equiv \alpha_1(x - x_1) + \beta_1(y - y_1) = 0$

die Gleichungen reeller Geraden sind, so ist

2) $$p + iq = 0$$

die allgemeinste Gleichung einer imaginären Geraden, die nur den reellen Punkt x_1, y_1 enthält. Dieselbe ist der eine imaginäre Doppelstrahl der Involution

3) $$p^2 - q^2 + 2\lambda pq = 0.$$

Da jede elliptische Involution nur eine Darstellung in der Form 3) zuläfst, so kann man sie geradezu als Vertreterin der beiden Strahlen $p + iq = 0$ und $p - iq = 0$ auffassen. Für den Schnittpunkt von $p + iq = 0$ mit einer reellen Geraden mit der Gleichung

4) $$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

erhält man die Coordinaten, indem man zwischen den Gleichungen 2) und 4) zuerst x und dann y eliminirt. Andererseits ist natürlich der betreffende Schnittpunkt ein Doppelelement der Involution, welche durch die Strahlen-

involution 3) auf der Geraden 4) bestimmt wird. Hieraus sieht man, dafs irgend zwei conjungirte Strahlen von Staudt's mit zwei imaginären Strahlen $p+iq=0$ und $p-iq=0$, irgend zwei conjungirte Punkte auch mit zwei imaginären Punkten im analytischen Sinne identisch sein müssen. Alle imaginären Punkte, die im synthetischen Sinne auf zwei conjungirten Geraden liegen, gehören auch zwei bestimmten imaginären Geraden im analytischen Sinne an. Es fragt sich nur, ob das analytische Trennungsprincip mit dem synthetischen in Übereinstimmung gebracht werden kann[43].

Um dies zu erweisen, setzen wir zunächst die imaginären Punkte, die auf den beiden Axen im analytischen Sinne liegen, in Verbindung mit synthetisch definirten imaginären Punkten. Der Punkt $x=a+bi$ der x Axe kann als der eine Doppelpunkt der Involution

$$(x-a)^2-b^2+2\lambda b(x-a)=0 \qquad 5)$$

aufgefafst werden. Jede elliptische Involution kann in nur einer Weise in dieser Form dargestellt werden, denn a ist die Coordinate des Mittelpunktes der Involution, der mit dem unendlich fernen Punkte der x Axe ein Paar bildet, und das Paar $x=a+b, x=a-b$ ist das einzige, dessen Abstand durch den Mittelpunkt halbirt wird. Wir setzen nun identisch den Punkt mit der Darstellung

$$a-b, a, a+b, \infty \text{ und den Punkt } x=a+bi, y=0. \qquad 6)$$

Ist also der Factor b von i positiv, so besitzt auch die Darstellung des Punktes $a+bi$ einen bestimmten Sinn, den wir als positiv bezeichnen wollen. Ist andererseits b negativ, so ist die Darstellung im negativen Sinne beschrieben. Die ähnliche Festsetzung treffen wir für die y Axe. Wir betrachten als identisch den Punkt mit der Darstellung

$$c-d, c, c+d, \infty \text{ und den Punkt } y=c+di, x=0. \qquad 7)$$

So lange d positiv bleibt, ist auch der Sinn der Darstellung positiv; wird d negativ, so ändert sich derselbe und wird negativ.

Jede imaginäre Gerade kann als die Verbindungslinie zweier Punkte betrachtet werden, von denen der eine der x Axe, der andere der y Axe angehört. Jeder analytisch definirten imaginären Geraden gehört so eine bestimmte synthetisch definirte imaginäre Gerade zu, zu der die zugehörigen Darstellungen perspectivisch sind. Wir werden beide als identisch

betrachten können, wenn der eine reelle Punkt der ersteren zugleich der einzige reelle Punkt der letzteren Geraden ist. Der letztere ist aber einer von den beiden Punkten, von denen aus die Involutionen der beiden imaginären Punkte in einander projicirt werden. Der reelle Punkt der synthetisch definirten Geraden liegt im zweiten oder vierten Quadranten, falls die beiden Darstellungen von gleichem Sinne sind, dagegen im ersten oder dritten Quadranten, wenn die Darstellungen der Punkte von verschiedenem Sinne sind. Auch von dem reellen Punkte der analytischen Geraden aus werden die Involutionen der imaginären Punkte in einander projicirt. Kann man noch zeigen, dafs das Verhältnifs $\frac{x_1}{y_1}$ seiner Coordinaten ein entgegengesetztes Zeichen besitzt, wie das Verhältnifs $\frac{b}{d}$ der imaginären Bestandtheile in den Coordinaten der Punkte, welche die Gerade auf der x und y Axe ausschneidet, so ist die Identität der beiden reellen Punkte nachgewiesen.

Die Gleichung der Verbindungslinie sei nun

$$8)\qquad \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+i\{\alpha_1(x-x_1)+\beta_1(y-y_1)\}=0\,.$$

Hieraus erhält man für $y=0$ die Coordinate des Schnittpunktes mit der x Axe

$$9)\qquad \begin{aligned} a+bi &= \frac{\alpha x_1+\beta y_1+i(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)}{\alpha+i\alpha_1} \\ &= \frac{(\alpha^2+\alpha_1^2)x_1+(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)y_1}{\alpha^2+\alpha_1^2}+i\,\frac{(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)y_1}{\alpha^2+\alpha_1^2}, \end{aligned}$$

und für $x=0$

$$10)\qquad \begin{aligned} c+di &= \frac{\alpha x_1+\beta y_1+i(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)}{\beta+i\beta_1} \\ &= \frac{(\beta^2+\beta_1^2)y_1+(\alpha\beta+\alpha_1\beta_1)x_1}{\beta^2+\beta_1^2}+i\,\frac{(\beta\alpha_1-\alpha\beta_1)x_1}{\beta^2+\beta_1^2}. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich folglich

$$11)\qquad \frac{b}{d}=-\frac{y_1}{x_1}\,\frac{\beta^2+\beta_1^2}{\alpha^2+\alpha_1^2},$$

und es sind wirklich die beiden Verhältnisse $\frac{b}{d}$ und $\frac{x_1}{y_1}$ immer von verschiedenen Zeichen. Mithin kann die Verbindungslinie der beiden Punkte

$$12)\qquad x=a+bi\,,\; y=0 \;\text{ und }\; x=0\,,\; y=c+di$$

mit der Linie identisch gesetzt werden, welche durch die Punkte

$$a-b\,,\,a\,,\,a+b\,,\,\infty \quad \text{und} \quad c-d\,,\,c\,,\,c+d\,,\,\infty \qquad 13)$$

bestimmt wird, denn beide Linien enthalten denselben reellen Punkt.

Jeden Punkt der Ebene kann man im analytischen Sinne als Centrum eines Strahlbüschels definiren; es mufs dann gezeigt werden, dafs alle diese Strahlen auch im synthetischen Sinne in einem Punkte sich treffen. Der Schnittpunkt zwischen irgend zwei imaginären Strahlen ist nun nach analytischer und nach synthetischer Anschauung in je einer gewissen reellen Geraden gelegen. Stellen sich diese beiden reellen Geraden als mit einander identisch heraus, so wird man auch die Schnittpunkte als identisch betrachten, welche die beiden Geraden nach analytischer oder synthetischer Betrachtungsweise gemeinsam haben. In beiden Fällen hat man nur die Wahl zwischen den beiden reellen Geraden c und c_1, auf denen die Involutionen der imaginären Geraden dieselbe Punktinvolution ausschneiden. Diese beiden Geraden werden durch die reellen Punkte A_1 und A_2 der imaginären Strahlen getrennt; vom synthetischen Standpunkte aus mufs die Gerade c die endliche Strecke A_1A_2 treffen, wenn die Darstellungen der Geraden in verschiedenem Sinne beschrieben sind, im anderen Falle kommt die Gerade in Betracht, welche die unendlich grofse Strecke A_1A_1 trifft.

Die reelle Gerade, welche den imaginären Punkt

$$x = a + bi\ ,\ y = c + di \qquad 14)$$

enthält, kann offenbar durch die beiden Gleichungen

$$x = a + b\lambda\ ,\ y = c + d\lambda \qquad 15)$$

dargestellt werden. Es seien nun x_1, y_1 die Coordinaten von A_1, x_2, y_2 diejenigen von A_2; alsdann sind

$$(x_1-a-bi)(y-y_1) - (y_1-c-di)(x-x_1) = 0 \qquad 16)$$

und

$$(x_2-a-bi)(y-y_2) - (y_2-c-di)(x-x_2) = 0 \qquad 17)$$

die Gleichungen von zwei Geraden, die A_1 resp. A_2 enthalten und in dem imaginären Punkte 14) sich treffen. Für den Schnittpunkt zwischen A_1A_2 und zwischen dem reellen Träger 15) des Punktes 14) müssen die beiden Gleichungen

$$a + b\lambda = x_1 + \mu(x_2-x_1)\ ,\ c + d\lambda = y_1 + \mu(y_2-y_1)$$

bestehen, woraus sich ergiebt

18) $$\mu = \frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(x_2-x_1)-b(y_2-y_1)}\ .$$

Der Schnittpunkt liegt innerhalb der endlichen Strecke A_1A_2, wenn

19) $$0 < \mu < 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\mu}{1-\mu} > 0$$

ist. Nun hat man aber offenbar

20) $$\frac{\mu}{1-\mu} = -\frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(a-x_2)-b(c-y_2)}\ .$$

Wenn man mit $e_1+f_1 i$ den Schnittpunkt der Geraden 16) mit der x Axe bezeichnet, so ist (9)

21) $$\begin{aligned} f_1 &= y_1\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\alpha^2+\alpha_1^2} \\ &= y_1\frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{(y_1-c)^2+d^2}; \end{aligned}$$

mit Vertauschung der Indices 1 und 2 bekommt man

22) $$f_2 = y_2\frac{d(a-x_2)-b(c-y_2)}{(y_2-c)^2+d^2}\ .$$

Mithin ergiebt sich

23) $$\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{y_2}{y_1} = \frac{d(a-x_1)-b(c-y_1)}{d(a-x_2)-b(c-y_2)}\cdot\frac{(y_2-c)^2+d^2}{(y_1-c)^2+d^2}\ .$$

$\frac{\mu}{1-\mu}$ ist also dann und nur dann positiv, wenn

24) $$\frac{f_1 y_2}{f_2 y_1} < 0$$

ist. Eine der Gröfsen $\frac{f_1}{y_1}$ und $\frac{f_2}{y_2}$ mufs mithin in diesem Falle positiv, die andere negativ sein.

Der Richtungssinn eines Punktes der x Axe bestimmt an allen Punkten mit positiver Ordinate einen und denselben Drehungssinn, an allen Punkten mit negativer Ordinate aber den entgegengesetzten Drehungssinn. Umgekehrt bestimmen an einem festen Punkte mit den Coordinaten x_1, y_1 alle imaginären Punkte der x Axe mit positivem Sinne ihrer Darstellung oder positivem Factor f_1 von i in ihrer x Coordinate denselben Drehungssinn. Der Drehungssinn, welcher sich im synthetischen Sinne mit der Geraden A_1A verbindet, ändert sich also nur mit dem Quotienten $\frac{f_1}{y_1}$. Die

Gerade 15) wird die endliche Strecke A_1A_2 mithin dann schneiden, wenn die synthetischen Darstellungen der beiden imaginären Geraden im verschiedenen Sinne beschrieben sind. Der Schnittpunkt der beiden analytisch dargestellten Geraden kann immer mit demjenigen der synthetisch dargestellten Geraden als identisch betrachtet werden. Alle Geraden, die im analytischen Sinne durch einen Punkt gehen, haben auch im synthetischen Sinne einen Punkt gemeinsam.

Ist nun in dieser Weise die Identität zwischen den analytisch und synthetisch definirten imaginären Gröfsen einmal aufgezeigt, so folgt sofort, dafs auch die beiden Auffassungen der projectivischen Beziehung in genauestem Zusammenhange stehen. Man kann die Elemente eines einförmigen Gebildes analytisch durch den Zahlenwerth des Theilverhältnisses fixiren, den dieselben an zwei festen Elementen des Trägers bestimmen. Besteht nun zwischen zwei einförmigen Gebilden die projectivische Beziehung, so verschwindet eine bilineare Form

$$a\lambda + b\lambda + c\lambda\lambda_1 + d$$

für je zwei entsprechende Theilverhältnisse. Eine solche Beziehung findet auch zwischen dem ersten und dem letzten Gliede einer Reihe perspectivischer Gebilde statt.

Ein sehr einfacher Zusammenhang besteht zwischen dem Repräsentanten $x = a, y = b$ des imaginären Punktes $a + bi$ der x Axe und seiner geometrischen Darstellung

$$a - b, a, a + b, \infty.$$

Auf seinen Verbindungslinien mit den beiden Kreispunkten liegen zwei symmetrisch zur x Axe gelegene reelle Punkte. Sie lassen sich mit jedem Paare der Involution durch einen Kreis verbinden, der also seinen Mittelpunkt auf der x Axe hat. Für das Paar $x = a, x = \infty$ besteht dieser Kreis aus der unendlich fernen Geraden und dem Lothe in a, für das zweite Paar $x = a - b, x = a + b$ hat der Kreis einen Radius von der Länge b und den Punkt $x = a$ zum Mittelpunkt. Der Punkt $x = a$, $y = b$ liegt mithin in der imaginären Geraden, die mit einem bestimmten Kreispunkt den gegebenen imaginären Punkt verbindet[44].

Das zweite Capitel der vorstehenden Arbeit. §§ 180—187.

§ 180. Vom analytischen Standpunkte aus wird eine Involution durch zwei gegebene Gruppen desselben Trägers zu n Elementen bestimmt. Haben diese $2n$ Elemente die Theilverhältnisse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ hinsichtlich zweier gegebener Elemente, so sind die Theilverhältnisse aller Elemente irgend einer dritten Gruppe Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades

$$1)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)-\lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\\ \equiv f_n(x)-\lambda g_n(x)=0\,,\end{aligned}$$

so dafs zu jedem Werthe von λ eine Gruppe der Involution gehört. Wird der Fundamentalsatz der Algebra vorausgesetzt, so enthält jede Gruppe n im Allgemeinen getrennte Elemente. Zwei verschiedene Involutionen

$$2a)\quad f_n(x)-\lambda g_n(x)=0\,,\quad 2b)\ f_m(x)-\lambda_1 f_m(x)=0$$

werden als projectivisch bezeichnet, wenn für λ und λ_1 die allgemeinste bilineare Gleichung besteht

$$3a)\quad a\lambda+b\lambda_1+c\lambda\lambda_1+d=0\,.$$

Entsprechen sich die Gruppen $f_n(x)=0$ und $f_m(x)=0$, sowie $g_n(x)=0$ und $g_m(x)=0$, so besteht die einfachere Gleichung

$$3b)\quad \lambda_1=c\,.\,\lambda\,.$$

Es seien nun $C_1C_2\ldots C_n$ und $D_1D_2\ldots D_n$ irgend zwei neue Gruppen der Involution, so dafs man also hat

$$4)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)-\gamma(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\\ =(1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)=0\,.\end{aligned}$$

$$5)\quad \begin{aligned}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)-\delta(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\\ =(1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\ldots(x-\delta_n)=0\,.\end{aligned}$$

Hieraus fliefsen aber die weiteren Formeln ab

$$6)\quad \begin{aligned}\delta(1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)-\gamma(1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\ldots(x-\delta_n)\\ \equiv(\delta-\gamma)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\,,\end{aligned}$$

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(x-\delta_1)(x-\delta_2)\ldots(x-\delta_n) \quad 7)$$
$$\equiv(\delta-\gamma)(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\,,$$

und schliefslich

$$(\delta-\gamma)\{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)-\lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)\} \quad 8)$$
$$\equiv(1-\gamma)(\delta-\lambda)(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(\gamma-\lambda)(x-\delta_1)\ldots(x-\delta_n)=0\,.$$

Die letztere Gleichung resultirt aber bei der Elimination von μ zwischen den beiden Beziehungen

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_{n-m})-(1-\delta)\mu(x-\delta_1)\ldots(x-\delta_{n-m})=0\,, \quad 9)$$

$$(\gamma-\lambda)(x-\delta_{n-m+1})\ldots(x-\delta_n)-\mu(\delta-\lambda)(x-\gamma_{n-m+1})\ldots(x-\gamma_n)=0\,. \quad 10)$$

Giebt man in diesen Gleichungen λ einen festen Werth, so hat man zwei projectivische Involutionen $(n-m)$ter und $m$ter Ordnung vor sich, und zwar entsprechen den Gruppen $C_1C_2\ldots C_{n-m}$ und $D_1D_2\ldots D_{n-m}$ der ersten Reihe die bestimmten Gruppen $D_{n-m+1}\ldots D_n$ und $C_{n-m+1}\ldots C_n$ der zweiten Involution. Jedes Element der λ entsprechenden Gruppe der Involution 1) gehört zwei homologen Gruppen der Reihen 9) und 10) gleichzeitig an. Andererseits betrachten wir einen festen Werth μ_1 von μ bei veränderlichem λ. Alsdann erhalten wir projectivische Involutionen

$$0=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)-\lambda(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n) \quad 1)$$
$$\equiv(1-\gamma)(\delta-\lambda)(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)-(1-\delta)(\gamma-\lambda)(x-\delta_1)\ldots(x-\delta_n)$$

und

$$(\delta-\lambda)(x-\delta_{n-m+1})\ldots(x-\delta_n)-\mu_1(\gamma-\lambda)(x-\gamma_{n-m-1})\ldots(x-\gamma_n)=0 \quad 11)$$

die zweite Involution ergiebt für $\lambda=\lambda_1$ diejenige Gruppe, welche in dem λ_1 entsprechenden Reihenpaar 9) und 10) der festen Gruppe

$$(1-\gamma)(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_{n-m})-\mu_1(1-\delta)(x-\delta_1)\ldots(x-\delta_{n-m})=0 \quad 12)$$

zugeordnet werden mufs, damit die zu λ_1 gehörende Gruppe von 1) entsteht. Die Reihe 11) ist also nach unserer Bezeichnung genau die charakteristische Reihe, die zu der Gruppe 12) gehört. Dem Werthe $\lambda=\gamma$ entspricht die Gruppe $C_1C_2\ldots C_n$ in 1) und die Gruppe $C_{n-m+1}\ldots C_n$ in der charakteristischen Reihe 11). Dem Werthe $\lambda=\delta$ entspricht die

Gruppe $D_1 D_2 \ldots D_n$ in ersterer, und das Glied $D_{n-m+1} D_1 \ldots D_n$ in letzterer Involution.

Zerlegt man also irgend zwei Gruppen $C_1 C_2 \ldots C_n$ und $D_1 D_2 \ldots D_n$ der gegebenen Involution in je zwei andere

$$C_1 C_2 \ldots C_{n-m} \qquad C_{n-m+1} \ldots C_n$$

und

$$D_1 D_2 \ldots D_{n-m} \qquad D_{n-m+1} \ldots D_n$$

zu $n-m$ und zu m Elementen, und bezieht man in allen möglichen Arten zwei Involutionen $(n-m)$ter und $n$ter Ordnung so, dafs die kreuzweis stehenden Glieder einander entsprechen, so erzeugen sie die Glieder der Involution $n$ter Ordnung. Ein einzelnes Glied kann durch die Gruppe zu m Punkten fixirt werden, die bei seiner Erzeugung einer festen Gruppe der Involution $(n-m)$ter Ordnung zugewiesen wird. Alle so entstehenden charakteristischen Reihen sind zu der Involution $n$ter Ordnung projectivisch. Den jeweilig besonderen Gruppen $C_1 C_2 \ldots C_n$ und $D_1 D_2 \ldots D_n$ entsprechen die aus ihnen entnommenen Bestandtheile.

Genau auf diese Weise liefsen wir im § 32 die Involutionen $n$ter Ordnung aus denen niedrigerer Ordnung entstehen. Das im zweiten Capitel betrachtete Gebilde ist daher mit der Involution der analytischen Geometrie identisch. Der Lehrsatz, dafs zwei projectivische Involutionen $(n-m)$ter und $m$ter Ordnung im Allgemeinen n verschiedene Coincidenzelemente ergeben, wenn sie demselben Träger angehören, ist zu dem Fundamentalsatz der Algebra äquivalent, dafs jede Gleichung $n$ten Grades sich in n lineare Factoren auflösen läfst.

Die Aussage des § 34b über Involutionsgruppen mit mehrfachen Elementen folgt analytisch genommen aus den ersten Regeln der Differentialrechnung.

Die Stetigkeitsbetrachtungen, welche in den §§ 35—39 enthalten sind, finden ihren analytischen Ausdruck in dem einen Satze, dafs mit den Coëfficienten einer Gleichung $n$ten Grades die Wurzeln sich stetig verändern.

§§ 181—183. Wir wollen nunmehr die Schlüsse von n auf $n+1$ analytisch erläutern, mit deren Hülfe wir (§§ 40—47) geometrisch er-

wiesen haben, dafs eine Involution mit Hülfe aller charakteristischen Reihen auf andere Gebilde projectivisch bezogen werden kann.

§ 181. Die Gleichung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1})-\lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{n+1})=0 \quad 1)$$

einer Involution $(n+1)$ter Ordnung entsteht aus der Elimination von μ zwischen

$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-m+1}) \quad -\mu(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n-m+1}) \quad =0, \quad 2\text{a})$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+2})\ldots(x-\beta_{n+1})-\mu(x-\alpha_{n-m+2})\ldots(x-\alpha_{n+1})=0, \quad 2\text{b})$$

ferner aus der Elimination von μ und ϱ zwischen

$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-m}) \quad -\varrho(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n-m}) \quad =0, \quad 3\text{a})$$

$$\mu(x-\beta_{n-m+1}) \quad -\varrho(x-\alpha_{n-m+1}) \quad =0, \quad 3\text{b})$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+2})\ldots(x-\beta_{n+1})-\mu(x-\alpha_{n-m+2})\ldots(x-\alpha_{n+1})=0. \quad 3\text{c})$$

Hier kann man nun zuerst μ eliminiren und bekommt so als äquivalent zu 1) das neue Gleichungspaar

$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-m}) \quad -\varrho(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n-m}) \quad =0, \quad 4\text{a})$$

$$\lambda(x-\beta_{n-m+1})\ldots(x-\beta_{n+1})-\varrho(x-\alpha_{n-m+1})\ldots(x-\alpha_{n+1})=0. \quad 4\text{b})$$

In diesen analytischen Operationen ist das Verfahren des § 41 beschrieben. Die projectivischen Reihenpaare 2a) und 2b) dienen zunächst zur Definition der Involution. Hierbei sind $A_1A_2\ldots A_{n-m+1}$ und $B_1B_2\ldots B_{n-m+1}$ vorläufig zwei ganz besondere Bestandtheile der ausgezeichneten Gruppen $A_1A_2\ldots A_{n+1}$, $B_1B_2\ldots B_{n+1}$. Es soll eben im § 41 gezeigt werden, dafs innerhalb dieser ausgezeichneten Gruppen wenigstens die ersteren beliebig ausgewählt werden können, und dafs auch m innerhalb der Grenzen von 1 bis n willkürlich ist. Die Gleichung 2a) wird im Texte mit I bezeichnet, und 2b) geht nach Fixirung von λ auf λ_δ in eine Reihe II_δ über, die nun mit I eine bestimmte Gruppe der Involution erzeugt. Da nur von n auf $n+1$ zu schliefsen ist, so kann man für die Involution I alle Erzeugungsweisen des § 32 voraussetzen. Man kann ihre zu $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ gehörenden Gruppen erzeugen durch die Reihe III mit der Gleichung 3a) und durch die Reihen $\text{I}_1, \text{I}_2, \text{I}_3, \ldots$, in deren Gleichungen 3b) übergeht, wenn man die speciellen Annahmen für μ macht. Fixirt man andererseits ϱ auf $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, so erhält man aus 3b) der Reihe nach die Gleichungen der charakteristischen Reihen $\text{I}'_1, \text{I}'_2, \text{I}'_3, \ldots$ der Involution 1.

Dieselben sind zu ihr selbst und zu der Involution II_δ projectivisch. In den Coincidenzelementen zwischen II_δ und $\mathrm{I}_1', \mathrm{I}_2', \mathrm{I}_3', \ldots$ erhielten wir nun die Gruppen der Involution $A_{n-m+1}, \ldots A_{n+1}, B_{n-m+1} \ldots B_{n+1}$. Ihre Gleichungen liefert 4b), wenn wir λ auf λ_δ und μ der Reihe nach auf μ_1, $\mu_2, \mu_3, \ldots$ fixiren. Die Aufgabe ist also vollständig zu ersetzen durch die andere, eine Involution III mit der Gleichung 4a) oder 3a) zur Coincidenz mit einer projectivischen Involution IV_δ zu bringen, deren Gleichung 4b) für den speciellen Werth λ_δ liefert. Wenn ϱ auf $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ fixirt wird, so geht 4b) in die Gleichung neuer charakteristischer Reihen $\mathrm{IV}_1', \mathrm{IV}_2'$, $\mathrm{IV}_3', \ldots$ über, die zu den früheren $\mathrm{II}_1', \mathrm{II}_2', \mathrm{II}_3'' \ldots$ projectivisch sind, welche 2b) nach Fixirung von μ auf $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ liefert. Damit war dann dargethan, dafs unabhängig von der Wahl der Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_{n-m}$ und $B_1 B_2 \ldots B_{n-m}$ jedes Reihenpaar von der betrachteten Form zur Erzeugung der Involutionsglieder dienen kann.

§ 182. Hierauf wird nun im § 43 zunächst gezeigt, wie die n-Elemente zu finden sind, die mit irgend einem Elemente C_2 zu derselben Gruppe der Involution gehören. Analytisch läfst sich dies so erläutern: Man bezeichne mit $f(x), g(x), \mathfrak{h}(x), \ldots$ ganze Functionen $(n-1)$ten Grades, bei denen 1 der Coëfficient des höchsten Gliedes ist.

Die Gleichung der untersuchten Gruppe CC_1C_2 der Involution AA_1A_2, BB_1B_2, die auf einer Geraden liege, kann dann in die Form gebracht werden

$$1)\qquad \begin{aligned} &(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)f(x) - \lambda_1(x-\beta_2)(x-\beta_1)g(x) \\ &\equiv (1-\lambda_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_1)h(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Wenn man von einem Zahlenfactor absieht, ist dieselbe das Resultat der Elimination von μ zwischen

$$2\text{a})\qquad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x) - \mu\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)(x-\beta_1)g(x) = 0\,,$$
$$2\text{b})\qquad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) \qquad - \mu(\beta_2-\gamma_2)(x-\alpha_2) \qquad = 0\,.$$

Für $\mu = 1$ erhalten wir aus 2b) offenbar die Gleichung von γ_2:

$$3\text{b})\qquad (\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) - (\beta_2-\gamma_2)(x-\alpha_2) \equiv (\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)\,.$$

Da nun das Erzeugnifs der Involutionen 2a) und 2b) die durch C_2 bestimmte Gruppe der Involution 1) ist, so mufs die zu $\mu = 1$ gehörende Gruppe von 2a) den Punkt C_2 enthalten. Folglich besteht auch die Identität

$$(\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x)-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)(x-\beta_1)g(x) \equiv \{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}(x-\gamma_2)\mathfrak{h}(x). \qquad 3\text{a})$$

$\mathfrak{h}(x)=0$ ist die Gleichung der Gruppe $\mathfrak{C}$. Jetzt eliminire man aus 2a) und 3a) $(x-\beta_1)g(x)$, aus 2b) und 3b) $(x-\alpha_2)$, so erhält man:

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\alpha_1)f(x)+\mu\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}(x-\gamma_2)\mathfrak{h}(x)=0. \quad 4\text{a})$$

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)\quad+\mu(\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)=0. \quad 4\text{b})$$

Die Elimination von μ ergiebt, von constanten Factoren abgesehen, die Gleichung der untersuchten Gruppe. An die Stelle dieser beiden Gleichungen kann man, wie es im § 43 geschieht, die drei folgenden treten lassen:

$$\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}\mathfrak{h}(x)-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)f(x)=0. \quad 5\text{a})$$

$$(1-\mu)(x-\alpha_1)\quad+\mu\varrho(x-\gamma_2)=0. \quad 5\text{b})$$

$$(1-\mu)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)\quad+\mu(\alpha_2-\beta_2)(x-\gamma_2)=0. \quad 5\text{c})$$

Indem man endlich zwischen den beiden letzten Gleichungen $\mu(x-\gamma_2)$ eliminirt, bekommt man

$$\{\alpha_2-\gamma_2-\lambda_1(\beta_2-\gamma_2)\}\mathfrak{h}(x)-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)f(x)=0. \quad 6\text{a})$$

$$(\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_1)\quad-\varrho(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2)=0. \quad 6\text{b})$$

Die Elimination von ϱ aus diesen Gleichungen liefert bis auf einen Zahlenfactor die Gleichung $(x-\gamma_1)h(x)=0$ der Gruppe CC_1. Da nun $\mathfrak{h}(x)=0$ die Gleichung von $\mathfrak{C}$ ist, so drücken 6a) und 6b) analytisch die Thatsache aus, dafs CC_1 eine Gruppe der Involution $AA_1, \mathfrak{C}B_2$ ist. Dieselben zeigen auch, dafs bei der Erzeugung von CC_1 den Gruppen $\mathfrak{C}$ und A (mit der Gleichung $f(x)=0$) die Elemente A_1 und B_2 zugeordnet werden. Im § 43 wurde bewiesen, dafs der B_1 enthaltenden Gruppe $\mathfrak{B}$ von $A, \mathfrak{C}$ der Punkt C_1' zugeordnet wird, der mit C_2 ein Paar der Involution A_1A_2, B_1B_2 bildet. Wir wollen dasselbe analytisch zeigen. Das Paar $C_1'C_2$ ist das Erzeugnifs zweier specieller Reihen 5b) und 5c), und zwar mufs, da in allen Reihenpaaren 5b) und 5c) A_1 und B_2 sich entsprechen (für $\mu=0$), in diesem besonderen Falle B_1A_2 ein Paar entsprechender Punkte sein. Alsdann erhalten wir aus 5b) und 5c) zwei Reihen

$$x-\alpha_1-\varkappa(x-\beta_1)=0\ ,\ (x-\beta_2)-\lambda\varkappa(x-\alpha_2)=0\ ,$$

deren Erzeugnifs wirklich ein Paar der Involution A_1A_2, B_1B_2 ist.

Der Punkt A_2 oder α_2 gehört dem Parameter $\mu = \infty$ in 5c) zu, oder es ist für ihn $\frac{1-\mu}{\mu} = -1$. Da diesem Punkte β_1 entsprechen soll, so erhält man aus 5b)

$$(\beta_1 - \gamma_2)\varrho = \beta_1 - \alpha_1 .$$

Der besondere Punkt C_1' von 6b) wird daher aus

$$7) \quad (\beta_1 - \gamma_2)(\alpha_2 - \beta_2)(x - \alpha_1) - (\beta_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - \gamma_2)(x - \beta_2) = 0$$

bestimmt; ihm entspricht eine Gruppe mit der Gleichung

$$8) \ (\beta_1 - \gamma_2)\{\alpha_2 - \gamma_2 - \lambda_1(\beta_2 - \gamma_2)\}\,\mathfrak{h}(x) - (\beta_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - \gamma_2)f(x) = 0 .$$

Sie enthält den Punkt B_1 mit dem Theilverhältniſs β_1. Denn das Erzeugniſs der projectivischen Gebilde

$$9a) \quad (\beta_1 - \gamma_2)\{\alpha_2 - \gamma_2 - \lambda(\beta_2 - \gamma_2)\}\,\mathfrak{h}(x) - \sigma(\beta_1 - \alpha_1)(\alpha_2 - \gamma_2)f(x) = 0,$$

$$9b) \quad (\beta_1 - \gamma_2)(x - \alpha_1) \qquad\qquad - \sigma(\beta_1 - \alpha_1)(x - \gamma_2) \qquad = 0$$

hat die Gleichung

$$10) \ \{\alpha_2 - \gamma_2 - \lambda_1(\beta_2 - \gamma_2)\}(x - \gamma_2)\mathfrak{h}(x) - (\alpha_2 - \gamma_2)(x - \alpha_1)f(x) = 0 ,$$

ist also wegen 3a) mit BB_1 identisch; für $\sigma = 1$ geht nun 9b) in die Gleichung für B_1 über. Es muſs folglich auch die Gleichung 8), in die 9a) für $\sigma = 1$ sich verwandelt, die Wurzel β_1 besitzen. Es wird C_1' wirklich der Gruppe $\mathfrak{B}$ zugewiesen.

§ 183. In den §§ 44 und 45 wird nun gezeigt, daſs die beiden Involutionen AA_1A_2, BB_1B_2 und AA_1A_2, CC_1C_2 identisch sind, wenn CC_1C_2 irgend eine Gruppe der ersteren Involution ist. Dieser Beweis knüpft an folgende specielle Thatsache an. Bei der Erzeugungsweise

$$AA_1, BB_1, \ldots \;\overline{\wedge}\; B_2, A_2, \ldots$$

müssen einer festen Gruppe der ersteren Involution vier Elemente A_2, B_2, Y_2, Z_2 zugeordnet werden, damit die durch A_2, B_2, C_2 und D_2 bestimmten Gruppen der Involution AA_1A_2, BB_1B_2 entstehen. Ferner seien A_2, X_2, C_2, Z_2 die Elemente, die bei der Erzeugungsweise

$$AA_1, CC_1, \ldots \;\overline{\wedge}\; C_2, A_2, \ldots$$

der Involution AA_1A_2, CC_1C_2 irgend einer Gruppe der Involution $n$ter Ordnung zugeordnet werden müssen, damit die durch A_2, B_2, C_2 und D_2 bestimmten Gruppen dieser Involution $(n+1)$ter Ordnung entstehen.

Es handelt sich dann nur darum, zu zeigen, dafs

$$A_2 B_2 Y_1 Z_1 \;\overline{\wedge}\; A_2 X_2 C_2 Z_2$$

ist. Wenn diese Beziehung allgemein gilt, so gehören alle Elemente, die eine Gruppe von AA_1A_2, BB_1B_2 bilden, auch zu einer Gruppe von AA_1A_2, CC_1C_2; mit ihr ist also zugleich die Identität beider Involutionen nachgewiesen.

Die Reihe projectivischer Beziehungen des § 44 stellt sich analytisch in der Form einer Reihe von Doppelverhältnifs-Gleichungen dar. Für das erste Doppelverhältnifs $(A_2B_2C_2Z_1)$, das wir erhalten, wofern wir die feste Gruppe von AA_1, BB_1 mit $\mathfrak{C}C_2$ zusammenfallen lassen, brauchten wir die Gleichungen

$$(A_2B_2Z_1D_2) = (BB_1, AA_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2), \qquad 1)$$
$$(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_1B_1C_2E_1), \qquad 2)$$
$$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'') = (C_2A_1E_1D_2). \qquad 3)$$

In dem linken Doppelverhältnifs von 3) bedeuteten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}''$ die durch B_1 und D_2 bestimmten Gruppen der Involution $A, \mathfrak{C}$. Für die Involution $n$ter Ordnung $AA_1, \mathfrak{C}C_2$ haben wir nach den Voraussetzungen unseres Inductionsschlusses alle Erzeugungsweisen der besprochenen Art (§ 180) vorauszusetzen; wir können also ihre Gruppen aus den Reihenpaaren

$$A, \mathfrak{C}, \ldots \;\overline{\wedge}\; C_2, A_1, \ldots$$

entstehen lassen. Da der B_1 enthaltenden Gruppe $\mathfrak{B}$ A_1, C_2, B_1 und das aus 3) ermittelte Element E_1 zugeordnet werden müssen, damit AA_1, $\mathfrak{C}C_2, BB_1, \mathfrak{D}D_2$ entstehen, so ist dann auch 2) als richtig angenommen.

Aus 1) erhält man durch Multiplication mit $(A_2B_2C_2Z_1)$ die Gleichung

$$(A_2B_2C_2Z_1)(BB_1, AA_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_2B_2C_2Z_1)(A_2B_2Z_1D_2) = (A_2B_2C_2D_2)$$

oder

$$(A_2B_2C_2Z_1) = (A_2B_2C_2D_2)(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2). \qquad 4)$$

Andererseits kann man 2) auf die Formen bringen

$$(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = 1 - (A_1C_2B_1E_1),$$
$$1 - (AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2) = (A_1C_2B_1E_1),$$

und hieraus folgt in Verbindung mit 3)

5) $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'') : \{1-(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2)\} = (C_2A_1B_1D_2)$.

Wenn man nun das Doppelverhältnifs $(AA_1, BB_1, \mathfrak{C}C_2, \mathfrak{D}D_2)$ zwischen 4) und 5) eliminirt, so bekommt man

$$(A_2B_2C_2Z_1) = (A_2B_2C_2D_2)\left(1-\frac{(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')}{(C_2A_1B_1D_2)}\right)$$

oder

6) $$(A_2B_2C_2Z_1) = \frac{\alpha_2-\gamma_2}{\beta_2-\gamma_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\cdot\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_2-\beta_1}\right\}.$$

Zu den drei Gleichungen 1), 2) und 3) ist also analytisch genommen die Thatsache äquivalent, dafs $(A_2B_2C_2Z_1)$, das erste der betrachteten Doppelverhältnisse, eine ganze lineare Function von $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')$ ist, in deren Coëfficienten nur die bekannten Theilverhältnisse $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ der Elemente $A_1, A_2, B_1, B_2, C_2, D_2$ auftreten.

Für das zweite Doppelverhältnifs $(A_2C_2B_2Z_2)$ brauchten wir ebenfalls eine Reihe von Doppelverhältnifs-Gleichungen.

7) $$(CC_1, AA_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2) = (A_2C_2Z_2D_2).$$

Wir kannten das Glied $\mathfrak{C}B_2$ der Involution CC_1, AA_1 und wufsten, dafs demselben A_2, B_2 und C_2 zugeordnet werden mufsten, damit die zu A_2, B_2, C_2 gehörenden Gruppen der Involution AA_1A_2, CC_1C_2 entstanden. Der Gruppe $\mathfrak{C}B_2$ mufste das aus 7) entnommene Element Z_2 zugeordnet werden, wenn das D_2 enthaltende Glied entstehen sollte. Da nur von n auf $n+1$ geschlossen werden sollte, gilt für die Involution linker Hand die Erzeugungsweise

$$A, \mathfrak{C}, \ldots \qquad B_2, A_1, \ldots,$$

und zu dem Wurfe $(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2)$ ist der Wurf der Elemente projectivisch, die $\mathfrak{B}$ zugeordnet werden müssen, damit $AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2$ entstehen. Das war für CC_1 das Element C_1', das aus der Gleichung

8) $$(A_1B_1C_2C_1') = (B_2A_2C_2C_1')$$

entspringt; für $\mathfrak{D}'D_2$ das aus der Beziehung

9) $$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'') = (B_2A_1F_1D_2)$$

entnommene Element F_1. Es ist also dann

10) $$(AA_1, CC_1, \mathfrak{C}B_2, \mathfrak{D}'D_2) = (A_1C_1'B_2F_1).$$

Indem man 7) mit $(A_2C_2B_2Z_2)$ multiplicirt, erhält man

$$(A_2C_2B_2Z_2)(CC_1\,,AA_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2) = (A_2C_2Z_2D_2)\cdot(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2)\,,$$

oder

$$(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2)(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2)\,. \qquad 11)$$

10) nimmt die Formen an

$$(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2) = 1-(A_1B_2C_1'F_1)\,,$$
$$1-(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2) = (A_1B_2C_1'F_1)\,, \qquad 12)$$

und diese Beziehung ergiebt in Verbindung mit 9) die Gleichung

$$(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}''):\{1-(AA_1\,,CC_1\,,\mathfrak{C}B_2\,,\mathfrak{D}'D_2)\} = (B_2A_1C_1'D_2)\,. \qquad 13)$$

Mit ihrer Hülfe geht 11) über in

$$(A_2C_2B_2Z_2) = (A_2C_2B_2D_2)\left\{1-\frac{(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')}{(B_2A_1C_1'D_2)}\right\}\,. \qquad 14)$$

Die Gleichung des Elementes C_1' hatten wir schon abgeleitet (§ 182, 7). Sie lautete:

$$(\beta_1-\gamma_2)(\alpha_2-\beta_2)(x-\alpha_1)-(\beta_1-\alpha_1)(\alpha_2-\gamma_2)(x-\beta_2) = 0\,.$$

Also ist

$$(B_2A_1C_1'D_2) = \frac{\beta_1-\gamma_2}{\beta_1-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2-\gamma_2}\cdot\frac{\alpha_1-\delta_2}{\beta_2-\delta_2}\,,$$

und wir erhalten schliefslich

$$(A_2C_2B_2Z_2) = \frac{\alpha_2-\beta_2}{\gamma_2-\beta_2}\cdot\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta_1-\gamma_2}\cdot\frac{\alpha_2-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\right\}\cdot \qquad 15)$$

In den beiden Gleichungen 15) und 6)

$$(A_2B_2C_2Z_2) = \frac{\alpha_2-\gamma_2}{\beta_2-\gamma_2}\cdot\frac{\beta_2-\delta_2}{\alpha_2-\delta_2}\left\{1-(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')\frac{\gamma_2-\delta_2}{\alpha_1-\delta_2}\cdot\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_2-\beta_1}\right\} \qquad 6)$$

liegt der Inhalt des § 44 ausgesprochen. Der zu beweisende Satz ist, dafs Z_1 und Z_2 zusammenfallen, oder dafs

$$(A_2B_2C_2Z_1)+(A_2C_2B_2Z_2) = +1$$

ist. Es würde diese Thatsache aus den entwickelten Formeln sich ergeben, aber man kann sie auch indirect ableiten. So lange man $A_1, A_2\,, B_1, B_2\,, C_2, D_2$ festhält, hängt der zu erweisende Satz nicht von der besonderen Natur der Gruppen $A\,,\mathfrak{B}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{D}''$ ab, sondern nur von dem Zahlenwerth ihres Doppelverhältnisses. Setzt man daher

$$(A_0B_1\mathfrak{C}_0D_2) = (A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'')\,,$$

und ist $B_0 B_1$ ein Paar der Involution $A_0 A_1$, $\mathfrak{C}_0 C_2$, so genügt es vollständig den Satz für die Involution $A_0 A_1 A_2$, $B_0 B_1 B_2$ zu erweisen, weil nur in 15) und 6) für $(A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}'')$ die gleiche, aber anders bezeichnete Zahl $(A_0 \mathfrak{C}_0 B_1 D_2)$ eintritt. Indem dann noch im § 45 A_0 mit B_2 zusammenfällt, wird der Satz auf den entsprechenden für die Involution zweiter Ordnung $A_1 A_2$, $B_0 B_1$ zurückgeführt, der vorher (§§ 24—26) auf ganz andere Weise bewiesen war.

Aus der mehrmaligen Anwendung der §§ 40—45 folgte dann, dafs die Involution durch irgend zwei ihrer Gruppen, EE_1E_2 und FF_1F_2, in der bezeichneten Weise bestimmt und zu allen ihren charakteristischen Reihen projectivisch gesetzt werden kann.

§ 184. In den §§ 48—56 werden die singulären Gruppen der Involutionen behandelt.

Die Involutionen mit einem $(n+1)$ fachem Element D_1 werden zuerst untersucht; wenn D_2 irgend ein zweites Element des Trägers ist, und die anderen Elemente desselben durch ihre Theilverhältnisse bezüglich D_1 und D_2 bestimmt sind, so hat die Involution die Gleichung

$$1) \qquad x^{n+1} - \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) = 0\,.$$

Jetzt werden zwei projectivische Gebilde auf dem Träger angenommen, die D_1 und D_2 entsprechend gemeinsam haben, so dafs für irgend zwei entsprechende Elemente die Gleichung gilt

$$y' = (1+\delta)y\,.$$

Aus jeder Gruppe entsteht dann eine andere, aus der Involution eine zu ihr projectivische

$$2) \quad x^{n+1} - \lambda(x-\alpha_1(1+\delta))(x-\alpha_2(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta)) = 0\,;$$

wirklich liefert die Substitution von $x=\gamma$ und $x=\gamma(1+\delta)$ in die Gleichungen 1) und 2) die wesentlich identischen Resultate

$$\gamma^{n+1} - \lambda(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{n+1}) = 0\,.$$
$$(1+\delta)^{n+1}\{\gamma^{n+1} - \lambda(\gamma-\alpha_1)(\gamma-\alpha_2)\ldots(\gamma-\alpha_{n+1})\} = 0\,.$$

Nun subtrahire man die beiden Gleichungen 1) und 2), so bekommt man

$$3) \qquad \begin{aligned}&(x-\alpha_1(1+\delta))(x-\alpha_2(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))\\ &\quad -(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1}) = 0\,.\end{aligned}$$

Dies ist eine Gleichung $n$ten Grades, von der für den Inductionsschlufs vorausgesetzt werden mufs, dafs sie n Wurzeln besitzt. Zugleich bildet aber auch die Gruppe 3) augenscheinlich mit dem Element D_2 oder $x = \infty$ ein Glied der Involution aus irgend zwei homologen Gruppen von 1) und 2). Die Gleichung geht nun an der Grenze, für verschwindendes δ, über in

$$\alpha_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1}) + \alpha_2(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1})(x-\alpha_1) \quad 4)$$
$$+\dots\alpha_{n+1}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i} = 0,$$

in die bekannte Gleichung der Elemente, die in Gruppen der Involution mehrfach enthalten sind.

Die Gruppe 4) gestattet folgende Darstellung

$$0 = (x-\alpha_1)\{\alpha_2(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1}) + \dots\alpha_{n+1}(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\} \quad 5)$$
$$+\alpha_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1}) \equiv (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1} + \sum_{i=2}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}\right\},$$

und darnach folgende projectivische Erzeugung

$$(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i} - \sigma\frac{1}{x-\alpha_2}\right\} = 0, \qquad 6a)$$

$$\alpha_1(x-\alpha_2) + \sigma(x-\alpha_1) = 0. \qquad 6b)$$

Für $\sigma = 0$ erhalten wir in 6a) die Gruppe $\mathfrak{D}$ der Doppelelemente von D_1^n, AA_2; dieser Gruppe wird also A_2 zugeordnet. Für $\sigma = \infty$ erhalten wir A und A_1 als entsprechende Gebilde. Wenn wir nunmehr $\sigma = \alpha_2$ setzen, so erhalten wir in 6a) eine Form mit dem Factor $(x-\alpha_2)$, also die Gleichung der Gruppe $\mathfrak{E}$ der Involution $A, \mathfrak{D}$; zugeordnet wird ihr das Element

$$\alpha_1(x-\alpha_2) + \alpha_2(x-\alpha_1) = 0, \qquad 7)$$

also das zweite Doppelelement $\mathfrak{E}_1$ der Involution D_1^2, A_1A_2. Durch diese projectivischen Gebilde

$$A\mathfrak{D}\mathfrak{E}\dots \wedge A_2A_1\mathfrak{E}_1\dots$$

wird auch im geometrischen Sinne (§ 54) die Gruppe der Doppelelemente bestimmt. Wir gelangen zu der soeben wieder beschriebenen Erzeugung, indem wir die im § 182 auch analytisch bestätigte Methode zur Auffindung der durch D_2 bestimmten Gruppe der Involution 3) benutzen und die erhaltenen projectivischen Gebilde einen Grenzübergang machen lassen.

Hat die Involution $(n+1)$ter Ordnung D_2 zum $(n+1)$fachen Element, so lautet ihre Gleichung:

$$8)\qquad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1}) = \lambda .$$

Die Gleichung ihrer Doppelelemente ist dann:

$$9)\quad (x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1}) + (x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1})(x-\alpha_1) + \dots$$
$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i} = 0 .$$

§ 185. Die allgemeine Involution $(n+1)$ter Ordnung kann höchstens $2n$ Doppelelemente besitzen.

Wir betrachten die beiden projectivischen Involutionen

$$1\,a)\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1}) - \lambda(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n+1}) = 0,$$

$$1\,b)\qquad (x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))$$
$$- \lambda(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta)) = 0 .$$

Hierin sollen $x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+1}; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n+1}$ wieder die Theilverhältnisse der Elemente $X; A_1, A_2, \dots A_{n+1}; B_1, B_2, \dots B_{n+1}$ hinsichtlich D_1 und D_2 bezeichnen. Elemente, die zwei homologen Gruppen angehören, sind aus der Gleichung

$$2)\quad (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))$$
$$-(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})(x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta)) = 0$$

zu entnehmen.

Ist $x = \gamma(1+\delta)$ eine Wurzel von 2), so gehören die Elemente mit den beiden Theilverhältnissen γ und $\gamma(1+\delta)$ derselben Gruppe der Involution 1 a) an. Von 2) kann man den Factor δ ablösen. Ihre Wurzeln geben an der Grenze diejenigen Elemente an, die in ihren Involutionsgruppen mehrfach auftreten. Nach den Voraussetzungen unserer Inductionsschlüsse können wir nicht behaupten, dafs solche Wurzeln vorhanden sind, aber analytisch kann gezeigt werden, dafs unsere Gleichung höchstens $2(n+1)$ Wurzeln besitzt. Da in der Gleichung kein constantes Glied auftritt, und dieselbe in Wirklichkeit nur bis zum $(2n+1)$ten Grade ansteigt, so kennen wir 2 Wurzeln, 0 und ∞, derselben von vorne herein; unserer Aufgabe genügen höchstens $2n$ Elemente.

Die Gleichung 2) können wir, abgesehen von einem constanten Factor, auf die Form bringen

$$\{(x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))-(1+\delta)^{n+1}(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\} \quad 3)$$
$$\{(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))-(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\}$$
$$-\{(x-\beta_1(1+\delta))\dots(x-\beta_{n+1}(1+\delta))-(1+\delta)^{n+1}(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\}$$
$$\{(x-\alpha_1(1+\delta))\dots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta))-(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\}\,.$$

Die neue Gleichung unterscheidet sich von der alten nur um den Factor $(1+\delta)^{n+1}-1$. Nachdem man durch δ^2 dividirt und den offenbar auftretenden Factor x abgelöst hat, erhält man an der Grenze bei verschwindendem δ die Gleichung aller Doppelelemente in der Form

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\times \quad 4)$$
$$\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\beta_k}{x-\beta_k}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\beta_i}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}\right\}=0\,.$$

Dieselbe ist das Resultat der Elimination von μ zwischen

$$(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\alpha_i}-\mu\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}\right\}=0\,, \quad 5a)$$

$$(x-\beta_1)\dots(x-\beta_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x-\beta_i}-\mu\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\beta_i}{x-\beta_i}\right\}=0\,. \quad 5b)$$

Für $\mu=0$ werden einander zugeordnet die Gruppen X_1X' und Y_1Y' der Doppelemente der Involutionen AA_1A_2, D_2^{n+1} und BB_1B_2, D_2^{n+1} (§ 184, 9). Für $\mu=\infty$ entsprechen sich die Gruppen X_2X'' und Y_2Y'' der Doppelelemente der Involutionen AA_1A_2, D_1^{n+1} und BB_1B_2, D_1^{n+1} (§ 184, 4). Wir verbinden nun mit beiden Gleichungen 5a) und 5b) die eine Gleichung

$$1-\mu\cdot x=0\,. \quad 6)$$

Die Involution 5a) erzeugt mit dem einförmigen Gebilde 6) eine Gruppe mit der Gleichung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x}{x-a_i}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_i}{x-a_i}\right\}$$
$$\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})=0\,,$$

also AA_1A_2. Ebenso erzeugen 5b) und 6) die Gruppe BB_1B_2. Man kann also die beiden Gruppen AA_1A_2, BB_1B_2 durch die Reihenpaare

$$X_1X',\,X_2X'',\,X_3X''',\,\dots\;\overline{\wedge}\;D_2,\,D_1,\,D_3,\,\dots \quad 7a)$$

und

7b) $$Y_1 Y', Y_2 Y'', Y_3 Y''', \ldots \barwedge D_2, D_1, D_3, \ldots$$

erzeugen, und es sind dann alle Doppelelemente sicherlich den beiden projectivischen Reihen

8) $$X_1 X', X_2 X'', X_3 X''', \ldots \barwedge Y_1 Y', Y_2 Y'', Y_3 Y''', \ldots$$

gemeinsam.

Gerade als Coincidenzelemente dieses speciellen Reihenpaares stellten sich aber auch auf geometrischem Wege alle etwa vorhandenen Doppelelemente heraus (§ 55).

Dafs die beiden projectivischen Reihen 1a) und 1b) neben D_1 und D_2 noch höchstens $2n$ andere Coincidenzelemente besitzen konnten, erhielten wir (§ 50) als einen Specialfall der Thatsache, dafs ein bestimmtes Reihenpaar

$$AA_1A_2', BB_1B_2, \ldots \barwedge B'B_1'B_2', A'A_1'A_2, \ldots$$

sich finden lassen mufste, welches alle Coincidenzelemente der beiden gegebenen Reihen

$$AA_1A_2, BB_1B_2, \ldots \barwedge B'B_1'B_2'. A'A_1'A_2', \ldots$$

besitzt (§ 49); wenn A_2' ein Coincidenzelement der beiden Reihen zweiter Art war, so zerfiel die erste Involution des ersten Paares in ein festes Element A_2' und in eine projectivische Involution $n$ter Ordnung.

Der analytische Ausdruck hierfür ist, dafs alle Coincidenzelemente einer Gleichung $2(n+1)$ten Grades von der Form

$$f(x)f_1(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_1')(x-\alpha_2)(x-\alpha_2')$$
$$-\lambda g(x)g_1(x)(x-\beta_1)(x-\beta_1')(x-\beta_2)(x-\beta_2') = 0$$

genügen, die bei Vertauschung von α_2 und α_2' sich nicht ändert. Dies wird nun speciell auf die beiden Reihen 1a) und 1b) wiederholt angewendet. Es ergiebt sich, dafs ihre Coincidenzelemente auch zwei Reihen mit Gleichungen von der Form

$$(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n+1}) - \mu(x-\alpha_1(1+\delta))\ldots(x-\alpha_{n+1}(1+\delta)) = 0$$
$$(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n+1}) - \varepsilon\mu(x-\beta_1(1+\delta))\ldots(x-\beta_{n+1}(1+\delta)) = 0$$

gemeinsam sind. Analytisch steht fest, dafs $\varepsilon = 1$ ist; in unserer rein geometrischen Überlegung (§ 55) werden diese Reihen dadurch fixirt, dafs wir D_1 und D_2 als Coincidenzelemente von vorne herein kennen. Indem wir jede Involution von den Gruppen aus erzeugen, die durch

diese Elemente bestimmt werden, kommen wir zu einem Reihenpaar, das an der Grenze in die projectivischen Involutionen 5a) und 5b) $n$ter Ordnung übergeht.

§ 186. In den §§ 57—64 wird bewiesen, dafs eine Involution $n$ter Ordnung mit einem projectivischen einförmigen Gebilde desselben Trägers im Allgemeinen $n+1$ von einander verschiedene Elemente gemeinsam hat.

Es genügt, diese Thatsache an dem Beispiel der auf der Abscisse gelegenen Punktinvolutionen zu erweisen. Wird jeder Punkt $y=0$, $x=a+bi$ durch den reellen Punkt X mit den Coordinaten a,b repräsentirt, so haben wir eine specielle $(1,n)$-Beziehung zweier in einander liegender Ebenen zu betrachten und die entsprechend gemeinsamen Punkte beider festzustellen. Dieselben Repräsentationsebenen gehören, geometrisch genommen, einer Strahleninvolution und einem projectivischen Strahlbüschel zu, die einen der beiden Kreispunkte zum gemeinsamen Centrum haben.

Wenn die Gruppe als das Erzeugnifs der beiden Reihen

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1})-\lambda(x-\beta_2)(x-\beta_3)\dots(x-\beta_{n+1})=0, \quad 1\text{a})$$

$$\mu(x-\beta_1) \qquad -\lambda(x-\alpha_1) \qquad =0 \quad 1\text{b})$$

definirt ist, so gehört sie der Involution $(n+1)$ter Ordnung

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n+1})-\mu(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_{n+1})=0 \quad 2)$$

an. Sie verändert sich projectivisch zu dem Gliede

$$\mu(x-\beta_1)-\lambda_1(x-\alpha_1)=0\ , \qquad 3)$$

das einem festen, zu λ_1 gehörigen Gliede der Involution 1a) zugeordnet wird. Wir beziehen die Involution projectivisch auf eine andere Punktreihe

$$\mu(x'-\beta_0)-\gamma(x'-\alpha_0)=0\ . \qquad 4)$$

Jetzt bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \dots r_{n+1}$ die Entfernungen des Punktes X von den Punkten $A_1, A_2, \dots A_{n+1}$, die die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n+1}$ repräsentiren, mit $r_1', r_2', \dots r_{n+1}'$ die Entfernungen des Punktes X von $B_1, B_2, \dots B_n$. Ebenso seien r und r' die Entfernungen des Repräsentanten X' von x' von A_0 und B_0, die α_0 und β_0 repräsentiren. Andererseits bezeichne man mit ϕ_i den Winkel, um welchen man in einem bestimmt gewählten Sinne einen Halbstrahl um A_i drehen mufs, damit er aus dem Parallelismus zur positiven

Richtung der x Axe in die Linie A_iX gelange. Den Winkeln ϕ_k', ϕ und ϕ' verleihe man die analoge Bedeutung für B_k, A_0 und B_0. Alsdann wird

$$5)\qquad \frac{\mu}{\gamma} = \frac{r}{r'}\left\{\cos\,(\phi - \phi') + i\sin\,(\phi - \phi')\right\}.$$

Die Gleichung der Gruppe 2) nimmt die Form an:

$$6)\qquad \mu = \frac{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}{r_1' r_2' \ldots r_{n+1}'}\left\{\cos\,(\phi_1 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \cdots \phi_{n+1}') + i\sin\,(\phi_1 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \cdots \phi_{n+1}')\right\}.$$

Läfst man nun den Punkt X' irgend einen Kreis durchlaufen, so erhält man als Ort für die gesuchte Gruppe eine Kette der Involutionsebene. Setzt man

$$7)\qquad \phi - \phi' = c_0\,,$$

so beschreibt X' einen Kreisbogen, der durch A_0 und B_0 begrenzt wird. Dann erhält man eine entsprechende Halbkette mit der Gleichung:

$$7\,\text{a})\qquad \phi_1 + \phi_2 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_1' - \phi_2' - \cdots \phi_{n+1}' = c_0' + 2m'\pi\,.$$

Der entgegengesetzte Kreisbogen zu 7) kann durch

$$8)\qquad \phi - \phi' = c_0 + \pi\,,$$

die entsprechende Halbkette durch

$$8\,\text{a})\qquad \phi_1 + \phi_2 + \ldots \phi_{n+1} - \phi_1' - \phi_2' - \phi_{n+1}' = c_0' + (2m' + 1)\pi$$

dargestellt werden; m' ist in 7a) und 8a) eine willkürliche ganze Zahl.

Andererseits erhalten wir für die Gleichungen 1a) und 1b) die besonderen Formen:

$$9\,\text{a})\qquad \frac{r_2 r_3 \ldots r_{n+1}}{r_2' r_3' \ldots r_{n+1}'}\left\{\cos\,(\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \phi_3' - \cdots \phi_{n+1}') + i\sin\,(\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \phi_3' \cdots - \phi_{n+1}')\right\} = \lambda\,,$$

$$9\,\text{b})\qquad \frac{r_1'}{r_1}\left\{\cos\,(\phi_1' - \phi_1) + i\sin\,(\phi_1' - \phi_1)\right\} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Nun setze man

$$10\,\text{a})\quad \lambda = \varrho(\cos\tau + i\,\sin\tau)\,,\quad 10\,\text{b})\quad \mu = \varrho_0'(\cos\beta + i\,\sin\beta)\,,$$

dann bekommt man offenbar aus 9a) und 9b)

$$11\,\text{a})\quad \phi_2 + \cdots \phi_{n+1} - \phi_2' - \cdots \phi_{n+1}' = \tau + 2m'\pi\,,\quad 11\,\text{b})\quad \phi_1' - \phi_1 = \tau - \beta.$$

Für irgend einen constanten Werth von τ durchläuft der Punkt X in 11b) einen Kreisbogen B_1, A_1, und 11a) ist die Gleichung der entsprechenden

Halbkette der Involutionsebene 1a). Mit veränderlichem τ wird jedem Kreisbogen 11b) eine bestimmte Halbkette 11a) zugeordnet. Der Punkt A_k bestimmt an $A_2, A_3, \ldots A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots A_{n+1}, B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ specielle Winkel $\phi_2, \phi_3, \ldots \phi_{k-1}, \phi_{k+1}, \ldots \phi_{n+1}, \phi'_2, \phi'_3, \ldots \phi'_{n+1}$; die Summe derselben sei χ_k. Alsdann erhält man die Richtungen der Halbtangenten von 11a) in den Punkten $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ aus den Gleichungen

$$\phi_2 + \chi_2 = \tau - \beta, \ \phi_3 + \chi_3 = \tau - \beta, \ \ldots \ \phi_{n+1} + \chi_{n+1} = \tau - \beta. \quad 12)$$

Analog bezeichne man mit χ'_k den speciellen Winkelwerth $\phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - \phi'_2 - \cdots \phi'_{k-1} - \phi'_{k+1} - \cdots \phi'_{n+1}$ für B_k; dann sind offenbar die Winkel, welche die Tangenten in $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ bestimmen, aus den Gleichungen

$$\chi'_2 - \phi'_2 = \tau - \beta \ ; \ \chi'_3 - \phi'_3 = \tau - \beta ; \ \ldots \ \chi'_{n+1} - \phi'_{n+1} = \tau - \beta \quad 13)$$

zu entnehmen. Hieraus geht hervor, dafs die beweglichen Tangenten in $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit τ um die bezüglichen Punkte drehen, die in $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ aber in entgegengesetzter Richtung sich gleichmäfsig bewegen. Von den Tangenten des Kreisbogens 11b) schreitet die eine in B_1 in der positiven constanten Richtung, die andere in A_1 in der entgegengesetzten Richtung vorwärts. Die Elimination von τ aus 11a) und 11b) ergiebt die Gleichung 7a) der zu betrachtenden Halbkette; dieselbe wird also erzeugt durch die Halbkettenbüschel 11a) und 11b). Nun wird vorausgesetzt, dafs jede Gleichung $n$ten Grades (§ 32) n Wurzeln besitzt, und ferner, dafs dieselben sich mit den Coëfficienten der Gleichung stetig ändern (§ 39). Dann mufs jede Halbkette 11a) aus n Ranken bestehen, welche die Punkte $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ mit den Punkten $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ verbinden. Jedem Punkte eines Kreisbogens B_1, A_1 entsprechen nämlich n verschiedene Punkte der Halbkette. Für die Anfangslage fallen dieselben mit $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$, für die Endlage dagegen mit $B_2, B_3, \ldots B_{n+1}$ zusammen; für die Zwischenlagen aber verändert sich die Gruppe stetig.

Die Halbkette $(n+1)$ter Ordnung wird alsdann (§ 59) auf ihre Stetigkeit untersucht, nachdem zuvor festgesetzt ist, dafs keiner der höchstens $2n$ singulären Punkte der Ebene auf ihr liegen soll. Alsdann mufs jeder Punkt P derselben einem einzelnen unverzweigten Zuge angehören. Die auseinander gesetzte Erzeugungsweise der Halbkette $(n+1)$ter Ord-

nung kann verschiedentlich abgeändert werden. Für B_1 und A_1 können zwei beliebige Punkte B_{i_1} und A_{i_1} eintreten. Bei jeder Erzeugungsweise entspricht dem Kreisbogen B_{i_1}, D_2, A_{i_1} eine bestimmte Halbkette $n$ter Ordnung $A_{i_2} A^i, D_2, B_{i_2} B^i$. Hat nun die letztere in D_2 einen Doppelpunkt, oder berührt sie den Kreisbogen, so zeigt auch die untersuchte Halbkette $(n+1)$ter Ordnung dieselbe Tangente in D_2, wie B_{i_1}, D_2, A_{i_1}. Tritt nun dieser besondere Umstand für zwei verschiedene Halbketten B_{i_1}, D_2, A_{i_1} und B_{k_1}, D_2, A_{k_1} ein, die sich in D_2 nicht berühren, so mufs die Halbkette $(n+1)$ter Ordnung, da sie in D_2 sich zwei verschiedenen Kreisbögen anschmiegen müfste, sich hier nothwendig verzweigen. Eine solche Verzweigung kann aber nur dann eintreten, wenn D_2 in seiner Gruppe der Involution $(n+1)$ter Ordnuug mehrfach zählt.

Die Ergänzungsgruppe DD_1, welche in AA_1A_2, BB_1B_2 zu D_2 gehört, ist ein Glied von $AA_2, \mathfrak{D}B_1$, wo $\mathfrak{D}D_2$ zu AA_2, BB_2 gehört. Die Kette $AA_2, \mathfrak{D}B_1, DD_1$ des Involutionsfeldes AA_1, DD_1 ergiebt sich als Erzeugnifs zweier Kettenbüschel $AA_2, \mathfrak{D}D_2$ und B_1, D_2; in ihnen entsprechen die Ketten $AA_2, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ und B_1, D_2, A_1 einander. Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise nennen wir noch $r_2'', \ldots r_{n+1}''$ die Entfernungen eines Punktes X von D_2 und den Punkten der Gruppe $\mathfrak{D}$. Ferner sollen $\phi_2'', \ldots \phi_{n+1}''$ die zu $\phi_1, \phi_2', \ldots$ analogen Winkel sein, die dem Punkte D_2 und denen von $\mathfrak{D}$ zugehören. Alsdann haben wir zwei Kettenbüschel mit den Gleichungen

$$14\text{a)} \quad \phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n+1} - (\phi_2'' + \phi_3'' + \cdots \phi_{n+1}'') = \sigma - m'\pi,$$

$$14\text{b)} \quad \phi_1' - \phi_2'' = \sigma - \varepsilon - n'\pi$$

zu verbinden. Die Elimination von σ ergiebt das Resultat:

$$15) \quad \phi_2 + \phi_3 + \cdots \phi_{n-1} - (\phi_1' + \phi_3'' + \cdots \phi_{n+1}'') = \varepsilon + (n' - m')\pi.$$

14a) und 14b) erzeugen also eine ganz bestimmte Kette der Involutionsebene $AA_2, \mathfrak{D}B_1$. Enthält die neue Halbkette den Punkt D_2, so mufs für die ihm zugehörigen Werthe $\chi_2, \chi_3, \ldots \chi_{n+1}; \chi_2', \chi_3'', \ldots \chi_{n+1}''$ der Winkel $\phi_\lambda^{(i)}$ die Beziehung bestehen

$$\chi_2 + \chi_3 + \cdots \chi_{n+1} - (\chi_2' + \chi_3'' + \cdots \chi_n'') = \varepsilon + (n' - m')\pi. \quad 16)$$

Die beiden Halbtangenten von 14a) in D_2 bestimmen mit der positiven Richtung der x Axe die Winkel

$$\gamma_2'' = \sigma - \{\chi_2 + \chi_3 + \cdots \chi_{n+1} - \chi_3'' - \cdots \chi_{n+1}''\} - m''\pi. \quad 17)$$

Die Halbtangenten in D_2 von 14b) bestimmen die Winkel

$$\delta_2'' = \sigma - \varepsilon + \chi_2' - n''\pi. \quad 18)$$

Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf 16)

$$\gamma_2'' - \delta_2'' = m_0\pi. \quad 19)$$

Es berühren sich mithin irgend zwei entsprechende Halbketten 14a) und 14b), wenn die Gleichung 16) besteht. Umgekehrt, wenn dies auch nur bei $AA_2, \mathfrak{D}D_2, BB_2$ und B_1, D_2, A_1 eintrifft, so enthält die Kette $AA_2, DD_1, \mathfrak{D}B_1$ den Punkt D_2. Würde nun noch B_{i_1}, D_2, A_1 von der entsprechenden Halbkette $AA_2, \mathfrak{D}'D_2, B^iB_{i_2}$ berührt, so enthielte noch die zweite Kette $AA_2, \mathfrak{D}'B_{i_1}, DD_1$ den Punkt D_2. Da beide Ketten aufser AA_1 nur noch genau eine Gruppe gemeinsam haben, so mufs dann D_2 in DD_1 vorkommen. Enthält also die untersuchte Halbkette AA_1A_2, BB_1B_2 keine der singulären Gruppen, so kann A_1 aus der zweiten Gruppe so gewählt werden, dafs A_1, D_2, B_1 und AA_2, D_2, BB_2 sich nicht berühren, und dafs auch die letztere Curve D_2 nicht zum Doppelpunkte hat. Aus diesem Satze wird gefolgert, dafs die Halbkette überall unverzweigt ist und mit $n+1$ Zügen die $2(n+1)$ Punkte A_i, B_k verbindet.

Im zweiten Theile des Beweises wird (§§ 61 und 62) gezeigt, dafs jede der $n+1$ Ranken einen der Punkte A_i mit einem der Punkte B_k verbinden mufs.

Hiermit war der Hauptheil des Beweises geliefert. Es war nun leicht zu zeigen, dafs auf jedem einzelnen Zuge $A_{i_1}B_{i_1}$ ein Punkt der gesuchten Gruppe lag. Der analytische Inhalt des angewendeten Schlusses ist der: Die Gröfse $\frac{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}{r_1' r_2' \ldots r_{n+1}'}$ ändert sich von 0 bis $+\infty$, während der Punkt X den Zug $A_{i_1}B_{i_1}$ durchläuft; einmal wenigstens nimmt also der Quotient den vorgeschriebenen Werth ϱ_0' (6 und 10b) an. Da die untersuchte Gruppe höchstens $n+1$ Punkte enthalten kann, so findet sich eben genau ein

Punkt derselben auf jedem Zweige der Halbkette, und dieselbe besteht nur aus diesen $n+1$ Zügen.

Zur Vervollständigung des Beweises sind noch Erörterungen über das Involutionsfeld $(n+1)$ ter Ordnung und Stetigkeitsbetrachtungen nöthig, welche zusammengenommen den Satz enthalten, dafs mit den Coëfficienten die Wurzeln einer Gleichung sich stetig ändern. Dies wird in den §§ 65—70 geleistet.

§ 187. Im § 73 wird geometrisch die Existenz von Schaaren projectivischer Involutionen dargethan.

Die Gleichung

$$1)\qquad u+\lambda v+\mu(\mu_1+\lambda v_1)=0$$

stellt, wenn u, u_1, v, v_1 ganze Functionen $n$ten Grades eines Theilverhältnisses sind, für jeden Werth μ_0 von μ eine bestimmte Involution

$$1a)\qquad u+\mu_0 u_1+\lambda(v+\mu_0 v_1)=0$$

dar. Irgend zwei dieser projectivischen Involutionen besitzen eine und dieselbe Gruppe

$$2)\qquad uv_1-vu_1=0$$

von $2n$ Coincidenzelementen. Wir erhalten so eine Schaar projectivischer Involutionen. Die ebenfalls zu einander projectivischen Leitinvolutionen

$$3)\qquad (u+\lambda_0 v)+\mu(u_1+\lambda_0 v_1)=0$$

entstehen, wenn wir λ specielle Werthe ertheilen, dagegen μ veränderlich lassen.

Verbinden wir eine dritte projectivische Involution

$$4)\qquad w+\lambda w_1=0$$

mit allen Involutionen der Schaar 1), so erhalten wir als Coincidenzgruppen die Glieder

$$5)\qquad uw_1-vw+\mu(u_1 w_1-v_1 w)=0$$

einer Involution $(n+m)$ter Ordnung, welche zu den Leitinvolutionen 3) projectivisch ist (§ 74).

Das dritte Capitel der geometrischen Entwickelungen. §§ 188—192.

§ 188. Es seien $u_1, u_2, u_3, \dots u_{\mu+1}$ binäre Formen gleicher Ordnung, zwischen denen keine lineare Gleichung besteht. Alsdann stellt das allgemeine lineare System

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 \qquad 1)$$

das allgemeinste Netz $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+1}$ μter Stufe dar. An die Stelle der Form 1) können wir die identische

$$l_1 u_1 + (l_2 u_2 + l_3 u_3 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0 \qquad 2)$$

treten lassen. Hierdurch wird das Netz in die Gesammtheit der Involutionen aufgelöst, welche die eine Gruppe U_1 mit denen des Netzes $U_2 U_3 \dots U_{\mu+1}$ $(\mu-1)$ter Stufe verbinden. Die Anbringung dieser Klammern zeigt uns also, dafs 1) unser geometrisches Involutionsnetz μter Stufe darstellt (§ 81). Dasselbe kann auch durch Netze αter Stufe eines Netzbündels ausgefüllt werden. Diese Möglichkeit erhellt ebenfalls aus der Anbringung zweier Klammern; wir können nämlich setzen:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0\,. \qquad 3)$$

Hier erhalten wir für Specialwerthe von $l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}, \dots l_{\mu+1}$ in der Klammer die Gleichung einer bestimmten Gruppe, und das Ganze stellt die Gleichung eines Netzes αter Stufe dar, das von dem Netze $(\alpha-1)$ter Stufe

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha = 0 \qquad 4)$$

ausgeht. Das Netz μter Stufe wird von allen Netzen αter Stufe ausgefüllt, die das Netz 4) mit Gruppen des Netzes

$$l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 \qquad 5)$$

$(\mu-\alpha-1)$ter Stufe verbinden. Sind

$$u'_1 = 0\,, u'_2 = 0\,, \dots u'_\alpha = 0 \qquad 6)$$

die Gleichungen von irgend α Gruppen $U'_1, U'_2, \dots U'_\alpha$ des Netzes 1), so besteht offenbar die Identität:

$$l'_1 u'_1 + l'_2 u'_2 + \cdots l'_\alpha u'_\alpha \equiv l''_1 u_1 + l''_2 u_2 + \cdots l''_{\mu+1} u_{\mu+1}\,.$$

Das Netz $(\alpha-1)$ter Stufe, das sich aus den α Gruppen 6) zusammensetzen läfst, besteht also nur aus Gruppen des Netzes 1). Ein solches Netz kann noch auf eine zweite Weise definirt werden. Eine Gruppe

$$7) \qquad m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots m_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0$$

gehört zu demselben, wenn für $m_1, m_2, \ldots m_{\mu+1}$ $\mu-\alpha$ von einander unabhängige Gleichungen von der Form

$$8) \quad p_1^{(i)} m_1 + p_2^{(i)} m_2 + \cdots p_{\mu+1}^{(i)} m_{\mu+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu-\alpha)$$

bestehen. Die Auflösung der Gleichungen 8) führt nämlich auf α Gleichungen von der Form

$$9) \qquad m_i = l_1' r_i^{(1)} + l_2' r_i^{(2)} + \ldots l_\alpha' r_i^{(\alpha)}; \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu+1)$$

es besteht daher, wenn noch

$$u_k^0 = r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \cdots r_{\mu+1}^{(k)} u_{\mu+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots \alpha)$$

gesetzt wird, wirklich die Identität:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots m_{\mu+1} u_{\mu+1} \equiv l_1' u_1^0 + l_2' u_2^0 + \cdots l_\alpha' u_\alpha^0 .$$

Zwei Netze αter und βter Stufe des Netzes μter Stufe haben ein Netz $(\beta+\alpha-\mu)$ter Stufe mit einander gemeinsam, wenn $\alpha+\beta > \mu$ ist. Denn für jede gemeinsame Gruppe bestehen erstens die linearen Gleichungen 8), zweitens noch die β anderen

$$10) \quad q_1^{(k)} m_1 + q_2^{(k)} m_2 + \cdots q_{\mu+1}^{(k)} m_{\mu+1} = 0 , \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu-\beta)$$

im Ganzen also $2\mu-\alpha-\beta$ lineare Gleichungen; die Gruppen füllen daher, wenn $\alpha+\beta$ nicht kleiner als μ ist, ein Netz $(\alpha+\beta-\mu)$ter Stufe aus. Die beiden Netze haben eine Gruppe mit einander gemeinsam, wenn $\alpha+\beta = \mu$ ist.

Für die Coëfficienten einer Gruppe, die s Netzen $\mu_1$ter, $\mu_2$ter, … $\mu_s$ter Stufe zugleich angehört, bestehen $s\mu-\mu_1-\mu_2-\cdots\mu_s$ lineare homogene Gleichungen. Dieselben haben mithin ein Netz der Stufe $\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_s-(s-1)\mu$ mit einander gemeinsam, wofern diese Zahl nicht negativ ist.

Zwei Netze gleicher Stufe können collinear bezogen werden. Sind

$$10\text{a}) \; l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0 , \; 10\text{b}) \; m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots m_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$$

entsprechende Gruppen, so bestehen $\mu+1$ lineare Gleichungen

$$m_i = s_1^{(i)} l_1 + s_2^{(i)} l_2 + \cdots s_{\mu+1}^{(i)} l_{\mu+1} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \ldots \mu + 1) \quad 11)$$

Die $(\mu + 1)^2$ Gröfsen $s_k^{(i)}$ können bestimmt werden, wenn wir irgend $\mu + 2$ Paare entsprechender Gruppen kennen. Sind $U_1, V_1; U_2, V_2; \ldots U_{\mu+1}, V_{\mu+1}$ homologe Paare, so nehmen die Gleichungen entsprechender Gruppen die Formen an:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0, \qquad 12a)$$

$$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0. \qquad 12b)$$

In den Formen u_λ und v_λ müssen die multiplicativen Constanten richtig bestimmt werden, damit ein $(\mu + 2)$tes Paar entsprechender Gruppen sich ergebe. Durch ein solches Paar aber werden die bezüglichen Constanten auch eindeutig bestimmt, wenn keine $\mu + 1$ der U und keine $\mu + 1$ der V zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe angehören.

Wenn die collinearen Netze in einander liegen, können sich selbst entsprechende Gruppen vorkommen. Wir wollen annehmen, dafs $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ mit $V_1, V_2, \ldots V_{\mu+1}$ zusammenfallen; u_λ und v_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots \mu + 1)$ unterscheiden sich dann nur um Constanten. Die Verhältnisse aller $2(\mu + 1)$ Constanten können bestimmt werden, wenn noch ein Paar entsprechender Gruppen gegeben ist. Soll noch eine andere Gruppe sich selbst entsprechen, die mit keinen μ der vorigen zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehört, so werden die Constanten der v denen der u proportional, und es fallen je zwei entsprechende Gruppen zusammen.

Collineare Netze können so bezogen werden, dafs sie entsprechend gemeinsame Theilnetze enthalten. Homologe Gruppen haben dann die Gleichungen:

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0, \qquad 13a)$$

$$\begin{aligned} &\alpha(l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_i u_i) + \beta(l_{i+1} u_{i+1} + \cdots l_k u_k) + \cdots \\ &\sigma(l_{s+1} u_{s+1} + \cdots l_t u_t) + l_{t+1} v_{t+1} + l_{t+2} v_{t+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0. \end{aligned} \qquad 13b)$$

Hierbei entsprechen sich selbst die Theilnetze

$$\begin{aligned} l_1 u_1 + \cdots l_i u_i = 0, \; l_{i+1} u_{i+1} + \cdots l_k u_k = 0, \ldots \\ l_{s+1} u_{s+1} + \cdots l_t u_t = 0. \end{aligned} \qquad 14)$$

In einander liegen collineare Netze, die sich aus $U_1, U_2, \ldots U_t$ zusammensetzen.

Die einzelnen Schnitte eines Netzbündels

$$15)\qquad l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1}) = 0$$

sind unter einander collinear. Die Netze αter Stufe des Bündels 15), welche durch $U_{\alpha+1}, U_{\alpha+2}, \ldots U_{\mu+1}$ bestimmt werden, schneiden auf einem zweiten Netze $(\mu-\alpha)$ter Stufe neue Gruppen $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots V_{\mu+1}$ aus, deren Gleichungen durch passende Constantenbestimmung auf die Form gebracht werden können:

$$16)\qquad v_i = m_1^{(i)} u_1 + m_2^{(i)} u_2 + \cdots m_\alpha^{(i)} u_\alpha + u_i = 0. \quad (i = \alpha+1, \ldots \mu+1)$$

Das zweite Netzbündel

$$17)\qquad l_1' u_1 + l_2' u_2 + \cdots l_\alpha' u_\alpha + (l_{\alpha+1} v_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} v_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1}) = 0$$

ist mit dem vorigen (15) identisch, denn das Netz αter Stufe desselben, welches durch die Gruppe

$$18)\qquad l_{\alpha+1} v_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} v_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$$

bestimmt wird, kann wegen der Gleichungen 16) auf die Form

$$19)\qquad n_1 u_1 + n_2 u_2 + \cdots n_\alpha u_\alpha + (l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} u_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1}) = 0$$

gebracht werden und enthält daher auch die Gruppe

$$20)\qquad l_{\alpha+1} u_{\alpha+1} + l_{\alpha+2} u_{\alpha+2} + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0\,.$$

Die Netze $U_{\alpha+1} U_{\alpha+2} \ldots U_{\mu+1}$ und $V_{\alpha+1} V_{\alpha+2} \ldots V_{\mu+1}$ sind mithin zu einander collinear.

Zwei collineare Netze gleicher Ordnung und gleicher Stufe, die aus Gruppen desselben einförmigen Gebildes bestehen, bestimmen eine Schaar collinearer Netze. Sind

$$21\text{a})\qquad l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0$$

$$21\text{b})\qquad l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0$$

die Gleichungen der beiden collinearen Netze $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ und $V_1 V_2 \ldots V_{\mu+1}$, so ist

$$22)\qquad l_1(u_1 + \lambda v_1) + l_2(u_2 + \lambda v_2) + \cdots l_{\mu+1}(u_{\mu+1} + \lambda v_{\mu+1}) = 0$$

die Gleichung der in Rede stehenden Schaar; offenbar erhält man für jeden Werth von λ ein zu den beiden gegebenen collineares Netz. Betrachtet man andererseits $l_1, l_2, \ldots l_{\mu+1}$ als fest und λ als beweglich, so erhält man aus 22) eine Involution, auf der eine bestimmte Reihe homo-

loger Gruppen $U, V, W, Z, \ldots$ liegt. Alle diese verschiedenen Leitinvolutionen sind zu einander projectivisch.

Die Theoreme, welche wir soeben erläutert haben, sind auf geometrischem Wege in den beiden ersten Abschnitten des dritten Capitels erwiesen worden. Da uns die genaue Darlegung unserer dortigen Beweismethoden hier zu weit führen würde, so genüge die Bemerkung, dafs die Einführung der hochwichtigen Schaaren mit Hülfe ganz derselben Schlüsse gelingt, die in der Geometrie des Raumes auf die Regelflächen führen.

§ 189. Die Involution μten Ranges und $m$ter Ordnung liefert dieselbe Beziehung zwischen den Elementen zweier einförmiger Gebilde, wie eine verschwindende ganze Function

$$f(y, x) = 0, \qquad 1)$$

welche die Theilverhältnisse y und x zusammengehöriger Elemente bis zu den Potenzen m und μ enthält.

Man kann bekanntlich $(\mu+1)^2$ Constanten $b_k^{(i)}$ so bestimmen, dafs die Gleichungen stattfinden:

$$x_i \equiv (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu+1}) \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{b_k^{(i)}}{x-a_k} \cdot \qquad (i=0,1,2,\ldots\mu) \quad 2)$$

Man ordne nun $f(y, x)$ nach Potenzen von x und setze für dieselben ihre Werthe aus den Gleichungen 2) ein, so nimmt 1) die Form an:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\mu+1}) \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{u_k}{x-a_k} = 0. \qquad 3)$$

Hierin bedeuten $u_1, u_2, \ldots u_{\mu+1}$ Polynome $m$ten Grades in y; sie ergeben, gleich Null gesetzt, die Gleichungen bestimmter Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ des vorliegenden Trägers. Jedem Werthe von x, also jedem Element des einen Trägers, gehört eine bestimmte auf dem anderen liegende Gruppe zu; den Werthen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+1}$ entsprechen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$. Offenbar können die $\mu+1$ Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ ganz willkürlich gewählt werden, und wir verfügen dann noch über die Constanten der u_λ. Bestimmen daher die Gruppen $U_1, U_2, \ldots U_{\mu+1}$ ein Netz μter Stufe, so sind alle wesentlichen Constanten der Form 3) bekannt, wenn für irgend einen Werth x_0 von x eine Gruppe des Netzes $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+1}$ gegeben ist, die mit keinen μ der gegebenen Gruppen zu einem Theilnetze $(\mu-1)$ter Stufe gehört.

Man kann von der Form 1) $\mu + 3$ Gruppen willkürlich geben, wenn man denselben keine bestimmte Stelle anweist, also die Werthe von x offen läfst, denen sie zugehören. Man hat alsdann nicht nur die multiplicativen Constanten der u, sondern auch die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+1}$ zur freien Verfügung und kann eben mit ihrer Hülfe zwei neue Gruppen $U_{\mu+2}$ und $U_{\mu+3}$ dem Gebilde anreihen.

Nach unserer geometrischen Anschauung (§99) besteht, wenn $U_1 U_2 \ldots U_{\mu+3} \ldots$ eine Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges ist, die Beziehung

$$4) \qquad U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3} \ldots \;\overline{\wedge}\; N(U_1 U_2 U_3 \ldots U_{\mu+3} \ldots)$$

dann immer, wenn N ein aus irgend $\mu - 1$ Gruppen der Involution gebildetes Netz $(\mu - 2)$ter Stufe ist. Die Involution konnte daher auch als Erzeugnifs von μ projectivischen Büscheln aus Netzen $(\mu - 1)$ter Stufe dargestellt werden. Dieselbe ist durch $\mu + 2$ gegebene Gruppen eindeutig bestimmt, welche bestimmten Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{\mu+2}$ (mit diesen Theilverhältnissen) eines projectivischen einförmigen Gebildes zugewiesen werden. Das Netzbüschel, welches von $U_2 \ldots U_\mu$ aus die Involution μten Ranges projicirt, hat die Gleichung:

$$5\text{a}) \qquad l_2' u_2 + l_3' u_3 + \cdots l_\mu' u_\mu + \left(\frac{u_1}{x - a_1} + \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,.$$

Das Verhältnifs der Constanten in u_1 und $u_{\mu+1}$ wird durch den Umstand bedingt, dafs die zu $a_{\mu+2}$ gehörende Gruppe $U_{\mu+2}$, welche mit keinen μ der gegebenen zu einem Netze $(\mu - 1)$ter Stufe gehört, bekannt ist. Die Gleichung der Gruppe U, die zu dem Werthe x gehört, mufs sich daher in jeder der μ Formen darstellen lassen:

$$5) \quad \begin{cases} l_2' u_2 + l_3' u_3 + \cdots l_\mu' u_\mu + \left(\dfrac{u_1}{x - a_1} + \dfrac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \\ l_1'' u_1 + l_3'' u_3 + \cdots l_\mu'' u_\mu + \left(\dfrac{u_2}{x - a_2} + \dfrac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_1^{(\mu)} u_1 + l_2^{(\mu)} u_2 + \cdots l_{\mu-1}^{(\mu)} u_{\mu-1} + \left(\dfrac{u_\mu}{x - a_\mu} + \dfrac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs die Gleichung der Gruppe folgende Form hat

$$\frac{u_1}{x - a_1} + \frac{u_2}{x - a_2} + \cdots \frac{u_{\mu+1}}{x - a_{\mu+1}} = 0\,,$$

oder, wenn man die Nenner entfernt,

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,. \quad 6)$$

Die allgemeine Involution μten Ranges stellt also geometrisch den Zusammenhang dar, der durch eine rationale Gleichung vermittelt wird, die y bis zur $m$ten, x bis zur μten Potenz enthält.

Neben den eigentlichen Involutionen μten Ranges sind noch die entarteten zu betrachten. Man bringe die Gleichung einer Gruppe U'_λ auf die Form

$$u'_\lambda \equiv u_\lambda + c_1^{(\lambda)}v_1 + c_2^{(\lambda)}v_2 + \cdots c_\alpha^{(\lambda)}v_\alpha = 0\,. \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots \mu+2) \quad 7)$$

Die Gruppen $U_1, U_2, \dots U_{\mu+2}$ mögen nur noch ein Netz $(\mu-\alpha-1)$ter Stufe bedingen, die Gruppen $V_1, V_2, \dots V_\alpha$ aber mit demselben ein Netz μter Stufe bestimmen; von den Gruppen $U'_1, U'_2, \dots U'_{\mu+2}$ sollen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)$ter Stufe angehören. Für eine Involution, in der die letzteren Gruppen den Elementen $a_1, a_2, \dots a_{\mu+2}$ eines einförmigen Gebildes zugewiesen sind, erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u'_1}{x-a_1}+\frac{u'_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u'_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,. \quad 8)$$

Nun projiciren wir jede Gruppe dieser Involution von $V_1 V_2 \dots V_\alpha$ aus auf das ursprüngliche Netz, so bekommen wir nach unserer Definition (§ 106) eine entartete Involution. Jede Gruppe derselben liegt mit einer Gruppe des Zeigers 8) und den Gruppen $V_1, V_2, \dots V_\alpha$ in einem Netze αter Stufe. Die Gleichung 8) stellt sich als eine homogene Function der $v_1, v_2, \dots v_\alpha$, $u_1, u_2, \dots \mu_{\mu+2}$ dar; unterdrückt man die mit den ersteren Factoren $v_1, v_2, \dots v_\alpha$ behafteten Terme, so erhalten wir die Gleichung der entarteten Involution wieder in der Form

$$(x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\cdots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,; \quad 9)$$

nur stellen jetzt $u_1=0$, $u_2=0$, $\dots u_{\mu+1}=0$ Gruppen $U_1, U_2, \dots U_{\mu+1}$ dar, welche demselben Netze $(\mu-\alpha)$ter Stufe angehören.

Es ist umgekehrt klar, dafs die Gleichung 9) oder 6), wie auch immer die Formen $u_1, u_2, \dots u_{\mu+1}$ $m$ten Grades beschaffen sind, entweder eine allgemeine Involution μten Ranges $U_1 U_2 U_3 \dots U_{\mu+2} \dots$ bestimmt, die zu

einem einförmigen Gebilde $a_1 a_2 a_3 \dots a_{\mu+2} \dots$ projectivisch ist, oder eine entartete Involution μten Ranges, deren Zeiger zu jenem einförmigen Gebilde projectivisch ist.

Interessant ist noch der Fall, wo das Netz $V_1 V_2 \dots V_\beta$ mit der Zeigerinvolution β Gruppen, sagen wir die Gruppen $U_1', U_2', \dots U_\beta'$ gemeinsam hat. Alsdann sind in 8) $u_1', u_2', \dots u_\beta'$ homogene lineare Functionen der $v_1, v_2, \dots v_\alpha$. Bei der Vornahme der Projection verschwinden daher $u_1, u_2, \dots u_\beta$ aus der Gleichung der entarteten Involution. Dieselbe nimmt die Form an:

10)
$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\beta) \times$$
$$(x-a_{\beta+1})\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_{\beta+1}}{x-a_{\beta+1}}+\frac{u_{\beta+2}}{x-a_{\beta+2}}+\dots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,.$$

Der hinter $\times$ stehende Factor stellt eine allgemeine oder entartete Involution $(\mu-\beta)$ ten Ranges $U_{\beta+1} U_{\beta+2} \dots U_{\mu+2} \dots$ dar, welche zu $a_{\beta+1} a_{\beta+2} \dots a_{\mu+2} \dots$ projectivisch ist. Während aber zu allen anderen Werthen von x ganz bestimmte Glieder des Gebildes 10) gehören, so werden die $a_1, a_2, \dots a_\beta$ entsprechenden Gruppen unbestimmt, da die Gleichung durch die bloſse Annahme $x = a_1$ z. B. zum Verschwinden gebracht werden kann.

§ 190. Für die Lösung des Eliminationsproblems ist der Begriff der Schaar projectivischer Involutionen sehr wesentlich (§§ 108 ff.).

Sind zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges gegeben, nämlich

$$\text{1a)}\quad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1}{x-a_1}+\frac{u_2}{x-a_2}+\dots\frac{u_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,,$$

$$\text{1b)}\quad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{v_1}{x-a_1}+\frac{v_2}{x-a_2}+\dots\frac{v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,,$$

so erhalten wir aus beiden eine ganze Schaar von der Gleichung:

$$\text{2)}\quad (x-a_1)\dots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_1-\lambda v_1}{x-a_1}+\frac{u_2-\lambda v_2}{x-a_2}+\dots\frac{u_{\mu+1}-\lambda v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\}=0\,.$$

Für jeden Werth von λ stellt 2) eine Involution dar, die zu den beiden gegebenen 1a) und 1b) projectivisch ist. Betrachten wir eine Reihe homologer Gruppen, lassen wir λ bei festem x veränderlich, so erhalten wir eine bestimmte Leitinvolution; alle diese Leitinvolutionen sind zu einander und

zur Schaar projectivisch. Enthalten irgend zwei homologe Gruppen $U_\varkappa$, $V_\varkappa$ ein gemeinsames Element, so kommt dasselbe in allen Gruppen von $u_\varkappa - \lambda v_\varkappa = 0$ vor, also in allen zu den gegebenen $U_\varkappa$ und $V_\varkappa$ homologen Gruppen. Irgend zwei Glieder der Schaar ergeben daher dieselbe Coincidenzgruppe. Haben die beiden gegebenen Involutionen irgend eine Gruppe, sagen wir U_1, entsprechend gemein, so ist identisch

$$u_1 - \lambda_0 v_1 = 0\,, \tag{3}$$

da sich u_1 und v_1 nur um eine multiplicative Constante unterscheiden können; wir erhalten dann für die zu λ_0 gehörende Involution μten Ranges die Gleichung

$$(x-a_1) \times (x-a_2)\ldots(x-a_{\mu+1})\left\{\frac{u_2-\lambda_0 v_2}{x-a_2} + \ldots \frac{u_{\mu+1}-\lambda_0 v_{\mu+1}}{x-a_{\mu+1}}\right\} = 0\,, \tag{4}$$

das heifst, ihr wesentlicher Bestandtheil ist eine projectivische Involution $(\mu-1)$ten Ranges. Dazu kommt eine völlig unbestimmte Gruppe, die dem Werthe a_1 von x entspricht. Die Involution $(\mu-1)$ten Ranges enthält alle Coincidenzstellen von 1a) und 1b) mit Ausnahme derer, die durch die Angaben

$$x = a_1\,,\; u_1 = 0 \tag{5}$$

bestimmt werden.

Es mögen nunmehr zwei projectivische Involutionen $m$ter Ordnung, $(\mu-\alpha)$ten und $(\mu-\beta)$ten Ranges gegeben sein, deren Gleichungen wir der Kürze halber mit $f(y,x)=0$ und $g(y,x)=0$ bezeichnen wollen. Alsdann ist

$$(x-a_{\beta+1})\ldots(x-a_{\beta+\alpha})f(y,x) - \lambda(x-a_1)\ldots(x-a_\beta)g(y,x) = 0 \tag{6}$$

die Gleichung einer Schaar projectivischer Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges. Die gegebenen Involutionen sind wesentliche Bestandtheile zweier Individuen derselben, mit der ersten Involution haben alle Glieder der Schaar die Gruppen gemeinsam, welche zu $a_1, a_2, \ldots a_\beta$ gehören, mit der zweiten Involution dagegen die Gruppen, die zu $a_{\beta+1}$, $a_{\beta+2}, \ldots a_{\beta+\alpha}$ gehören.

Verbindet man mit allen Gliedern der Schaar 2) eine projectivische Involution $Z_1 Z_2 Z_3 \ldots$ $n$ter Ordnung, ersten Ranges, deren Gleichung man auf die μ Formen bringen kann

$$z_{\mu+1}(x-a_\lambda) - z_\lambda(x-a_{\mu+1}) = 0\,, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \mu) \tag{7}$$

so erhält man durch Elimination von x die Gleichung für y:

$$8)\qquad z_1 z_2 \ldots z_\mu z_{\mu+1}\left\{\frac{u_1-\lambda v_1}{z_1}+\frac{u_2-\lambda v_2}{z_2}+\cdots\frac{u_{\mu+1}-\lambda v_{\mu+1}}{z_{\mu+1}}\right\}=0\,.$$

Also hat die Involution 7) ersten Ranges mit den Gliedern der Schaar 2) die Gruppen einer Involution $(m+n\mu)$ter Ordnung gemeinsam. Soll die Gleichung der Schaar 2) speciell in die Form 6) übergehen, so haben wir in ihr $u_{\beta+1}, \mu_{\beta+2}, \ldots u_{\beta+\alpha}$ und $v_1, v_2, \ldots v_\beta$ zu unterdrücken; alsdann löst sich für $\lambda=0$ von 8) der Factor

$$9)\qquad z_{\beta+1} z_{\beta+2} \ldots z_{\beta+\alpha}=0$$

ab, für $\lambda=\infty$ löst sich der Factor

$$10)\qquad z_1 z_2 \ldots z_\beta=0$$

von derselben ab. Stellen also $u=0$ und $v=0$ die Coincidenzgruppen der Involutionen $f(y,x)=0$ und $g(y,x)=0$ mit der Involution 7) ersten Ranges dar, so hat sie mit den anderen Gliedern von 6) Gruppen der Involution

$$11)\qquad z_{\beta+1} z_{\beta+2} \ldots z_{\beta+\alpha} u-\lambda z_1 z_2 \ldots z_\alpha v=0$$

gemeinsam.

Es seien nun die beiden projectivischen Schaaren

$$12\text{a})\qquad \phi\,(y,x)-\lambda\psi(y,x)=0\,,$$

$$12\text{b})\qquad \phi_1(y,x)-\lambda\psi_1(y,x)=0\,,$$

bestehend aus projectivischen Involutionen $m$ter Ordnung und μten Ranges, gegeben; alsdann stellt die Gleichung

$$13)\qquad \phi(y,x)-\lambda\psi(y,x)+\varrho\{\phi_1(y,x)-\lambda\psi_1(y,x)\}=0$$

für jedes Werthepaar λ, ϱ eine bestimmte Involution $m$ter Ordnung und μten Ranges dar. Hält man nur ϱ fest, so erhält man irgend eine zu den beiden gegebenen projectivische Schaar. Giebt man dem λ specielle Werthe, so erhält man eine zweite Reihe unter sich projectivischer Schaaren aus projectivischen Involutionen. Jede einzelne dieser neuen Schaaren verbindet homologe Involutionen in der ersteren Reihe von Schaaren. Haben die beiden Schaaren 12a) und 12b) eine Involution entsprechend gemeinsam, besteht etwa die Identität

$$14\text{a})\qquad \phi(y,x)-\varkappa_0\phi_1(y,x)\equiv 0\,,$$

so gehört die Involution

$$\psi(y,x) - \varkappa_0 \psi_1(y,x) = 0 \qquad 14\text{b})$$

zu einer Schaar mit je zwei entsprechenden Involutionen der gegebenen Schaaren. Sind

$$\mathfrak{f}(y,x) = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}(y,x) = 0 \qquad 15)$$

die Gleichungen zweier projectivischer Involutionen $m$ter und $n$ter Ordnung, μten und νten Ranges, so ist

$$\mathfrak{f}(y,x) \cdot \mathfrak{g}(y,x) = 0 \qquad 16)$$

die Gleichung einer speciellen Involution $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$-ten Ranges, die zu den beiden gegebenen projectivisch ist. Irgend eine Gruppe derselben setzt sich aus den beiden homologen der ersteren Involutionen zusammen.

Besteht von den beiden projectivischen Schaaren

$$f_1(y,x) - \lambda f_2(y,x) = 0, \qquad 17\text{a})$$

$$g_1(y,x) - \lambda g_2(y,x) = 0 \qquad 17\text{b})$$

die eine aus Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges, die zweite aus projectivischen Involutionen $n$ter Ordnung, νten Ranges, so besteht jede Gruppe der Involution

$$f_1(y,x)g_2(y,x) - f_2(y,x)g_1(y,x) = 0 \qquad 18)$$

$(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges aus den Coincidenzelementen zweier homologer Leitinvolutionen der Schaaren 17a) und 17b).

In der Hauptsache beruhen die geometrischen Beweise des soeben Dargelegten auf Folgendem. Wenn die beiden Involutionen 1a) und 1b) allgemein sind, so sind sie homologe Bestandtheile collinearer Netze

$$l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots l_{\mu+1} u_{\mu+1} = 0, \qquad 19\text{a})$$

$$l_1 v_1 + l_2 v_2 + \cdots l_{\mu+1} v_{\mu+1} = 0. \qquad 19\text{b})$$

Um homologe Gruppen der Involutionen zu erhalten, mufs man

$$l_i = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{\mu+1}) \qquad 20)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots \mu+1)$$

setzen. Die Schaar, welche die beiden Involutionen alsdann bestimmen, wird so als ein Bestandtheil derjenigen erkannt, welche durch 19a) und 19b) bedingt ist. Indem man von irgend einem Netze N aus eine

solche Involutionsschaar projicirt, erhält man andere, die durch entartete Involutionen bestimmt werden. Indem man das projicirende Netz durch α Gruppen der einen und durch β Gruppen der zweiten eigentlichen Involution legt, erhält man eine Schaar mit der Gleichung 6).

Dafs die Schaaren auf diese Art eindeutig bestimmt werden, folgt aus der in 8) ausgesprochenen Eigenschaft. Diese wieder läfst sich geometrisch erweisen, nachdem das Gebilde 13) als vorhanden nachgewiesen ist. Wenn man annimmt, dafs die Schaaren 12a) und 12b) aus allgemeinsten Involutionen μten Ranges bestehen, so kann man auf eine Art die Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, durch die sie sich erstrecken, collinear so beziehen, dafs je zwei homologe Involutionen einander entsprechen (§ 110). Von der Schaar collinearer Netze $(2\mu+1)$ter Stufe, die durch diese beiden Träger bestimmt wird, ist das Gebilde mit der Gleichung 13) ein Bestandtheil. Durch Anwendung geeigneter Projectionen im Gebiete des Gesammtnetzes kann man zuerst auf den Specialfall (14a und 14b) kommen, wo die Schaaren 12a) und 12b) eine Involution entsprechend gemeinsam haben, und zweitens auf den Fall, wo die eine Schaar im Wesentlichen aus Involutionen niederer Ordnung sich zusammensetzt. Die richtige Anwendung dieses letzteren Falles ermöglicht es uns, den in 8) ausgesprochenen Satz mittels eines Schlusses von $m+n, \mu-1$ auf m, μ zu erhärten (§ 111).

Um zu zeigen, dafs 16) eine zu den Involutionen 15) projectivische Involution $(m+n)$ter Ordnung, $(\mu+\nu)$ten Ranges ist, stellen wir (§ 112) $\mathfrak{g}(y,x)$ in der Form dar:

$$21)\qquad \mathfrak{g}(y,x) \equiv (x-a_1)\mathfrak{g}'(y,x) - \lambda_0(x-a_2)\mathfrak{g}''(y,x),$$

wo $\mathfrak{g}'(y,x)$ und $\mathfrak{g}''(y,x)$ x nur bis zur $(\nu-1)$ten Potenz enthalten. Es wird vorausgesetzt, dafs

$$21\text{a})\quad \mathfrak{f}(y,x)\cdot\mathfrak{g}'(y,x) = 0 \quad \text{und} \quad 21\text{b})\ \mathfrak{f}(y,x)\cdot\mathfrak{g}''(y,x) = 0$$

Involutionen $(m+n)$ter Ordnung und $(\mu+\nu-1)$ten Ranges darstellen. Es wird alsdann, wesentlich mit Hülfe von 8), gezeigt, dafs die zu λ_0 gehörende Involution der Schaar

$$22)\qquad (x-a_1)\mathfrak{f}(y,x)\mathfrak{g}'(y,x) - \lambda(x-a_2)\mathfrak{f}(y,x)\mathfrak{g}''(y,x) = 0,$$

welche 21a) und 21b) bestimmen, in die beiden Involutionen 15) zerfällt.

Die in 17a), 17b) und 18) ausgesprochene Wahrheit folgte geometrisch aus der Betrachtung der beiden Gleichungen

$$g_1(y\,,x)f_1(y\,,x) - \lambda g_1(y\,,x)f_2(y\,,x) = 0\,, \qquad 23\text{a})$$

$$f_1(y\,,x)g_1(y\,,x) - \lambda f_1(y\,,x)g_2(y\,,x) = 0\,. \qquad 23\text{b})$$

Da die Schaaren 23a) und 23b) eine Involution mit einander entsprechend gemeinsam haben, so liegt eine andere Involution mit je zwei homologen Gliedern in je einer Schaar. Das kann aber nur

$$f(y\,,x)g_1(y\,,x) - f_1(y\,,x)g(y\,,x) = 0 \qquad 24)$$

sein, deren Gruppen aus den Coincidenzelementen je zweier homologer Leitinvolutionen bestehen.

§§ 191 und 192. Das Problem der Elimination.

§ 191. Von den beiden ganzen Functionen

$$f(y\,,x) \quad , \quad g(y\,,x) \qquad 1)$$

sei die eine vom $m$ten, die andere vom $n$ten Grade in y; x mögen beide bis zur μten Potenz enthalten. Behufs Aufsuchung der gemeinsamen Nullstellen betrachte man die Function

$$g(y,x_0)f(y,x) - \lambda f(y,x_0)g(y,x) \equiv h_\lambda(y,x)\,. \qquad 2)$$

Für alle Stellen, für welche die Functionen 1) verschwinden, verschwindet nothwendig auch $h_\lambda(y,x)$. Setzen wir aber umgekehrt

$$h_\lambda(y,x) = 0 \quad \text{und} \quad g(y,x) = 0\,, \qquad 3)$$

so folgt aus 2) entweder

$$4\text{a}) \; f(y,x) = 0 \quad \text{oder} \quad g(y,x_0) = 0\,. \qquad 4\text{b})$$

Aufser für die gesuchten Stellen verschwinden also $h_\lambda(y,x)$ und $g(y,x)$ gleichzeitig, wenn auch $g(y\,,x_0)$ verschwindet. Letzteres findet im Allgemeinen für n verschiedene Werthe $y_1, y_2, \ldots y_n$ statt. Jede der Gleichungen

$$g(y_\lambda,x) = 0 \qquad (\lambda = 1,2,\ldots n) \qquad 5)$$

liefert uns aufser x_0 noch $\mu - 1$ andere Werthe von x. Das Gleichungs-

paar 3) giebt uns also neben den gesuchten noch $n\mu$ andere durch 5) bestimmte Stellen. Nun betrachten wir die zu dem Werthe $\lambda = 1$ gehörende Function $h_1(y,x)$. Dieselbe nimmt die Form an:

$$6) \qquad (x-x_0)h_1'(y\,,x) \equiv h_1(y\,,x)\,.$$

$h_1'(y\,,x)$ ist vom $(m+n)$ten Grade in y und vom $(\mu-1)$ten Grade in x; offenbar verschwindet $h_1'(y\,,x)$ für alle gesuchten Coincidenzstellen, und von den der Aufgabe fremden Coincidenzstellen zwischen $g(y\,,x) = 0$ und $h_\lambda(y\,,x) = 0$ gehören nur die n Stellen $y = y_\lambda\,, x = x_0$ nicht $h_1'(y,x) = 0$ an. Bezeichnet man mit $\binom{m\,,\,\mu}{n\,,\,\nu}$ die Anzahl der Stellen, für welche zwei Functionen $m$ten und $n$ten Grades in $y\,, \mu$ten und νten Grades in x gleichzeitig verschwinden, so ist

$$7) \qquad \binom{m\,,\,\mu}{n\,,\,\mu} = \binom{m+n\,,\,\mu-1}{n\quad,\quad\mu} - n(\mu-1)\,.$$

Enthält von den ganzen Functionen

$$8) \qquad \phi(x\,,y) \quad , \quad \psi(y\,,x)$$

die eine y bis zur $m$ten und x bis zur μten Potenz, die zweite dagegen y bis zur $n$ten und x bis zur νten Potenz $(\nu < \mu)$, so benutzt man eine dritte ganze Function $\psi_1(y,x)$, die y bis zur $r$ten, x aber bis zur $(\mu-\nu)$-ten Potenz enthält. Setzt man

$$9) \quad \psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x) - \lambda\phi(y,x_0)\psi_1(y,x)\psi(y,x) \equiv \chi_\lambda(y\,,x)\,,$$

so finden die beiden Gleichungen

$$10) \qquad \chi_\lambda(y,x) = 0 \quad , \quad \psi(y,x) = 0$$

erstens dann statt, wenn die beiden Functionen 8) verschwinden, und zweitens, wenn gleichzeitig

$$11) \qquad \psi(y\,,x) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_1(y\,,x_0)\psi(y\,,x_0) = 0$$

ist. Aus 11) ergeben sich $(n+r)\nu$ Werthepaare, die also von den gemeinsamen Nullstellen der beiden Functionen $\chi_\lambda(y,x)$ und $\psi(y,x)$ abzulösen sind. Für $\lambda = 1$ erhält man

$$12) \qquad \chi_1(y\,,x) \equiv (x-x_0)\chi_1'(y\,,x)\,.$$

$\chi_1'(y, x)$ verschwindet für alle gesuchten Werthepaare; von den aufserwesentlichen gemeinsamen Nullstellen der $\chi_\lambda(y, x)$ enthält sie nur diejenigen nicht, welche durch die Annahme

$$\psi(y, x_0) = 0$$

sich bestimmen. Nun enthält $\chi_1'(y, x)$ y bis zur $(m+n+r)$ten, x bis zur $(\mu-1)$ten Potenz. Daher besteht die Recursionsformel:

$$\binom{m, \mu}{n, \nu} = \binom{m+n+r, \mu-1}{n \quad, \quad \nu} - (n+r)\nu + n. \qquad 13)$$

Einen speciellen Fall $(r = 0, \nu = \mu)$ dieser Formel erblicken wir in 7). Der Beziehung 13) genügt die Annahme

$$\binom{m, \mu}{n, \nu} = m\nu + n\mu. \qquad 14)$$

Wirklich besteht die Identität:

$$m\nu + n\mu \equiv (m+n+r)\nu + n(\mu-1) - (n+r)\nu + n.$$

Der erste Fall der Formel 14) $(\mu = 1, \nu = 1)$ trifft aufserdem nach unseren früheren Entwickelungen zu.

Von der allgemeinen Zahl gemeinsamer Stellen können in besonderen Fällen einzelne zusammenfallen, andererseits können aber auch die Functionen $\phi(y,x)$ und $\psi(y,x)$ für unendlich viele Stellen gleichzeitig verschwinden. Für alle diese Stellen verschwindet auch $\chi_1'(y,x)$. Setzt man voraus, dafs alsdann $\chi_1'(y,x)$ und $\psi(y, x)$ eine ganze Function von y und x als gemeinsamen Factor enthalten müssen, so folgt dieselbe Thatsache für $\psi(y,x)$ und $\phi(y,x)$. Dieselbe ist wirklich richtig, weil sie für den speciellen Fall feststeht, dafs $\psi(y,x)$ und $\phi(y,x)$ lineare Functionen von x sind. Hieraus folgt insbesondere, dafs es, wofern $g(y, x)$ nicht in Theile zerfällt, nur eine endliche Zahl von Gruppen $g(y, x_0) = 0$ mit mehrfachen Elementen giebt, denn die betreffenden Elemente gehören zu den gemeinsamen Nullstellen der beiden Functionen

$$g(y, x) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}\{g(y, x)\}.$$

Was für x gilt, ist ebenso für y richtig.

Der geometrische Ausdruck für die soeben behandelte Aufgabe ist der, die Coincidenzstellen zwischen zwei Involutionen $m$ter Ordnung, μten Ranges und $n$ter Ordnung, νten Ranges aufzusuchen, welche entweder selbst projectivisch sind, oder zu projectischen Zeigern gehören.

$$\psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x)=0 \text{ und } \phi(y,x_0)\psi_1(y,x)\psi(y,x)=0$$

sind die Gleichungen zweier projectivischer Involutionen, die eine Gruppe, welche zu x_0 gehört, entsprechend gemeinsam haben. $\chi_\lambda(y,x)=0$ stellt die Involutionen der Schaar dar, welche durch die beiden gegebenen bestimmt wird. In derselben kommt eine Involution vor, die sich im Wesentlichen auf den $(\mu-1)$ten Rang reducirt. Das Auftreten des Factors $(x-x_0)$ auf der rechten Seite von 12) manifestirte sich geometrisch dadurch, dafs sich in ihr keine bestimmte Gruppe als x_0 zugehörig erwies. Da es als eine Grundeigenschaft der Involution μten Ranges erkannt war, mit jedem Netze $(\mu-1)$ter Stufe μ Gruppen gemeinsam zu haben (§ 101), so kam speciell auch jedes Element des Trägers im Allgemeinen in μ verschiedenen Gruppen der Involution vor; wir waren daher im Stande, die oben erläuterte Abzählung auch mit Hülfe geometrischer Methoden (§ 116) zubegründen.

§ 192. Ein besonders wichtiger Fall tritt dann ein, wenn die Function $\phi(y,x)$ und $\psi(y,x)$ des vorigen § nur von der Dimension m und n sind, wobei aber die $m$ten und $n$ten Potenzen von y, die μten und νten Potenzen von x auftreten. Ist $\psi_1(y,x)$ eine Function von der Dimension r und dem Grade $\mu-\nu$ in x, so betrachten wir, wie im § 191, die Function

$$1)\quad (x-x_0)\chi_1'(y,x)\equiv\psi(y,x_0)\psi_1(y,x_0)\phi(y,x)-\phi(y,x_0)\psi(y,x)\psi_1(y,x).$$

Hier ist $\chi_1'(y,x)$ wieder eine Function vom Grade $\mu-1$ in x. Da wir auf der rechten Seite eine Function von der Dimension $m+n+r$ vor uns haben, so ist $\chi_1'(y,x)$ nur von der Dimension $m+n+r-1$, enthält also auch y nur bis zur Potenz $m+n+r-1$. Von den gemeinsamen Nullstellen der Functionen $\phi(y,x)$ und $\chi_1'(y,x)$ sind genau dieselben auszuschliefsen, wie im vorhergegangenen allgemeinen Falle. Man bezeichne nun mit $\begin{Bmatrix} m\,,\mu \\ n\,,\nu \end{Bmatrix}$ die Anzahl der Nullstellen mit endlichen y, welche eine Function von der Dimension m und dem Grade μ in x mit einer Function von der Dimension n und dem Grade ν in x gemeinsam hat. Alsdann ist offenbar

$$2)\qquad \begin{Bmatrix} m\,,\mu \\ n\,,\nu \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} m+n+r-1\,, & \mu-1 \\ n\,, & \nu \end{Bmatrix}-(m+n+r)\nu+n\,.$$

Dieser Forderung genügt die Function

$$\begin{Bmatrix} m, \mu \\ n, \nu \end{Bmatrix} = m\nu + n\mu - \mu\nu. \qquad 3)$$

Wirklich ist

$$m\nu + n\mu - \mu\nu = (m+n+r-1)\nu + n(\mu-1) - (\mu-1)\nu - (n+r)\nu + n.$$

Überdies ist der erste Fall des Satzes ($\mu = 1$, $\nu = 1$) ganz offenbar richtig. In zwei derartigen Gleichungen

$$u_1 + xu_2 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 + xv_2 = 0 \qquad 4)$$

sind u_2 und v_2 zwei Formen $(m-1)$ten, bezüglich $(n-1)$ten Grades in y, u_1 ist vom Grade m und v_1 vom Grade n. Aus diesem Grunde ist

$$u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0,$$

das Resultat der Elimination von x aus den Gleichungen 4), nur eine Gleichung $(m+n-1)$ten Grades.

Nicht ohne Schwierigkeit gelang es uns, für die Eigenschaft einer Function, von gegebener Dimension zu sein, einen geometrischen Ausdruck zu finden. Man bringe eine solche Involution mit der Gleichung

$$\phi(y, x) = 0 \qquad 5)$$

in Verbindung mit allen Involutionen erster Ordnung und ersten Ranges

$$ay + bx + cxy + d = 0. \qquad 6)$$

Man hat dann behufs Elimination in $\phi(y, x)$ überall für x eine lineare gebrochene Function von y einzusetzen. Da x^{μ} die höchste in $\phi(y, x)$ auftretende Potenz von x ist, so resultirt hieraus eine Gleichung $(m+\mu)$-ten Grades in y. Verschwindet hingegen c, so wird x eine lineare ganze Function von y, und wir erhalten bei ihrer Substitution in $\phi(y, x)$ nur eine Form $m$ten Grades. Wenn also in der Involution erster Ordnung und ersten Ranges 6) der Werth $y = \infty$ dem Werthe $x = \infty$ entspricht, so enthält ihre Coincidenzgruppe mit der Involution 5) μfach das Element $y = \infty$. Diese Eigenschaft diente uns zur Definition der Functionen von gegebener Dimension. Wir gaben dem Problem eine solche besondere Form, dafs es sich um Schnittpunkte gegebener Curvengebilde handelte. Wir betrachteten zu diesem Zwecke (§ 140) y als das Theilverhältnifs,

welches ein von Q ausgehender Strahl q an QR und QP bestimmt, x dagegen als das zu PR und PQ gehörende Theilverhältnifs eines von P ausgehenden Strahles p. Alsdann stellt 5) eine Strahleninvolution dar, von der jede Gruppe mit dem zugehörigen Strahle p sich in m Punkten eines Punktgebildes schneidet. Aus 6) erhält man Strahlen, die sich im Allgemeinen projectivisch bewegen, jedoch perspectivisch, wenn c verschwindet, und 6) eine Gerade darstellt. Da dann μ der Coincidenzstrahlen zwischen den Involutionen 5) und 6) mit $QP(y=\infty)$ zusammenfallen, so besteht unser Curvengebilde aus dem μfach zählenden Strahle QP und aus einem anderen Gebilde $m$ter Ordnung. Den ersteren Bestandtheil betrachteten wir als unwesentlich; wir konnten zeigen, dafs der zweite Theil mit irgend einem μfach zählenden Strahle QP zusammen durch ein Strahlbüschel mit dem Centrum P und eine projectivische Involution $m$ter Ordnung erzeugt werden konnte.

Mit den drei Involutionen

7 a) $$\psi_1(y,x_0)\psi(y,x_0)\phi(y,x)=0,$$

7 b) $$\phi(y,x_0)\psi(y,x)\psi_1(y,x)=0,$$

7 c) $$(x-x_0)\chi_1'(y,x)=0$$

erzeugt das Strahlbüschel mit dem Centrum P im Wesentlichen drei Curven $(m+n+r)$ter Ordnung. Sind U, V, W die drei Gruppen, welche die drei Involutionen mit einem projectivischen Strahlbüschel gemeinsam haben, und ist q_0 der zugehörige Strahl zu demjenigen p_0 mit dem Theilverhältnisse x_0, so sind U, V und Wq_0 drei Gruppen einer Involution $(m+n+r+\mu)$ter Ordnung. Irgend eine Gerade wird daher auch von den drei Curven in einer Involution $(m+n+r)$ter Ordnung geschnitten. Die dritte zerfällt also in den Strahl p_0 und in eine Curve $(m+n+r-1)$-ter Ordnung; die Involution $\chi_1'(y,x)=0$ ist mithin von der Ordnung $m+n+r-1$ und dem Range $\mu-1$. Nachdem dies einmal bewiesen war, konnte die oben bereits beschriebene Abzählungsmethode auch auf geometrischem Wege begründet werden.

Das vierte Capitel der geometrischen Entwickelungen. §§ 193—196.

§ 193. In dem letzten Capitel unserer Arbeit wenden wir nun die bisherigen Resultate auf Curven von gegebener Ordnung an.

Im zweiten Abschnitt stellen wir eine Reihe von Definitionen und Lehrsätzen auf, die sich, wie leicht zu zeigen ist, bei den algebraischen ebenen Curven $n$ter Ordnung vereinigt finden. Ist wieder in einer Ebene ein Dreieck PQR gegeben, und bestimmen wir irgend einen Punkt T durch das Theilverhältnifs x von TP hinsichtlich RP und QP und das zweite Theilverhältnifs y, das TQ an RQ und PQ bestimmt, so besteht für jeden Punkt einer analytisch definirten Curve $n$ter Ordnung eine Gleichung

$$f_n(y, x) = 0 \qquad 1)$$

$n$ter Dimension. Die Curve $n$ter Ordnung kann daher durch ein Strahlbüschel mit beliebigem Centrum P und durch eine projectivische Involution $n$ter Ordnung dargestellt werden (§ 131).

Sind

$$\phi_m(y, x) = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 2)$$

die Gleichungen zweier Curven $m$ter und $(n-m)$ter Ordnung, so ist

$$\phi_m(y, x) \cdot \phi_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 3)$$

eine Gleichung $n$ter Dimension; die Gesammtheit beider Curven kann als eine Curve $n$ter Ordnung betrachtet werden (§ 132).

Die beiden Curven 1) und 2a) haben stets Schnittpunkte mit einander gemeinsam, im Allgemeinen und höchstens aber mn verschiedene (§ 133).

Die Gleichung

$$\psi_n^{(1)}(y, x) - \lambda\psi_n^{(2)}(y, x) = 0 \qquad 4)$$

stellt für jeden Werth von λ eine bestimmte Curve $n$ter Ordnung dar. Alle diese Curven haben dieselben Schnittpunkte mit einander gemein und gehören zu einem Büschel. Offenbar schneidet dasselbe auf jeder Geraden

$$ax + by + d = 0 \qquad 5)$$

eine Involution $n$ter Ordnung aus. Die Gleichung der Strahleninvolution, welche dieselbe von Q aus projicirt, erhält man durch Elimination von x aus 4) und 5). Eliminirt man y zwischen 4) und der Gleichung

$$a_1x + b_1y + c_1xy + d_1 = 0 \qquad 6)$$

eines P und Q enthaltenden Kegelschnittes, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$6a)\qquad g(y) + \lambda g_1(y) = 0\,,$$

wo $g(y)$ und $g_1(y)$ ganze Functionen $2n$ten Grades sind. Ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung schneidet also, da P und Q willkürliche Punkte der Ebene sind, Geraden und Kegelschnitte in zu einander projectivischen Involutionen $n$ter und $2n$ter Ordnung (§ 135).

Das Curvennetz μter Stufe hat die Gleichung:

$$7)\qquad \lambda_1 \phi_n^{(1)}(y\,,x) + \lambda_2 \phi_n^{(2)}(y\,,x) + \cdots \lambda_{\mu+1} \phi_n^{(\mu+1)}(y\,,x) = 0\,.$$

Es gelten von ihm, wie von jedem Netze, die allgemeinen Eigenschaften, welche wir bei dem Involutionsnetz hervorhoben (§ 137).

Die Gleichung

$$8)\qquad \mathfrak{f}_n^{(1)}(y\,,x) + \lambda \mathfrak{f}_n^{(2)}(y\,,x) + \mu \{\mathfrak{g}_n^{(1)}(y\,,x) + \lambda \mathfrak{g}_n^{(2)}(y\,,x)\} = 0$$

stellt eine Schaar projectivischer Büschel dar. Für specielle Werthe von μ erhalten wir einzelne projectivische Büschel derselben. Wenn wir andererseits λ specielle Werthe ertheilen, so resultiren projectivische Büschel, die aus homologen Curven der früheren Büschel sich zusammensetzen. Der Schnitt der Curvenschaar mit irgend einer Geraden ist eine Involutionsschaar (§ 138).

Zwei projectivische Büschel

$$9a)\qquad \mathfrak{f}_m^{(1)}(y\,,x) - \lambda \mathfrak{f}_m^{(2)}(y\,,x) = 0\,,$$

$$9b)\qquad \mathfrak{g}_{n-m}^{(1)}(y\,,x) - \lambda \mathfrak{g}_{n-m}^{(2)}(y\,,x) = 0$$

erzeugen eine Curve $n$ter Ordnung mit der Gleichung

$$10)\qquad \mathfrak{f}_m^{(1)}(y\,,x)\,\mathfrak{g}_{n-m}^{(2)}(y\,,x) - \mathfrak{f}_m^{(2)}(y\,,x)\,\mathfrak{g}_{n-m}^{(1)}(y\,,x) = 0\,,$$

auf der sich homologe Curven der beiden Büschel durchschneiden. Andererseits kann jede Curve $n$ter Ordnung $f_n(y\,,x) = 0$ als Erzeugniſs projectivischer Büschel dargestellt werden. Sind nämlich

$$11)\qquad f_1^{(1)}(y\,,x) = 0 \quad , \quad f_1^{(2)}(y\,,x) = 0$$

die Gleichungen von zwei Geraden, die sich auf der gegebenen Curve schneiden, und stellt

$$11b)\qquad f_{n-1}^{(1)}(y\,,x) = 0$$

eine Curve dar, welche die übrigen Schnittpunkte der ersteren Geraden mit der gegebenen Curve $f_n(y, x) = 0$ enthält, so hat man

$$f_n(y, x) \equiv f_1^{(1)}(y, x) f_{n-1}^{(2)}(y, x) - f_1^{(2)}(y, x) f_{n-1}^{(1)}(y, x), \qquad 12)$$

und die Gleichung der gegebenen Curve entsteht bei der Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$f_1^{(1)}(y,x) - \lambda f_1^{(2)}(y,x) = 0, \qquad 13\,a)$$

$$f_{n-1}^{(1)}(y,x) - \lambda f_{n-1}^{(2)}(y,x) = 0 \qquad 13\,b)$$

zweier projectivischer Büschel (§ 130).

Es sei

$$\phi_m^{(1)}(y, x) - \lambda \phi_m^{(2)}(y, x) = 0 \qquad 14)$$

ein Büschel von Curven $m$ter Ordnung, das zu den einzelnen Büscheln einer Schaar

$$\phi_{n-m}^{(1)}(y, x) - \lambda \phi_{n-m}^{(2)}(y, x) + \varrho \{(\psi_{n-m}^{(1)}(y, x) - \lambda \psi_{n-m}^{(2)}(y, x)\} = 0 \quad 15)$$

projectivisch ist. Die Erzeugnisse des ersteren Büschels mit den letzteren bilden ein drittes Büschel

$$\phi_m^{(1)}(y, x) \phi_{n-m}^{(2)}(y, x) - \phi_m^{(2)}(y, x) \phi_{n-m}^{(1)}(y, x) \qquad 16)$$
$$+ \varrho \{\phi_m^{(1)}(y, x) \psi_{n-m}^{(2)}(y, x) - \phi_m^{(2)}(y, x) \psi_{n-m}^{(1)}(y, x)\} = 0,$$

welches zu den Leitbüscheln der Schaar 15) projectivisch ist. Da zwei gegebene Curven $n$ter Ordnung wenigstens einen Punkt gemeinsam haben, so kann man stets ein Strahlbüschel finden, das mit den Curvenbüscheln einer Schaar die Curven des gegebenen Büschels erzeugt ($m = 1$) (§ 135).

Hiermit ist bewiesen, dafs die Definitionen und Lehrsätze des zweiten Abschnittes unseres Capitels die in der analytischen Geometrie bekannten algebraischen Curven $n$ter Ordnung betreffen.

§§ 194—195. Wir wollen in den beiden folgenden §§ einige der Schlüsse von n auf $n+1$ erläutern, die den Inhalt des dritten Abschnittes des vierten Capitels bilden.

§ 194. Es sei eine Curve $(n+1)$ter Ordnung definirt als Erzeugnifs zweier projectivischer Büschel.

$$f_{m+1}(y, x) - \varrho g_{m+1}(y, x) = 0, \qquad 1\,a)$$

$$f_{n-m}(y, x) - \varrho g_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 1\,b)$$

aus Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung. An die Stelle dieser Gleichungen kann man die drei folgenden treten lassen:

2a) $$\phi_1^{(1)}(y, x) - \lambda\phi_1^{(2)}(y, x) = 0,$$

2b) $$f_m^{(1)}(y, x) - \varrho g_m^{(1)}(y, x) - \lambda\{f_m^{(2)}(y, x) - \varrho g_m^{(2)}(y, x)\} = 0,$$

2c) $$f_{n-m}(y, x) - \varrho g_{n-m}(y, x) = 0.$$

Hierbei sollen die beiden Geraden $\phi_1^{(1)}(y, x) = 0$ und $\phi_1^{(2)}(y, x) = 0$ sich in einem (sicher vorhandenen) Grundpunkt des Büschels 1a) treffen. Die Formen $g_m^{(1)}(y, x), g_m^{(2)}(y, x), f_m^{(1)}(y, x), f_m^{(2)}(y, x)$ müssen und können so bestimmt werden, dafs die Identitäten bestehen:

3a) $$f_{m+1}(y, x) \equiv \phi_1^{(1)}(y, x)f_m^{(2)}(y, x) - \phi_1^{(2)}(y, x)f_m^{(1)}(y, x),$$

3b) $$g_{m+1}(y, x) \equiv \phi_1^{(1)}(y, x)g_m^{(2)}(y, x) - \phi_1^{(2)}(y, x)g_m^{(1)}(y, x).$$

Anstatt nun aus 2a) und 2b) zuerst λ zu eliminiren, was uns auf die Gleichungen 1a) und 1b) führen würde, kann man zunächst aus 2b) und 2c) ϱ eliminiren. Der Curvengleichung äquivalent ist also das neue Paar:

4a) $$\phi_1^{(1)}(y, x) - \lambda\phi_1^{(2)}(y, x) = 0,$$

4b) $$f_m^{(1)}(y, x)g_{n-m}(y, x) - g_m^{(1)}(y, x)f_{n-m}(y, x)$$
$$- \lambda\{f_m^{(2)}(y, x)g_{n-m}(y, x) - g_m^{(2)}(y, x)f_{n-m}(y, x)\} = 0.$$

Diese analytischen Operationen erläutern das im § 143 eingeschlagene Verfahren. Ist eine Curve gegeben, die durch zwei Büschel von Curven $(m+1)$ter und $(n-m)$ter Ordnung erzeugt wird, so sind die Curven des ersten Büschels die Erzeugnisse eines Strahlbüschels 2a) mit den Curvenbüscheln einer Schaar 2b). Die Leitbüschel derselben, die man für specielle λ erhält, sind zu den Büscheln 1a) und 1b) oder 2c) projectivisch. Die ersteren erzeugen folglich mit dem Büschel 2c) die Curven $n$ter Ordnung eines Büschels 4b), welches zu den Büscheln der Schaar 2b) und also auch zu dem Strahlbüschel 2a) oder 4a) projectivisch ist.

Eine durch irgend zwei projectivische Büschel erzeugte Curve $(n+1)$ter Ordnung ist also auch das Erzeugnifs eines Strahlbüschels und eines projectivischen Büschels von Curven $n$ter Ordnung.

Es sei $n-m$ nicht kleiner als $m+1$ und

$$\chi_{n-2m-1}(y, x) = 0 \qquad 5)$$

die Gleichung irgend einer Curve $(n-2m-1)$ter Ordnung. Alsdann ist

$$\chi_{n-2m-1}(y,x)\{f_{m+1}(y,x)-\varrho g_{m+1}(y,x)\}+\nu\{f_{n-m}(y,x)-\varrho\phi_{n-m}(y,x)\}=0 \quad 6)$$

die Gleichung einer speciellen Schaar von projectivischen Büscheln aus Curven $(n-m)$ter Ordnung, die im § 145 betrachtet wird. Je die homologen Curven, die man bei Fixirung von ϱ erhält, schneiden auf der zugehörigen Curve

$$f_{m+1}(y, x) - \varrho g_{m+1}(y, x) = 0$$

dieselbe Punktgruppe aus; es kann also unsere vorliegende Curve durch das Büschel 1a) und irgend ein Büschel der Schaar 6) erzeugt werden. Weil die Curve $\chi_{n-2m-1}(y,x)=0$ ganz willkürlich war, so konnten wir im Allgemeinen beliebig $\frac{(n-2m)(n-2m+1)}{2}$ Punkte der Curve $(n+1)$ter Ordnung auswählen, welche Grundpunkte des Büschels 1b) werden sollten.

Einen dieser Punkte können wir nun, wie wir weiter oben gesehen haben, zum Centrum eines Strahlbüschels machen, das zunächst mit einem, dann mit unendlich vielen Büscheln von Curven $n$ter Ordnung die vorliegende Curve erzeugt.

§ 195. Die beiden Gleichungen

$$f_{m+1}(y, x) - \mu g_{m+1}(y, x) = 0, \qquad 1a)$$

$$f_{n-m}(y, x) - \mu g_{n-m}(y, x) = 0 \qquad 1b)$$

des § 194 können auch in folgender Weise interpretirt werden: Jede Curve des ersten Büschels ist das Erzeugnifs eines festen Strahlbüschels mit dem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $(m+1)$ter Ordnung und $(m+1)$ten Ranges mit dem Centrum Q, die zu einer bestimmten Schaar gehört. Ähnliches gilt für das zweite Büschel. Hier erhält man Strahleninvolutionen $(n-m)$ter Ordnung und $(n-m)$ten Ranges mit demselben Centrum Q, die mit dem vorigen Strahlbüschel P die Curven $(n-m)$ter Ordnung erzeugen und zu einer Schaar gehören. Die beiden Schaaren sind projectivisch, und homologe Leitinvolutionen derselben projiciren die Involutionen, welche die beiden Büschel 1a) und

1b) auf irgend einem Strahle des Büschels P ausschneiden. Die Gruppe aus $n+1$ Punkten, welche das Erzeugnifs von 1a) und 1b) auf dem Strahle p mit dem Theilverhältnifs x ausschneidet, wird projicirt durch das Erzeugnifs der beiden entsprechenden Leitinvolutionen. Also ist (§ 118 bezw. § 190, 18) die Curve $(n+1)$ter Ordnung das Erzeugnifs eines Strahlbüschels mit beliebigem Centrum P und einer projectivischen Strahleninvolution $(n+1)$ter Ordnung und $(n+1)$ten Ranges mit willkürlichem Centrum Q. Da man nun, von irgend zwei Punkten P und Q ausgehend, für zwei Curven $(n+1)$ter und $m$ter Ordnung solche Erzeugungsweisen besitzt, so hat man zur Aufsuchung ihrer gemeinsamen Punkte das Theorem des § 192 in Anwendung zu bringen. Man erfährt so, dafs die beiden Curven im Allgemeinen $(n+1)m$ Schnittpunkte mit einander gemeinsam haben, und dafs unter allen Umständen solche vorhanden sind. Ist dies einmal gezeigt, so ist nach den Entwickelungen der §§ 193 und 194 unmittelbar klar, dafs auch rein geometrisch ein Büschel von Curven $(n+1)$-ter Ordnung als Erzeugnifs eines festen Strahlbüschels mit den projectivischen Büscheln mannigfaltiger Schaaren definirt werden kann, und dafs dasselbe zu den Leitinvolutionen aller dieser Schaaren projectivisch gesetzt werden kann.

Ein Curvennetz μter Stufe wird geometrisch vorzugsweise aus der Thatsache heraus untersucht, dafs es Geraden in collinearen Involutionsnetzen μter Stufe trifft.

Die Schaar projectivischer Curvenbüschel verhält sich zu dem allgemeinen Curvennetze dritter Stufe wie die Regelschaar zu dem Raume.

§ 196. Wir wollen zum Schlusse die Methode analytisch erläutern, mit deren Hülfe wir im § 178 die Aufgabe gelöst haben, eine Curve $(n+1)$ter Ordnung durch die $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)$ Punkte

$$O; B_1, B_2, \ldots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}; A_1, A_2, \ldots A_n; A_{2n+1}; A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots A_{2n}$$

zu legen.

Wir verlegen in den Punkt O die Ecke P des Coordinatensystems, während die beiden anderen willkürlich bleiben. Durch $B_1, B_2, \ldots B_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ läfst sich ein $n$faches Netz von Curven $n$ter Ordnung legen; wir geben dasselbe durch die $n+1$ Curven

$1) f_n(y,x) = 0,\ 1\text{a}) f_n^{(1)}(y,x) = 0,\ 1\text{b}) f_n^{(2)}(y,x) = 0, \ldots\ 1n) f_n^{(n)}(y,x) = 0,$

welche der Reihe nach durch die Punktgruppen

$A_1 A_2 \ldots A_n,\ A_{2n+1} A_2 A_3 \ldots A_n,\ A_{2n+1} A_3 \ldots A_n A_1, \ldots A_{2n+1} A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$

bestimmt werden. Aus diesem Netze haben wir das Curvenbüschel auszuwählen, welches mit dem Strahlbüschel P unsere Curve erzeugt. Wenn wir uns die Verfügung über die multiplicativen Constanten der $f_n^{(\lambda)}(y, x)$ aufbehalten, so können wir der Gleichung der gesuchten Curve folgende allgemeine Form geben:

$$(x-\lambda) f_n(y, x) + (x-\lambda_1) f_n^{(1)}(y, x) + \cdots (x-\lambda_n) f_n^{(n)}(y, x) = 0. \quad 2)$$

Den Strahlen $PR(x=0)$ und $PQ(x=\infty)$ gehören die Curven

$$\lambda f_n(y, x) + \lambda_1 f_n^{(1)}(y, x) + \cdots \lambda_n f_n^{(n)}(y, x) = 0, \qquad 3\text{a})$$

$$f_n(y, x) + f_n^{(1)}(y, x) + \cdots f_n^{(n)}(y, x) = 0 \qquad 3\text{b})$$

zu. Die Curve $n$ter Ordnung, die dem Strahle $x = a$ des Büschels A oder P zugehört, bekommen wir aus 2) bei Substitution von a in $(x-\lambda_1)$, $(x-\lambda_2), \ldots (x-\lambda_n)$. Jetzt soll die Curve $(n+1)$ter Ordnung die Punkte $A_1; A_2; \ldots A_n; A_{2n+1}$ oder

$x = a_1, y = b_1; x = a_2, y = b_2; \ldots x = a_n, y = b_n; x = a_{2n+1}, y = b_{2n+1}$

enthalten. Für die Coordinaten a_i, b_i findet von den $n+1$ Gleichungen 1) bis $1n$) nur $1i$) nicht statt. Infolgedessen ergiebt sich

$$(a_i - \lambda_i) f_n^{(i)}(b_i, a_i) = 0, \quad \lambda_i = a_i. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Für die Coordinaten a_{2n+1}, b_{2n+1} verschwindet allein $f_n(y, x)$ nicht, man erhält also

$$\lambda = a_{2n+1}.$$

Statt 2) können wir die schon viel speciellere Form

$$(x-a_{2n+1}) f_n(y, x) + (x-a_1) f_n^{(1)}(y, x) + \cdots (x-a_n) f_n^{(n)}(y, x) = 0 \quad 4)$$

substituiren. Für die multiplicativen Constanten der $f_n^{(i)}(y, x)$ bestehen die n folgenden Gleichungen:

$$5)\quad\begin{cases} (a_{n+1}-a_{2n+1})f_n(b_{n+1},a_{n+1})+(a_{n+1}-a_1)f_n^{(1)}(b_{n+1},a_{n+1}) \\ \quad +\cdots(a_{n+1}-a_n)f_n^{(n)}(b_{n+1},a_{n+1})=0. \\ (a_{n+2}-a_{2n+1})f_n(b_{n+2},a_{n+2})+(a_{n+2}-a_1)f_n^{(1)}(b_{n+2},a_{n+2}) \\ \quad +\cdots(a_{n+2}-a_n)f_n^{(n)}(b_{n+2},a_{n+2})=0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{2n}-a_{2n+1})f_n(b_{2n},a_{2n})+(a_{2n}-a_1)f_n^{(1)}(b_{2n},a_{2n}) \\ \quad +\cdots(a_{2n}-a_n)f_n^{(n)}(b_{2n},a_{2n})=0. \end{cases}$$

Denn unsere Curve soll die Punkte $x=a_{n+\lambda}$, $y=b_{n+\lambda}$ $(\lambda=1,2,3,\ldots n)$ oder $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots A_{2n}$ enthalten.

Unsere geometrische Lösung war folgende. Wir bestimmten n^2 Curven aus den Doppelverhältnifs-Gleichungen:

$$6)\qquad (a_k a_{2n+1} a a_{n+\lambda}) = [A_{k+1}\ldots A_{k-1}](A_k, A_{2n+1}, {}^{k}_{n+\lambda}, A_{n+\lambda}).$$
$$(k=1,2,3,\ldots n\ ;\ \lambda=1,2,3,\ldots n)$$

Dem Strahle $x=a$ gehörte die gemeinsame Curve der n Netze

$[A_2\ldots A_n]^{1}_{n+\lambda}[A_3\ldots A_n A_1]^{2}_{n+\lambda}\ldots[A_1 A_2\ldots A_{n-1}]^{n}_{n+\lambda}$ $\quad(\lambda=1,2,3,\ldots n)$

zu. Die Gleichung von $[A_{k+1}\ldots A_{k-1}]^{k}_{n+\lambda}$ sei:

$$7)\qquad f_n(y,x)-a_{k\lambda}f_n^{(k)}(y,x)=0.$$

Die Gleichung der Curve $[A_{k+1}A_2\ldots A_{k-1}]A_{n+\lambda}$ ist:

$$f_n(y,x)-\frac{f_n(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})}{f_n^{(k)}(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})}f_n^{(k)}(y,x)=0.$$

Aus der Doppelverhältnifs-Gleichung 6) ergiebt sich daher

$$\frac{a-a_k}{a-a_{2n+1}}\cdot\frac{a_{n+\lambda}-a_{2n+1}}{a_{n+\lambda}-a_k}=a_{k\lambda}\cdot\frac{f_n^{(k)}(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})}{f_n(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})}.$$

7) geht also über in

$$f_n(y,x)f_n^{(k)}(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})(a-a_{2n+1})(a_{n+\lambda}-a_k)$$
$$-f_n^{(k)}(y,x)f_n(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})(a-a_k)(a_{n+\lambda}-a_{2n+1})=0,$$

und die gesuchte Curve gehört den n Netzen $(n-1)$ter Stufe

$$(a-a_{2n+1})f_n(y,x)\sum_{k=1}^{n}c_{\lambda k}(a_{n+\lambda}-a_k)f_n^{(k)}(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})$$
$$-(a_{n+\lambda}-a_{2n+1})f_n(b_{n+\lambda},a_{n+\lambda})\sum_{k=1}^{n}c_{\lambda k}(a-a_k)f_n^{(k)}(y,x)=0$$
$$(\lambda=1,2,3,\ldots n)$$

gleichzeitig an. Wenn wir nun alle $c_{\lambda k}$ gleich 1 setzen, so nimmt die λte der n Netzgleichungen wegen der Beziehungen 5) nach Abwerfung des Factors

$$(a_{n+\lambda} - a_{2n+1}) f_n(b_{n+\lambda}, a_{n+\lambda})$$

die Form

$$(a - a_{2n+1}) f_n(y, x) + \sum_{k=1}^{n} (a - a_k) f_n^{(k)}(y, x) = 0$$

an. Dies ist mithin die Gleichung der gemeinsamen Curve der n Netze. Also liefert unsere geometrische Methode wirklich die durch die gegebenen Punkte bestimmte Curve $(n+1)$ter Ordnung.

Noten.

Note 1 zu § 1. Vergl: „Beiträge zur Geometrie der Lage“ von K. G. Ch. von Staudt [St. B.]. Drei Hefte. Nürnberg, 1856—1860. [No. 116.]

Über von Staudt's Theorie des Imaginären sind mir folgende Schriften zugänglich geworden:

1) F. August, „Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie“. Programm-Abhandlung. Berlin, 1872.

2) J. Lüroth, „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie“. Mathematische Annalen [Math. Ann.], Bd. 8, S. 145.

In beiden Schriften wird die Gerade zweiter Art als Schnittlinie zweier imaginärer Ebenen oder als Verbindungslinie zweier imaginärer Punkte im Raume definirt, im Gegensatz zu von Staudt's Theorie. Die erste Arbeit bringt in sehr anschaulicher Weise die analytische und die geometrische Betrachtungsweise imaginärer Punkte einer reellen Geraden in Zusammenhang. Die Erweiterung in der zweiten Arbeit betrifft das Rechnen mit Würfen. So wird (§ 17, S. 200 ff.) dem Argand-Cauchy'schen Existenzbeweis für die Wurzeln einer Gleichung mit Hülfe des Rechnens mit Würfen eine geometrische Deutung gegeben.

Ein kürzerer Abrifs der zweiten Arbeit befindet sich in den Nachrichten von d. Königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1873.

3) R. Sturm, „Über die von Staudt'schen Würfe“. Math. Ann., Bd. 9, S. 333.

Es werden mehr geometrische Beweise, als es bei von Staudt geschieht, für die Associativät und Commutativität der Addition und Multiplication der Würfe geführt; aufserdem wird ein anderer Beweis dafür gegeben, dafs jeder complexe Wurf sich in der Form $u + iv$ darstellen läfst, wo u und v reelle Würfe sind.

4) O. Stolz, „Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie“. Math. Ann., Bd. 4, S. 416.

von Staudt's imaginäre Elemente werden auf analytisch-geometrischem Wege behandelt.

5) E. Schröder, „Über von Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe“. Math. Ann., Bd. 10, S. 289.

Eine von der von Staudt'schen verschiedene Theorie der imaginären Elemente hat Herr F. Klein in der Schrift

6) „Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie“. Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1872, S. 373

aufgestellt. Es werden dort cyclisch-projectivische Gruppen, vorzugsweise von vier Elementen, zur Darstellung complexer Elemente in der Geometrie vorgeschlagen.

Die geometrische Ausführung dieser Theorie hat Herr J. Lüroth gegeben. Vergl.

7) „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Zweite Abhandlung“. Math. Ann., Bd. 11, S. 84.

Note 2 zu § 2a. St. B., No. 118 und 83.

Note 3 zu § 2b. St. B., No. 121.

Note 4 zu § 2b. St. B., No. 126.

Note 5 zu § 3. Wenn irgend ein imaginärer Fundamentalpunkt in der Ebene gegeben ist, so kann man jeden anderen imaginären Punkt durch seinen reellen Träger und den reellen Punkt der imaginären Geraden darstellen, die ihn mit ersterem Punkte verbindet, jede beliebige Gerade der Ebene aber durch ihren reellen Punkt und den Träger des Punktes, den sie mit einer festen vom Fundamentalpunkt ausgehenden Geraden gemeinsam hat. Herr St. Smith zeigt, dafs man mit so gegebenen imaginären Elementen alle diejenigen Constructionen linear ausführen kann, die bei Voraussetzung reeller Elemente der Construction linear sein würden. Vergl. die Abhandlung

„Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques etc.“. Annali di matematica pura ed applicata, Serie III, Bd. 3, S. 112 u. 218. [première partie, Art. 3 und 4.].

Note 6 zu § 4. Geometrie der Lage von G. K. Ch. v. Staudt. Nürnberg, 1847. [G], No. 254.

Note 7 zu § 5. Man vergleiche wegen dieser Auflösung die Arbeit von Herrn Staudigl

„Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imaginäre Punkte und Tangenten bestimmt wird“. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der K. Akademie d. Wissenschaften zu Wien [Wiener Ber.], Bd. 62, S. 607.

In ganz symmetrischer Weise löst v. Staudt die Aufgabe. Vergl. [G], No. 314.

Note 8 zu § 6. Ersetzt man B durch einen der unendlich fernen Kreispunkte, so gehen die Ketten in Kreise über, die über den Durchmessern AA_1, BB_1 beschrieben sind, und von ihren Schnittpunkten F, F_1 aus projicirt sich die Involution A durch je eine circulare.

Note 9 zu § 6. St. B., No. 50.

Note 10 zu den §§ 7—9. Aus der Einleitung (S. 14) geht hervor, dafs es gerechtfertigt ist, die Kegelschnitte, welche A und A^1 enthalten, als Ketten der zu A gehörenden Repräsentationsebene zu bezeichnen, und dafs unser Satz einen speciellen Fall der allgemeinen von Staudt'schen Definition der Projectivität bildet. Weil nach von Staudt's Definition zwei einförmige Gebilde projectivisch sind, wenn jedem Element des einen ein Element des anderen entspricht, überdies aber zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind, und weil dabei insbesondere jeder Kette eine Kette entspricht, so ist der Satz auch in St. B., No. 245 ausgesprochen (vergl. Einleitung, S. 14).

Note 11 zu § 9. Wird wieder der Punkt A mit einem der Kreispunkte identificirt, so geht die Beziehung zwischen den Feldern A und A_1 in Inversion über.

Note 12 zu § 16. St. B., No. 218.

Note 13 zu den §§ 20 u. 21. St. B., No. 222.

Note 14 zu den §§ 24—26. Würde es nicht darauf ankommen, die Involutionen zweiter Ordnung projectivisch zu reihen, so hätten wir auch so verfahren können. Ist C_1C_2 ein Paar der Involution A_1A_2, B_1B_2, so hat hat man

$$C_1C_2A_1B_1 \barwedge C_2C_1A_2B_2 \barwedge C_1C_2B_2A_2,$$

woraus dann folgt, dafs C_1, C_2 die Doppelelemente zweier Reihen sind, in denen die Elemente zweier gegebener Paare kreuzweise einander zugeordnet werden. Man vergleiche St. B., No. 85 oder auch

M. Chasles, „Traité de Géométrie supérieure". Paris, 1852. [No. 259].

Der im Texte gegebene Beweis kommt, wie man bemerken wird, wesentlich auf die Steiner'sche Construction der Doppelstrahlen zweier projectivischer Büschel hinaus. Aus dieser Construction hat den Satz Herr Hossfeldt abgeleitet. Vergl.

„Construction des Kegelschnittes aus fünf zum Theil imaginären Curvenelementen". Inaug.-Dissertation. Jena, 1882. [Abschnitt 2].

Hier wird indessen der Schlufs von der projectivischen Aufreihung der Involutionspaare nicht gezogen. Wir geben aus Gründen, die später sich ergeben werden, diesem Reihungsprincip den Vorzug vor dem sonst angewendeten Princip, nach welchem z. B. eine Punktinvolution zur Reihe ihrer harmonischen Mittelpunkte bezüglich eines festen Pols projectivisch gesetzt werden kann, weil alle diese Reihen unter sich projectivisch sind. Einen eleganten Beweis für diese Thatsache giebt z. B. Herr B. Klein in der Arbeit

„Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde". Habilitationsschrift. Marburg, 1881. [Theil I, § 2.]

Die Fortentwickelung dieser Methode der Reihung auf Involutionen höherer Ordnungen erfordert eine rein geometrische Theorie der harmonischen Mittelpunkte aller Ordnungen einer geraden Gruppe von beliebig vielen (n) Punkten. Für $n = 3$ ist diese Aufgabe annähernd geometrisch gelöst von Herrn A. Milinowski in der Schrift

„Die Polaren der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkten". Programm-Abhandlung. Tilsit, 1872.

Die geforderte Theorie fliefst unmittelbar ab aus der Polaren-Theorie der in drei Geraden zerfallenden Curven dritter Ordnuug. Dieselbe Theorie findet sich für Gruppen von vier Punkten angebahnt in desselben Verfassers Abhandlung

„Die harmonischen Mittelpunkte für ein System von vier Punkten in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol". Zeitschrift für Mathematik und Physik [Zeitschr.], Bd. 20, S. 17.

Eine strenge Theorie der harmonischen Mittelpunkte liegt implicite in jeder Theorie, welche Punktgruppen als Ordnungsgebilde von Polarsystemen darzustellen lehrt. Insofern sind Herrn H. Thieme's Schriften

„Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme". Zeitschr., Bd. 24, S. 221 u. 276,

„Die Flächen 3. O. als Ordnungsflächen von Polarsystemen". Math. Ann., Bd. 28, S. 133,

in welchen die genannte Aufgabe als Specialfall der entsprechenden über Curven und Flächen $n$ter Ordnung gelöst wird, bereits hier anzuführen. Mit dem speciellen Gebilde der Punktgruppe beschäftigt sich Herr H. Wiener in der Arbeit

„Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen etc". Habilitationsschrift. Darmstadt, 1885.

Note 15 zu § 28. Wenn einer der beiden Kreispunkte für beide Ebenen A und B das Centrum ist, so sind sie in den kleinsten Theilen ähnlich. Es ist dieser Fall der conformen Abbildung nach der reinen Kreisverwandtschaft, wie es scheint, der erste, welcher eine rein geometrische Behandlung erfährt. Nach analytischer Methode hat die betrachtete Verwandtschaft sehr zahlreiche und ausführliche Behandlungen gefunden.

Note 16 zu § 32. Als ein nicht gering anzuschlagender Vortheil der gegebenen Definition wird es betrachtet, dafs sie die Entstehung der Involution $n$ter Ordnung aus solchen niederer Ordnung in Evidenz setzt.

Bekanntlich hat Desargues die Involution a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 von 6 oder 2.3 Punkten aus der Beziehung

$$a_1c_1 . a_2c_1 . b_1c_2 . b_2c_2 = a_1c_2 . a_2c_2 . b_1c_1 . b_2c_1$$

definirt, welche zwischen ihren Abständen obwaltet. An diese Beziehung hat Poncelet seine Definition der Involution à $3n$ points geknüpft. Zwei Punkte a und b sind nach ihm in Involution mit zwei Gruppen $p_1p_2 \dots p_n$ und $q_1q_2 \dots q_n$ von je n Punkten, wenn die Gleichung besteht

$$\frac{ap_1 . ap_2 \dots ap_n}{bp_1 . bp_2 \dots bp_n} = \frac{aq_1 . aq_2 \dots aq_n}{bq_1 . bq_2 \dots bq_n},$$

und drei Gruppen $p_1p_2 \dots p_n$, $q_1q_2 \dots q_n$, $r_1r_2 \dots r_n$ von je n Punkten bilden eine Involution complète ou à $3n$ points, wenn

$$\frac{(p_1q)}{(p_1r)} = \frac{(p_2q)}{(p_2r)} = \frac{(p_3q)}{(p_3r)} = \dots \frac{(p_nq)}{(p_nr)}$$

ist, wobei unter $(p_\lambda q)$ das Product $p_\lambda q_1 . p_\lambda q_2 \dots p_\lambda q_n$ zu verstehen ist. Vergl.

„Traité des propriétés etc". tome II. Paris, 1866. [section IV. Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces etc. (No. 271ff.)].

Diese Definition ist nicht wesentlich verschieden von der analytischen Betrachtungsweise der Involution in der Form $f(x) - \lambda g(x) = 0$. An diese Gleichung knüpfte zuerst Herr E. de Jonquières seine Behandlungen. Vergl.

„Généralisation de la théorie de l'involution etc". Annali di matematica pura ed applicata. Serie I, Bd. 2, S. 86.

Seitdem befolgen viele Geometer den Gebrauch, für eine in die Betrachtung eintretende Involution höherer Ordnung die Gleichungsform $0 = f(x) - \lambda g(x)$ zu gebrauchen und erst, nachdem ihre wichtigsten Eigenschaften daraus abgeleitet sind, mit der geometrischen Behandlung einzusetzen.

Eine weitere Möglichkeit, Involutionen zu behandeln, liegt in der Betrachtung der Involutionscurven. Man untersucht bei Involutionen auf ebenen rationalen Curven die Hüllcurve der Geraden, welche irgend zwei derselben Gruppe angehörende Punkte verbinden, eine Curve, welche von der $(n-1)$ten Classe ist für die Involution $n$ter Ordnung auf einem Kegelschnitte. Vergl.

Em. Weyr, „Über Involutionen höherer Grade". Journal für die reine und angewandte Mathematik [Journal f. Math.], Bd. 72, S. 285.

Eine sehr ausführliche Behandlung der Involution dritter Ordnung nach diesem Princip giebt Herr Weyr in der Arbeit

„Grundzüge einer Theorie der cubischen Involution". Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag vom Jahre 1874. Sechste Folge, Bd. 7.

Auf derselben Grundlage beruht Herrn H. Wiener's Schrift

„Über Involutionen auf ebenen Curven". Inaug.-Dissertation. München, 1881.

So geeignet diese Methode zur genaueren Untersuchung der Involutionen ist, so wird sie doch unbrauchbar, soll man eine rein geometrische Theorie der Involutionen aufstellen. Wenn man nicht eine vollständige Theorie der Curven voraussetzt, kann sie zu brauchbaren Resultaten nur unter fortwährender Anwendung des Correspondenzprincips führen, wie es auch in den genannten Abhandlungen geschieht und in den zahlreichen Schriften, welche Herr Weyr über specielle Involutionen in den Wiener Berichten veröffentlicht hat.

Ferner kann man noch die Involutionen auf rationalen Curven als Schnitte von Curvenbüscheln studiren. So definirt Herr A. Milinowski in der Arbeit

„Zur Theorie der cubischen und biquadratischen Involution". Zeitschr. Bd. 19, S. 205.

die Involution dritter Ordnung in doppelter Weise: Erstens als Schnitt eines Kegelschnittes mit einem Kegelschnittbüschel, welches einen Grundpunkt auf dem ersteren hat, zweitens als Schnitt eines Strahlbüschels mit einer rationalen Curve dritter Ordnung. Unter Beiziehung der Polarentheorie unternimmt Herr Milinowski zu zeigen, dafs ein beliebiges Büschel von Curven dritter Ordnung auf einer jeden Geraden eine Involution dritter Ordnung ausschneidet; von der Untersuchung ist aber nicht immer das Correspondenzprincip fern gehalten.

Die Involution vierter Ordnung wird als Schnitt eines Kegelschnittbüschels mit einem beliebigen festen Kegelschnitt definirt, ferner als Schnitt eines Strahlbüschels mit einer Curve vierter Ordnung mit dreifachem Punkt. Es wird von speciellen Büscheln von Curven vierter Ordnung gezeigt, dafs sie eine Gerade in Involutionen vierter Ordnung treffen müssen, und von jedem allgemeinen Curvenbüschel dritter Ordnung, dafs es einen durch zwei Grundpunkte gelegten Kegelschnitt in einer Involution schneidet.

Hier ist endlich das in der Note 14 Gesagte zu vergleichen.

Note 17 zu § 41. Die drei Involutionen $A_1 \dots A_{n-m}$, $B_1 \dots B_{n-m}$; B_{n-m+1}, A_{n-m+1}; $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$, $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$ werden in trilineare Beziehung gesetzt ganz so, wie es für einförmige Gebilde von Hrn. B. Klein a.a.O., § 10 (Note 14) geschieht. Solche specielle Gebilde kommen bei der gesonderten Behandlung der Involutionen dritter Ordnung vor, die im § 31 auszugsweise gegeben wird. Die sechs Gruppen und Elemente $A_1 \dots A_{n-m}$; A_{n-m+1}; $A_{n-m+2} \dots A_{n+1}$; $B_1 \dots B_{n-m}$; B_{n-m+1}; $B_{n-m+2} \dots B_{n+1}$, und im § 31 die sechs Elemente A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, sind nichts Anderes als die singulären Elemente der trilinear bezogenen Reihen nach Herrn Schubert's Bezeichnung. Vergl. § 2 der Abhandlung

„Die trilineare Beziehnng zwischen drei einstufigen Grundgebilden". Math. Ann., Bd. 17, S. 457.

Zwischen n in einander liegenden einförmigen Gebilden kann man eine symmetrische $n$fach lineare Beziehung einleiten. Von jeder Gruppe zusammengehöriger Elemente kann man $n-1$ beliebige den $n-1$ ersten einförmigen Gebilden zuweisen, das $n$te entspricht denselben im letzten Gebilde. Man kann dann annehmen, dafs auf solche Weise ein Polarsystem $n$ter Ordnung entsteht, welches, was freilich nur im speciellen Falle $n=3$ erwiesen ist, durch sein Ordnungsgebilde, seine $n$fachen Elemente, bedingt ist. Jedes Element irgend einer Gruppe ist die gemischte Polare der $n-1$ übrigen Elemente derselben. Während Herrn H. Thieme a. a. O. (Note 14) hauptsächlich der Nachweis beschäftigt, dafs Polarsysteme beliebig hoher Ordnung möglich sind, geht Herr H. Wiener a. a. O (Note 14), und im speciellen Falle Herr B. Klein, hauptsächlich darauf aus, ein einmal gegebenes Polarsystem nun auch auf möglichst einfache Art zu bestimmen.

Note 18 zu § 43. In der Abhandlung

„Zur Vervollständigung der Involutionen höherer Ordnung". Wiener Ber., Bd. 61_2, S. 600

knüpft Herr Em. Weyr an die Definition der Involution durch ein Büschel von Curven $n$ter Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkt an. Für den allgemeinen Fall braucht Herr Weyr eine algebraische Grundlage. Dafs ein Element nur einer Gruppe einer Involution $n$ter Ordnung angehört, und diese Gruppe höchstens n Elemente enthält, zeigt Hr. Thieme a. a. O., § 7 (Note 14).

Note 19 zu § 51. Hieran lassen sich leicht die cyclischen Involutionen des Herrn Lüroth (vergl. a. a. O., Note 1, 7) anknüpfen. Sollen zwei projectivische Reihen cyclisch-projectivische Gruppen

$$A_1 A_2 \ldots A_n, B_1 B_2 \ldots B_n, C_1 C_2 \ldots C_n, \ldots$$

zulassen, so müssen sie getrennte Doppelelemente D_1, D_2 besitzen. Die Involution D_1^n, $A_1 A_2 \ldots A_n$ mufs mit ihrer entsprechenden, wenn man $D_1 A_1 D_2 \ldots \,\overline{\wedge}\, D_1 A_2 D_2 \ldots$ setzt, zusammenfallen; beide können sich von einander nur durch die Anordnung unterscheiden, weil sie zwei Gruppen D_1^n und $A_1 A_2 \ldots A_n$ entsprechend gemeinsam haben, und auch dies nicht, weil D_2 eine dritte sich selbst entsprechende Gruppe bestimmt. Die Involution enthält daher alle cyclisch-projectivischen Gruppen, welche den beiden Reihen angehören, und aus Gründen der Symmetrie auch das $n$fache Element D_2^n. Jede cyclische Involution ist also eine solche mit zwei $n$fachen Elementen nach unserer Definition. Dasselbe beweist Herr Wiener a. a. O. (Note 16) durch Betrachtung der Involutionscurve einer auf einem Kreise gelagerten cyclischen Involution.

Note 20 zu § 62. Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen. Man lasse zwei Personen von B_1 und A_1 aus auf einem von zwei nahen Bögen, die sich nur in diesen Punkten treffen, fortschreiten, bis sie sich in irgend einem Punkte C begegnen. Liegt dann der zweite Zug der einen zur linken Seite, so liegt er, weil beide Personen sich ansehen, der anderen zur rechten Seite. Weil aber beide Curven sich nur in A_1 und B_1 treffen, so mufs die zweite Curve während der ganzen Bewegung zur linken Hand der ersten und zur rechten Hand der anderen Person liegen. Die erste Person mufs daher in A_1 sich nach links drehen, um die Tangentenrichtung der zweiten Curve vor sich zu haben, die andere mufs sich in B_1 zu demselben Zwecke um einen kleinen Winkel nach rechts drehen. Mithin drehen Strahlen, die die beiden Winkel zwischen den Tangentenpaaren in A_1 und B_1 durchmessen, sich in entgegengesetzten Richtungen.

Note 21 zu § 67. Es läfst sich sehr leicht zeigen, dafs die Ketten des Büschels $A_1 A_2 \dots A_{n+1}, B_1 B_2 \dots B_{n+1}$, sowie auch die der Schaar $A_1 A_2 \dots A_{n+1} \circ B_1 B_2 \dots B_{n+1}$ im Sinne der analytischen Geometrie je einem Büschel angehören. Sind Φ und Φ^1 die beiden unendlich fernen Kreispunkte, so zerfällt eine Curve des ersten Büschels in die Geraden

$$A_1\Phi\,, A_2\Phi\,, \dots A_{n+1}\Phi\,, B_1\Phi^1\,, B_2\Phi^1\,, \dots B_{n+1}\Phi^1\,,$$

eine zweite in die Geraden

$$B_1\Phi\,, B_2\Phi\,, \dots B_{n+1}\Phi\,, A_1\Phi^1\,, A_2\Phi^1\,, \dots A_{n+1}\Phi^1\,.$$

Von dem zweiten Büschel bestehen zwei Curven aus je den Strahlen

$$A_1\Phi\,, A_2\Phi\,, \dots A_{n+1}\Phi\,, A_1\Phi^1\,, A_2\Phi^1\,, \dots A_{n+1}\Phi^1\,;$$

$$B_1\Phi\,, B_2\Phi\,, \dots B_{n+1}\Phi\,, B_1\Phi^1\,, B_2\Phi^1\,, \dots B_{n+1}\Phi^1\,.$$

Note 22 zu § 71. Sollte die Gruppe, welche $U_1 V W \dots$ und $V_1 U W \dots$ noch gemeinsam ist, Doppelelemente zeigen, so kann man an die Stelle der letzteren Reihe eine andere nahe treten lassen, $V_1 U' W \dots$, welche mit der ersteren neben W eine Gruppe W_1' von n verschiedenen Elementen gemeinsam hat; W_1' liegt unbedingt sowohl mit U_1, V_1 als mit U', V in je einer Involution. Daher mufs an der Grenze, wenn U' sich U nähert, auch W_1' sich einer U, V und U_1, V_1 gemeinsamen Gruppe W_1 nähern.

Note 23 zu § 77. Den umgekehrten Weg, wie es in der Arbeit geschieht, hat Herr B. Klein für das Involutionsnetz zweiter Stufe eingeschlagen (a. a. O., Note 14). Die Gesammtheit aller Tripel eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes bildet das Tripelnetz, welches sich mit unserem Involutionsnetz dritter Ordnung und zweiter Stufe deckt. Wenn es sich um Punkttripel auf einem Kegelschnitt handelt, so giebt jedes Tripel zu einem Dreieck sie verbindender Geraden Veranlassung. Für eine Involution des Tripelnetzes sind diese Dreiecke einem Kegelschnitt umschrieben.

Note 24 zu § 81. Das betrachtete Involutionsnetz μter Stufe ist nahe verwandt mit Poncelet's involution à $(\mu + 2)m$ points. Vergl. No. 288 a. a. O. [Note 16]. Herr Em. Weyr bezeichnet das Gebilde als eine Involution $m$ten Grades und μter Stufe. Vergl.

„Über Involutionen $n$ten Grades und $k$ter Stufe". Wiener Ber., Bd. 79_2, S. 680.

Herr Weyr betrachtet die Gruppengebilde, die durch Curvennetze auf rationalen ebenen Curven, durch Flächennetze auf rationalen Raumcurven ausgeschnitten werden.

Die allgemeinen Sätze, welche wir über Involutionsnetze aufgestellt haben, lassen sich auf alle linearen Systeme anwenden. Vergl.

W. K. Clifford, „On the Classification of Loci". Philosophical Transactions etc., Bd. 169, S. 663,

wo unter locus eine gesetzmäfsige Zusammenstellung von Punktgruppen, Strahlengruppen, Curven, Flächen, kurzum von Gebilden, die sich parametrisch reihen lassen, verstanden wird.

Man kann dieselben Eigenschaften als solche eines $n$dimensionalen Raumes darstellen. In dieser Form giebt sie Herr G. Veronese in der Arbeit

„Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen etc". Math. Ann., Bd. 19, S. 161.

Note 25 zu § 86. Für den besonderen Fall des Netzes zweiter Stufe hat Herr F. Schur den Satz bewiesen und erweitert. Ich befinde mich mit ihm aber in

der Bezeichnung in Widerspruch, indem nach Herrn Schur's Vorgang anstatt „Schaar" „Büschel" collinearer Netze zu schreiben wäre. Zur Begründung dieser Abweichung diene die unverkennbare Analogie der betreffenden Gebilde mit den Regelschaaren des Raumes, sowie der Umstand, dafs nicht sowohl die Netze selbst, sondern die Collineationen, deren Träger sie sind, in's Auge gefafst werden müssen.

Ein Büschel bilden die collinearen Bündel, welche die Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung von ihren Punkten aus projiciren. Die verschiedenen Erzeugungsweisen der Flächen dritter Ordnung und specieller, von ihm neu eingeführter Raumcurven sechster und Flächen vierter Ordnung führen Herrn Schur auf Netze und Gebüsche collinearer Ebenenbündel und räumlicher Systeme. Vergl. §§ 7 und 12 der Arbeit

„Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen". Math. Ann., Bd. 18, S. 1.

Die angezogenen Hülfssätze über Curven und Flächen dritter Ordnung finden sich in Herrn Reye's Buch

„Die Geometrie der Lage", Bd. 2. Zweite Auflage. Hannover, 1880. [Vortrag 24.]

Später hat Herr Schur den Satz durch Projection ausgedehnt auf die collinearen Punktfelder, die in einem beliebigen Raume $n$ter Dimension liegen. Vergl.

„Über die Construction der Flächen $n$ter Ordnung". Math. Ann., Bd. 23, S. 437.

Note 26 zu § 87. Auf die Analogie zwischen Kegelschnitt-Theorie und derjenigen zweiwerthiger algebraischer Functionen einer Veränderlichen macht Hesse aufmerksam in der kurzen Note

„Ein Übertragungsprincip". Journal f. Math., Bd. 66, S. 15.

Es wird jeder Geraden der Ebene das Strahlenpaar zugeordnet, welches sich mit ihm auf einem festen Kegelschnitt schneidet und von einem festen Punkt O desselben ausgeht. Jedem Strahlbüschel gehört so eine Involution zu, und die Sätze der Ebene können in solche über Involutionen umgeschrieben werden. Der Reihe der Tangenten eines Kegelschnittes entspricht ein Gebilde, von dem je zwei Paare einen Strahl enthalten. Dieser Eigenschaft wegen wird es als Involution zweiter Ordnung bezeichnet. Da aber seit 1866 das Wort „Ordnung" seine Bedeutung verändert hat, mufste statt des Beisatzes „zweiter Ordnung" ein anderer „zweiten Ranges" gewählt werden.

Auf dasselbe Übertragungsprincip verweist Hesse in der Note

„Zur Involution". Journal f. Math., Bd. 63, S. 179.

Note 27 zu § 88. Dieser Satz ist analog dem, nach welchem zwei projectivische Kegelschnitte homologe Gebilde collinearer Ebenen sind.

Note 28 zu § 99. Nach der übereinstimmenden Definition Clifford's und Herrn G. Veronese's (Note 24) ist die Involution μten Ranges nichts Anderes als eine durch einen besonderen Raum μter Dimension erstreckte rationale Raumcurve μter Ordnung.

Wir beziehen öfters die Beweise des dritten Abschnittes nur auf den besonderen Fall der aus Punktgruppen einer Geraden bestehenden Involution μten Ranges, während die Lehrsätze allgemein gelten und gehalten sind.

Note 29 zu § 106. Ganz so entstehen bei Herrn G. Veronese und bei Clifford die in einem Theilraume erstreckten rationalen Raumcurven μter Ordnung aus den allgemeinen, oder in einem gegebenen Raume rationale Curven von höherer Ordnung, als seine Dimension anzeigt.

Note 30 zu § 122. Über die zwei-zweideutig bezogenen Grundgebilde kann man zwei Aufsätze des Herrn Em. Weyr zu Rathe ziehen.

„Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittelst symmetrischer Elementensysteme zweiten Grades". Wiener Ber., Bd. 69_2, S. 784.

Jedes Paar des symmetrischen Elementensystems wird auf einem Kegelschnitt durch eine Tangente eines anderen ausgeschnitten, die Curve aber durch Strahlbüschel erzeugt, welche die beiden Systeme von zwei Punkten des ersteren aus projiciren.

„Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde". Leipzig, 1869.

Note 31 zu § 126. Einen geometrischen Beweis dafür, dafs Kegelschnitte sich zu Netzen zusammenschliefsen, gab zuerst von Staudt. Vergl. St. B., No. 351.

Wenn A, B, C, D die Punkte sind, welche zwei Kegelschnitten der Büschel K_1, K_3 und K_2, K_3 gleichzeitig angehören, so gehört z. B. das Punktepaar AB mit allen drei Paaren, die AB auf K_1, K_2, K_3 ausschneidet, zu einer Involution; daher befinden sich A, B, C, D auch auf einem Kegelschnitt des Büschels K_1, K_2. Schwierigkeiten sind zu überwinden, wenn A, B, C, D nicht getrennt liegen.

Note 32 zu § 128. Auf die hohe Wichtigkeit des von uns mit „Schaar projectivischer Kegelschnittbüschel" bezeichneten Gebildes hat zuerst Herr H. Kortum hingewiesen. Vergl.

„Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Zwei Abhandlungen etc." Bonn, 1869.

Im § 4 der zweiten Abhandlung findet sich der Satz über Schaaren von Kegelschnittbüscheln aufgestellt, der jedoch der analytischen Geometrie entlehnt wird. Ganz so, wie Herr Kortum die Kegelschnittschaar zur Herstellung des Büschels von Curven vierter Ordnung verwendet, so wird bei uns (§ 148) der allgemeine Schaarsatz zur Definition der Büschel überhaupt dienen.

Note 33 zu den §§ 143—147. Die unendlich vielfache Erzeugbarkeit der Curven.

Die „Tripelcurve" dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch ein Strahlbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt werden; das Centrum des Strahlbüschels ist auf der Tripelcurve willkürlich; sein conjugirter Punkt und irgend ein Tripel können in die zugehörige Basis aufgenommen werden. Vergl. § 63, S. 507 von

(1) „Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie", Bd. 2, herausgegeben von Herrn H. Schröter. Zweite Auflage. Leipzig, 1870.

Von hier aus sucht Herr A. Milinowski die verschiedenen Erzeugungsweisen der allgemeinen Curve dritter Ordnung zu gewinnen, indem er erst nachweist, dafs zu einem Centrum S auf der Tripelcurve als Basis des Kegelschnittbüschels jede beigeordnete Rest-Gruppe genommen werden kann, und indem er alsdann die allgemeine Curve dritter Ordnung mit der Tripelcurve zu identificiren versucht. Vergl. die Schrift

(2) „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung". Zeitschr., Bd. 21, S. 427.

Ferner handelt über den gleichen Gegenstand desselben Verfassers Arbeit

(3) „Synthetischer Beweis des Satzes, dafs jede ebene Curve dritter Ordnung etc". Zeitschr., Bd. 23, S. 327.

(4) Für die Identität der Tripelcurve und des Erzeugnisses eines Strahlbüschels mit einem projectivischen Kegelschnittbüschel liefert einen strengeren Beweis, als es a. d. a. O. geschehen war, Hr. F. Schur. Zeitschr., Bd. 24, S. 119.

(5) Von hoher Wichtigkeit für die Theorie der Curve dritter Ordnung sind die Entwickelungen, die Herr Th. Reye im 24sten und 25sten Vortrage des zweiten Bandes seiner „Geometrie der Lage" giebt.

Für die allgemeine Erzeugung der Curven durch projectivische Büschel sind von Bedeutung Herrn A. Milinowski's Abhandlungen

(6) „Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung". Zeitschr., Bd. 23, S. 85 und 211,

in welchen der in den §§ 143ff. der vorliegenden Arbeit durchgeführte Procefs, welcher von den verschiedenen Erzeugungsweisen der Curven $n$ter Ordnung aus unter Benutzung einer Schaar projectivischer Büschel aus Curven $(n-1)$ter Ordnung zum Büschel, von da zum Curvennetz, von da endlich zur Büschelschaar führt, für Curven vierter und fünfter Ordnung dargelegt wird, jedoch mit nicht immer rein geometrischen Mitteln. Als Schlufsresultate werden einige der Lehrsätze der §§ 129—138 über Curven $n$ter Ordnung hingestellt. Doch berechtigt die sehr specielle und complicirte Behandlung schon der Curven vierter Ordnung Herrn A. Milinowski keineswegs zur Aufstellung so allgemeiner Sätze. In den §§ 143—147 findet man eine wesentlich vereinfachte und, wie ich hoffe, strenge Darlegung der bezüglichen Lehrsätze. Der Grundgedanke der ganzen Entwickelung ist Herrn Kortum zuzuschreiben. Vergl. Note 32.

Note 34 zu § 148. Diese Methode, ein Curvenbüschel zu definiren, geht auf M. Chasles zurück, der ein Büschel von Curven dritter Ordnung durch ein festes Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel erzeugt, welche zu demselben Kegelschnitt perspectivisch sind. Vergl.

„Note sur les courbes de troisième ordre concernant les points d'intersection etc". Comptes rendus etc., Bd. 41, S. 1190.

Vergl. auch die Entwickelungen der Herren Milinowski und Kortum a. d. a. O. (Noten 33, 6 und 32).

Note 35 zu § 155. Es ist dies der Jacobi'sche Satz. Vergl. Journal f. Math., Bd. 15, S. 285.

Note 36 zu § 156. Es ist dies der Cayley'sche Satz. Vergl. The Cambridge Mathematical Journal etc., Bd. 3, S. 211.

Note 37 zu § 160. Die Theorie der Polaren der Curven dritter Ordnung behandelt Herr Milinowski aufser a. a. O. (Note 14) noch im zweiten Theil der unter (2) in der Note 33 angeführten Abhandlung. Die Polaren von Curvenpunkten ergeben sich unmittelbar aus den verschiedenen Erzeugungsmethoden der Curven dritter Ordnung, und hieraus wird auf die Polaren anderer Punkte geschlossen.

Aus der Theorie der „harmonischen Polarcurve" wird die Polarentheorie abgeleitet in der Abhandlung

„Zur Polarentheorie der Curven und Flächen dritter Ordnung". Journal f. Math., Bd. 89, S. 136.

Lehrsätze über die Polarentheorie der Curven vierter Ordnung stellt Herr Milinowski a. a. O. (Note 33, 6) auf, wobei wieder für Curvenpunkte die Polare mit Hülfe derer eines Büschels von Curven dritter Ordnung erzeugt wird und daraus auf die eines Punktes aufserhalb der Curve geschlossen wird.

Das Allgemeine eines solchen Schlusses von $n-1$ auf n hat Herr Schur entwickelt in der Abhandlung

„Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften ebener Curven". Zeitschr., Bd. 22, S. 220.

Hier sind wiederum Herrn H. Thieme's Arbeiten anzuführen (Note 14).

Die von uns gegebene Entwickelung knüpft an eine kurze Note des Herrn A. Beck in Riga an. Vergl.

„Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen". Math. Ann., Bd. 14, S. 207.

Note 38 zu § 168. Diese Beweismethode befolgt M. Chasles a. a. O., (Note 34); fernere Beispiele für sie finden sich im § XI, No. 55 von Herrn E. de Jonquières,

„Essai sur la génération des courbes géométriques etc". Mémoires présentés par divers savants etc., Bd. 16, S. 159.

Note 39 zu § 168. Vergl., wie überhaupt für die analytische Seite der hier behandelten Theorien, den Aufsatz der Herren Brill und Nöther

„Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie". Math. Ann., Bd. 7, S. 269.

Note 40 zu § 173. H. Grafsmann's Arbeiten über die ebenen Curven sind die folgenden

„Grundzüge zu einer rein-geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse". Journal für Math., Bd. 31, S. 111.

„Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien etc.". ibidem, Bd. 36, S. 177.

„Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Curven durch Bewegung gerader Linien". ibidem, Bd. 42, S. 187.

„Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse". ibidem, Bd. 42, S. 193.

„Die höhere Projectivität der Ebene; dargestellt durch Functionsverknüpfungen". ibidem, Bd. 42, S. 204.

„Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien". ibidem, Bd. 44, S. 1.

„Die lineale Erzeugung von Curven dritter Ordnung". ibidem, Bd. 52, S. 254.

Note 41 zu § 176. Ähnliche Entwickelungen finden sich bei Herrn Wiener a. a. O. (Note 14).

Note 42 zu § 178. Vergl. wegen dieser Fassung des Problems Herrn E. de Jonquières' Essai (Note 40), No. 15ff. Von den Grundpunkten zweier erzeugender Büschel $n$ter und n'ter Ordnung hat man noch $nn'-1$ wesentliche zu bestimmen, wenn sie eine durch $\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}$ gegebene Punkte gehende Curve $(n+n')$ter Ordnung erzeugen sollen; hier ist $n=1$ und $n'=n$ zu setzen. Alle unbekannten Basispunkte sind in die zweite Basis verlegt.

Unser Verfahren ist nicht wesentlich von dem Kortum'schen verschieden. Kann man für beliebige Punkte $C_1, C_2, \ldots C_{n-m}, A_{n-2m+1}, \ldots A_{2n+1}$ die Aufgabe lösen

$$[C_1 C_2 \ldots C_{n-m} \ldots]\ (A_{n-2m+1} \ldots A_{2n+1}) \barwedge a_{n-2m+1} \ldots a_{2n+1},$$

wo die ... hinter C_{n-m} $m-1$ abhängige Punkte bedeuten, so setzt man

$[C_1 C_2 \ldots C_{n-m-1} A_{n-2m+1} \cdots] \; (A_{n-2m} A_{n-2m+2} \cdots A_{2n+1}) \; \overline{\wedge} \; a_{n-2m} a_{n-2m+2} \cdots a_{2n+1}$
und andererseits
$[C_1 C_2 \ldots C_{n-m-1} A_{n-2m} \cdots] \; (A_{n-2m+1} A_{n-2m+2} \cdots A_{2n+1}) \; \overline{\wedge} \; a_{n-2m+1} a_{n-2m+2} \cdots a_{2n+1}.$
Alle Curvenbüschel der durch die beiden links stehenden Büschel bestimmten Schaar haben die Beziehung zu befriedigen

$$[C_1 \ldots C_{n-m-1} \ldots] \; (A_{n-2m} A_{n-2m+1} \cdots A_{2n+1}) \; \overline{\wedge} \; a_{n-2m} a_{n-2m+1} \cdots a_{2n+1};$$

ein Büschel der Schaar genügt daher der Forderung

$$[C_1 \ldots C_{n-m-1} \ldots] \; (A_{n-2m-1} A_{n-2m} \cdots A_{2n+1}) \; \overline{\wedge} \; a_{n-2m-1} a_{n-2m} \cdots a_{2n+1};$$

so weiter schliefsend erhält man die Gewifsheit, dafs sich durch $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ Punkte im Allgemeinen eine und nur eine Curve $(n+1)$ter Ordnung legen läfst. Vergl. die Entwickelungen der Herren Kortum und Milinowski a. d. a. O. (Noten 32 und 33, 6).

Eine hiervon verschiedene Methode der Curvenerzeugung giebt Hr. G. Härtenberger im 58sten Bande des Journals für Math. Doch wird diese Arbeit illusorisch wegen eines auf S. 58 gemachten Fehlers, den bereits Herr Kortum bemerkt hat.

Wie man bei der Construction algebraischer Flächen zu verfahren hat, zeigt Herr Fr. Schur a. a. O. (Note 25).

Note 43 zu § 179. Eine ausführliche Darstellung des Zusammenhanges zwischen v. Staudt's Imaginären-Theorie und der Betrachtungsweise der analytischen Geometrie findet sich in der Abhandlung des Herrn Stolz. Vergl. Note 1.

Note 44 zu § 179. Diese Entwickelung giebt Herr F. August a. a. O. (Note 1).

Berichtigungen.

S. 33, Z. 1 v. o. hinter „A" schalte ein „[oder von β^1 und A^1, wo dann ganz analog zu schliefsen wäre]".
S. 33, Z. 2 v. u. hinter „aber" schalte ein „wenn Γ im Unendlichen liegt".
S. 37, Z. 2 v. u. statt „Punkte" lies „Punktfolgen".
S. 40, Z. 14 v. u. statt „sie" lies „J_1 und $\mathfrak{J}_2$".
S. 74, Z. 8 u. 9 v. o. sind die oberen Striche zu tilgen.
S. 103, Z. 7 v. o. fallen die Worte „durch Ketten" fort.
S. 105, Z. 4 v. u. statt „diese" lies „U und V".
S. 141, Z. 1 v. o. hinter „Y_α" schalte ein „der Involution".
S. 193, Z. 3 v. o. statt „beliebigen" lies „besonderen".
S. 264, Z. 2 v. o. statt „solches" lies „α faches" u. statt α lies $\alpha + 1$ in den Z. 8, 10, 12, 14.
S. 278, Z. 2 v. u. statt „$(m+n+r)\,\nu$" lies „$(n+r)\,\nu$".
S. 280, Z. 11 v. u. statt „Wq_0" lies "W oder $W_1\,q_0$".

Inhaltsverzeichnifs.

PHILOSOPHISCH-HISTORISCHE ABHANDLUNGEN.

Die Wasserleitungen von Pergamon.

Vorläufiger Bericht

von

FRIEDRICH GRÄBER,

Gräflich Stolberg-Stolbergschem Baurath.

Mit einem Beitrage

von

CARL SCHUCHHARDT.

Vorgelegt in der Gesammtsitzung am 10. Februar 1887
[Sitzungsberichte St. VIII. S. 97].
Zum Druck eingereicht am 28. November 1887, ausgegeben am 3. Februar 1888.

Es ist wiederholt bei Schilderung der pergamenischen Ausgrabungsarbeiten hervorgehoben worden, dafs die Untersuchung, welche Anfangs auf ein einzelnes Monument gerichtet war, sehr bald auf das Ganze der antiken Stadt sich erweiterte.

Im Herbst 1885 war Herr Schöne, welcher als Generaldirector der Königl. Museen an der Leitung der dortigen Arbeiten fortwährend betheiligt gewesen ist, in Pergamon anwesend. Er war es, der damals die Aufmerksamkeit darauf lenkte, wie wichtig es sein würde, auch davon sich eine Vorstellung zu schaffen, auf welche Weise im Alterthum die Versorgung der Stadt mit Wasser bewirkt worden sei. Von besonderer Wichtigkeit erschien diese Frage für die Königszeit, als die befestigte Ansiedlung sich auf den Berg beschränkte und besonders wichtige Hauptpunkte derselben, wie der Markt, das Theater und die königlichen Wohnungen, grade die höchsten Theile des Stadtbergs einnahmen. Sollte man damals an solchen Stellen wirklich sich begnügt haben, nur hereingetragenes oder aus den zahlreich vorhandenen Cisternen entnommenes Wasser zu gebrauchen? Gewifs war anzunehmen, dafs man in Pergamon unter den Attaliden zur Zeit eines hoch entwickelten Luxus und reichlich zur Verfügung stehender Mittel Alles in Bewegung setzte, was die entwickelte Technik der hellenistischen Zeit zu leisten im Stande war, um eine bessere Art der Wasserversorgung herbeizuführen. Es war mehr als eine Frage der Stadttopographie, es war eine Frage nach dem Culturzustande der damaligen Zeit, welche hiermit aufgeworfen war.

Überzeugt von der Richtigkeit einer solchen Fragestellung folgte ich dieser Anregung und beantragte bei der Königl. Akademie die Ausführung einer eigenen Untersuchung der Wasserleitungen von Pergamon, und zwar um im Besonderen, wenn möglich, zu erkennen, wie hoch zur Königszeit das Wasser in die Stadt den Berg hinauf geführt worden sei. Eine gleichartige Untersuchung hatte auf Anregung des Herrn Hagen die Akademie früher der Wasserleitung bei Alatri durch Herrn Bassel zugewendet[1]).

Die philosophisch-historische Klasse gewährte die Mittel und mit gnädigster Genehmigung seines erlauchten Herrn übernahm es Herr Gräber, gräflich Stolberg-Stolberg'scher Baurath, welcher früher eine verwandte Aufgabe bei den Ausgrabungen von Olympia gelöst hatte, die Untersuchung zu führen. An Ort und Stelle standen ihm dazu sechs Wochen, im September und October 1886, zur Verfügung.

Herr Gräber traf am 4. September in Pergamon ein. Im Vereine der seit Jahren dort thätigen Mitarbeiter, zumal der Herren Humann und Bohn, wurde ihm jederlei Unterstützung zu Theil. Die bereits gewonnenen topographischen Ergebnisse und die ihrem Abschlusse nahe geführten kartographischen Aufzeichnungen boten werthvolle Anhaltspunkte für die in kurz bemessener Zeit nunmehr auszuführende Untersuchung. Ohne diese Grundlage, das wünscht Herr Gräber selbst auszusprechen, würde er nicht zur raschen und glücklichen Beantwortung der gestellten Hauptfrage haben gelangen können; auch Herr Dörpfeld, der grade in Pergamon anwesend war, hat Herrn Gräber in dankenswerthester Weise persönlich unterstützt. Wie aufserdem Herrn Gräber's Ergebnisse durch die Bemühungen eines anderen Mitarbeiters in Pergamon, des Herrn Schuchhardt, noch eine äufserst willkommene Ergänzung fanden, wird im Folgenden zu berichten sein.

Die genaue Ausführung des Inhalts dieser vorläufigen Mittheilung bleibt für den ersten Band der „Alterthümer von Pergamon“ vorbehalten.

Conze.

[1]) Zeitschrift für Bauwesen 1880, S. 337. Centralblatt der Bauverwaltung 1881, S. 121; 1882 S. 410. 436. C. I. L. X, 5807.

Überblickt man die Umgegend von Pergamon, so kann in griechischer Zeit, als die Stadt nur den Berg einnahm, für die Zuführung von Quellwasser in ihren Mauerring nur das Gebiet nördlich vom Kaïkosthale in Betracht gekommen sein und zwar, aufser den Flüssen Selinus und Ketios selbst, in erster Linie die Berge zwischen ihnen. Für die römische Zeit dagegen, als die Stadt auch in die Thalebene und namentlich weit auf das andre Selinusufer sich erstreckte, konnte auch das Gebirge westlich vom Selinus, der Geïklidagh, als Quellgebiet benutzt werden und ebensowohl die Gebirge auf der Ostseite des Ketios. Wir bekommen einen hohen Begriff von der Bedeutung der alten Stadt und dem Gewicht, welches man auf deren Versorgung mit Wasser legte, wenn wir an den vorhandenen Überresten wahrnehmen, dafs man nach und nach alle Wasseradern, welche im Umkreise von mehreren Meilen zu gewinnen waren, gesammelt und der Stadt zugeführt hat.

Wird nun auch die Feststellung aller dieser Leitungen für ein umfassendes topographisches Studium von Wichtigkeit sein, so hatte doch die Frage das gröfste Interesse, wie weit es in der Königszeit möglich gewesen sei, die damalige Stadt auf dem Berge durch Leitungen mit Quellwasser zu versorgen.

Der Stadtberg hängt mit den nordwärts von ihm gelegenen Gebirgen nur durch eine Einsattlung zusammen, deren tiefster Punkt 158^{m} unter der obersten Spitze des Stadtberges liegt. Dafs über diesen Sattel hin, welcher sich noch etwa 120^{m} über der Thalsohle erhebt, Zuleitung von Wasser stattfand, zeigen dem Besucher auf den ersten Blick die ansehnlichen Ruinen von Aquäducten, welche die beiden Einsenkungen des Sattels übersetzen. Der dem Stadtberge nächst gelegene Aquäduct ist bis auf einen Bogen zerstört, aber man kann an den Pfeilerresten seine ganze

Ausdehnung leicht erkennen; in der zweiten weiter nach Norden hin gelegenen Einsenkung stehen dagegen bis auf zwei, die umgestürzt sind, noch sämmtliche Bogen des Aquäducts; sie erstrecken sich auf eine Länge von etwa 300 Meter.

Die zunächst jenseit der Einsattlung gelegenen Berge, deren erste Höhe man nach einer hinter ihr befindlichen Kirche des Hagios Georgios benennen kann, sind allerdings noch wenig geeignet zur Sammlung von Quellen und zur Anlage von Leitungen und Kanälen; denn der Zwischenraum zwischen den beiden nahezu parallel verlaufenden Flufsthälern des Ketios und Selinus ist gering, die Berge fallen zudem nach beiden Seiten von einem scharfen Grat welcher die Wasserscheide bildet, steil ab, und nirgends findet sich Flächenbildung für ein natürliches Wasserreservoir. Dadurch, dafs die seitlichen Verzweigungen des Gebirges mannigfache Schluchten bilden, wird zwar die Bildung von Quellen befördert; sie können aber nicht sehr nachhaltig sein. Abgesehen also von der Schwierigkeit sie einzeln zu fassen und sodann zu vereinigen, hätte es der Sammlung einer sehr grofsen Anzahl derselben bedurft, um für eine Stadtbewässerung hinreichendes Wasser zu erhalten.

Nun ist es aber gelungen festzustellen, dafs man nicht nur durch Kanäle am Fufse der Berge entlang das Wasser aus dem oberen Selinusthale bei Kapukaya her und aus dem oberen Ketiosthale in die Stadt zu bringen im Stande war, sondern dafs sogar Leitungen in deutlichen Überresten zu verfolgen sind, welche Wasser in beständigem Falle von den Höhen des Madarasberges, der in der Luftlinie nahezu 30 Kilometer entfernt ist, nach Pergamon brachten. Es war dieses nur mit grofsem Aufwande möglich; für die dreifache Leitung vom Madarasberge her werden etwa 180000 laufende Meter Thonröhren erforderlich gewesen sein. Aber Wasser stand auf diese Weise in reichlichem Maafse zur Verfügung.

Um es über die Einsattlung zum Stadtberge zu bringen dienten die über Bogenstellungen geführten Aquäducte, deren bereits Erwähnung gethan ist. Ich habe nicht unterlassen das System ihrer Anlage festzustellen, aber sie stammen, wie die ganze Bautechnik zeigt, erst aus römischer Zeit. Auf die Reste einer älteren Leitung und damit auf das, was zu ergründen ich während der mir zur Verfügung stehenden Zeit für die Hauptaufgabe halten mufste, führte eine andere Spur.

Auf der Spitze des Berges zwischen der ersten und zweiten Einsattlung (vergl. die Situationsskizze und das Nivellement auf Taf. I) war schon früher ein grofser Stein, von fast 1,5 : 2,0^{m} Seite, freigelegt, welcher in der Mitte und in der Richtung von Norden nach Süden eine Durchbohrung von ca. 30^{cm} Durchmesser zeigte. Von diesem Stein ausgehend konnte man ferner auf beiden Seiten des Berges deutlich zwei grofse, schlitzartige Bodensenkungen wahrnehmen, welche augenscheinlich nicht aus einer natürlichen Bergform zu erklären waren. Und da ganz entsprechend auf der südlichen Seite des zweiten Berges hinter der zweiten Einsattlung und ebenfalls anscheinend am Stadtberge selbst in der Verlängerung des kleinen Aquäducts ähnliche Einschnitte bemerkbar waren, so lag der Gedanke nahe, dafs durch diese Schlitze, wie wir sie nennen wollen, die Lage einer unterirdischen Wasserleitung bezeichnet werden könnte, und dafs das Loch in dem zu Tage liegenden Steine auf dem ersten Berge den Durchmesser einer Blei- oder Thonrohrleitung angäbe. In die Augen fallend war, dafs die Schlitze in keinem Zusammenhange mit den Aquäducten zu stehen schienen, da in der zweiten Einsattlung beide, Schlitz und Aquäduct, noch eine Strecke weit nebeneinander sichtbar waren. Und doch wurde man wieder versucht beide Linien mit einander in Verbindung zu bringen, als auf den Feldern unmittelbar an dem grofsen zweiten Aquäduct eine Anzahl grofser Quadersteine mit einer ähnlichen Durchbohrung wie bei jenem grofsen Stein, nur mit geringerem Durchmesser der Durchbohrung gefunden wurde, und als auch auf halber Höhe des Berges Reste einer Thonrohrleitung sich zeigten, welche anscheinend die Leitung in dem Schlitz mit dem Aquäduct verband.

Um Gewifsheit zu schaffen, wurde alsbald nach den ersten vorläufigen Besichtigungen der Spaten angesetzt und zwar an 8 — 10 Stellen in den Schlitzen am Stadtberge sowohl wie an den beiden Seiten des ersten Berges, indem Quergräben durch die Schlitze gezogen wurden. Die Bemühung war zunächst erfolglos; man stiefs sehr bald auf den gewachsenen Boden und weder Thonscherben, noch Blei, noch bearbeitete Steine kamen zu Tage. Da aber die Schlitze zum Theil 2 — 4^{m} tief und 10 — 15^{m} breit waren, so konnte man annehmen, dafs in denselben zwar eine Wasserleitung gelegen habe, dafs dieselbe aber herausgenommen sei und die Regengüsse der Jahrhunderte allmählich die ursprünglich kleine Rinne

zu dem jetzigen tiefen und breiten Schlitz erweitert hätten. Dann wäre freilich bei weiterem Graben gar nichts mehr zu erwarten gewesen.

Der gröfsere Theil der Arbeiter wurde jetzt am grofsen Aquäduct angestellt, um an den beiden Enden desselben den Abschlufs zu ermitteln, da an diesen Stellen namentlich über die Querschnitte der Kanäle und deren weiteren Verlauf Aufschlufs zu erhalten sein mufste. Nur eine kleine Abtheilung blieb auf der Spitze des ersten Berges bei dem grofsen Lochstein um dort noch einen gröfseren Graben in der Längsrichtung des Schlitzes aufzuwerfen. Denn die Schlitze erweiterten sich der Breite und Tiefe nach ersichtlich den Berg hinunter, und es liefsen sich oben auf der Bergkuppe, wo die Auswaschung noch gering war, am ersten etwa erhaltene Überreste der Leitung erhoffen.

Die Erwartung täuschte dieses Mal nicht. Bald kam eine grofse Reihe von durchlöcherten Steinen zum Vorschein, in Plattenform von ca. 1,20—1,50^{m} Länge, 60—70^{cm} Breite und 20—25^{cm} Dicke, die annähernd in Abständen von 1,20^{m} aufrecht standen und alle die grofsen Durchbohrungen von 30^{cm} Durchmesser zeigten. Zwischen den Steinen fanden sich noch hier und da flachgelegte Trachytplatten, deren Oberkante ungefähr mit der Unterkante des Loches in den aufrecht stehenden Steinen abschnitt. Die nebenstehende Abbildung zeigt den Zustand nach der Ausgrabung am südlichen Abhange des obenerwähnten Berges. Dafs man es hier mit den Resten einer Wasserleitung zu thun habe, war sofort klar, weniger deutlich aber deren eigenartige Construction. Doch blieb bei Prüfung aller Umstände nur die Annahme übrig, dafs man es mit einer Metalleitung zu thun habe; denn bei einer Thonrohr- oder gemauerten Leitung hätten nothwendiger Weise selbst nach einer absichtlichen oder unabsichtlichen Zerstörung Reste von Steinen, Mörtel und Thonscherben zurückbleiben müssen, wie solche auch längs des grofsen Aquäducts in unzähligen Stücken vorhanden waren. Aber im Verlaufe des Schlitzes wurde aufser den erwähnten grofsen Quadersteinen nichts weiter gefunden. Die Steine selbst waren nicht mehr alle unversehrt; an den meisten war das Loch nach oben hin durchgeschlagen, zweifellos als die Leitung zerstört wurde um das werthvolle Material herauszunehmen.



Nachdem die ersten Steine gefunden waren, kamen bei fortgesetzten Versuchsgrabungen auch an anderen Stellen gleiche Reste der Leitung zum Vorschein, insbesondere wurde auf der Spitze des Berges hinter dem grofsen Aquäduct ein ebenso grofser Stein gefunden, wie auf dem ersten Berge und auch dort nach beiden Seiten hin an den Gipfelstein sich anschliefsend Reihen durchlöcherter Steine. Das Nivellement ergab, dafs dieser zweite Höhenpunct der Leitung um ca. 1,0^{m} niedriger lag als der erste, dafs also an dieser Stelle noch keine genügende Höhe vorhanden war, um durch natürlichen Druck das Wasser auf die Spitze des ersten Berges zu bringen.

Es wurde daher die Leitung durch die nächstfolgende Bodensenkung noch weiter nach Norden bis an den Anstieg des Hagios-Georgios-Berges verfolgt. In der Senkung vor diesem Berge fanden sich dann auch noch gegen 20 Lochsteine an ihrer ursprünglichen Stelle, z. Th. sogar aus dem Boden hervorragend, und weiter am Hagios-Georgios-Berge selbst noch mehrere, aber nicht mehr an ihrem Platze befindliche, sondern lose umherliegende Steine mit der charakteristischen Durchlöcherung. Die letzten derselben, welche aller Wahrscheinlichkeit nach nicht sehr weit von ihrem ursprünglichen Standort entfernt sein konnten, lagen nach dem Nivellement auch schon erheblich höher als die Spitze des Berges zwischen den beiden Aquäducten.

Es unterlag jetzt keinem Zweifel mehr, dafs die Leitung auch nach Süden zu am Stadtberge hinaufsteigen mufste. Es wurde, um das festzustellen, von Neuem in dem Schlitz gegraben an der Stelle, wo zuerst begonnen und nichts gefunden war, und bald kam auch hier der erste Stein mit Durchlöcherung zu Tage und, wie sich das Auge allmälig schärfte, bemerkte man weiter den Stadtberg hinauf sogar eine ganze Reihe von Steinen aus der Erde ragend, die sich beim Nachgraben sofort als den gesuchten durchlöcherten Steinen der Leitung angehörig ergaben. Die Arbeit des Suchens ging nunmehr, indem die Arbeiterzahl vermehrt und alle Mannschaft auf dieser einen Strecke concentrirt wurde, rasch voran. Die Arbeiter wurden in Abständen von 5—10^{m} aufgestellt, und die rückwärts stehenden, sobald ein Stein gefunden wurde, weiter vorgeschoben. Es war der spannendste Theil der ganzen Untersuchungsarbeiten. Wir hatten allen Anlafs zur Eile, denn schon hatte ich den nicht mehr hinauszuschiebenden

Tag meiner Abreise festgesetzt und noch fehlten an ca. 100^{m} Höhe bis zur Spitze der alten Stadt; dazu kam, dafs ein auf halber Höhe liegender alter Steinbruch mit seinem Gerölle die Leitung oft mehrere Meter tief verschüttet hatte. Dabei sträubte ich mich noch immer gegen den Gedanken, dafs die Leitung wirklich bis zur höchsten Burgspitze geführt gewesen sein könnte, und wo nur eine seitliche Ablenkung als besonders angezeigt gedacht werden konnte, wie in Höhe der Agora, in der der Theaterterrasse, des Athena-Tempels u. s. w., wurde nachgeforscht, ob nicht etwa die Leitung in horizontaler Linie um den Berg herumgeführt sein könnte. Aber das Auffinden immer neuer Steine weiter aufwärts trieb die nun selbst auch schon auf den Erfolg begierigen Arbeiter unweigerlich höher den Berg hinauf. Trotz mehrerer Regentage gelang es am vorletzten Tage vor meiner Abreise die letzten Steine dicht unter der Ecke, welche einst den Tempel der Julia trug, und eine Platte sogar noch auf einer antiken Mauer, welche dort gegen den hochragenden Eckfelsen hinaufführte, aufzufinden. Es war kein Zweifel mehr, die Leitung mufste auch über diesen letzten Felsen hinweg auf den sogenannten Garten der Königin, wie die Terrasse des genannten Tempels im Volke heute heifst, geführt gewesen sein und daher unbedingt eine Höhe von 324^{m} über dem Meere erreicht haben. Die Thatsache war also festgestellt, dafs die Leitung über Berg und Thal auf die höchste Spitze des Stadtberges, wo die Königspaläste gelegen haben werden, geführt war. Damit war ein neues wichtiges Glied den Ergebnissen der pergamenischen Ausgrabungen zugefügt.

Von Interesse wäre es zwar gewesen die Wasserleitung auch rückwärts bis zu ihrem Anfangspunkte in die nördlichen Berge oder doch wenigstens bis zu einer der Burgspitze entsprechenden Höhe am Hagios-Georgios-Berge zu verfolgen, wo doch wahrscheinlich vor dem Eintritt des Wassers in die grofse Heberanlage ein Klär- und Reinigungsbassin vorhanden gewesen sein wird. Doch es fehlte dafür die Zeit wie die Mittel, während obendrein die Ausgrabungen und Nachforschungen mit jedem Kilometer weiter von Pergamon der wachsenden Entfernung entsprechend schwieriger geworden wären.

Dafs die Wasserleitung, welche ein so grofsartiges Ziel, wie die Versorgung der Königsburg, verfolgte, nicht in der nächsten Nähe von

Pergamon ihr Quellgebiet haben kann, ergiebt die Formation des Gebirges ohne Weiteres. Das Quellgebiet für diese grofse Leitung mufs weit zurück im Hochgebirge liegen. Dafs die Terrainbildung diese Annahme zuläfst, ist durch die glücklichen Erfolge der Untersuchungen Dr. Schuchhardt's, über welche weiter unten Bericht erstattet wird, bestätigt.

Für unsere Kenntnifs der antiken Technik hat die nachgewiesene Wasserleitung ein hervorragendes Interesse. Die Höhendifferenz zwischen dem Plateau der Ecke des Julia-Tempels und der Sohle der tiefsten Einsattlung am grofsen Aquäduct beträgt über 150^{m}. Es hatten demnach die Rohrwandungen der Leitung unter Berücksichtigung der Reibungsverluste einen Druck von mindestens 15—20 Atmosphären auszuhalten. Es ist dies eine technisch sehr bedeutende Leistung, wenn man noch den grofsen äufseren Rohrdurchmesser von 30^{cm} in Betracht zieht. Zu den Gründen, welche schon oben gegen die Annahme von Thonröhren oder Steingemäuer geltend gemacht wurden, kommt daher jetzt noch der entscheidende hinzu, dafs die gewaltige Druckhöhe derartig schwache Materialien vollständig ausschliefst. Der Gufs von Eisen- und Bronceröhren in solch grofsen Stücken war aber im Alterthum, soviel wir bis jetzt wissen, unbekannt, während Vitruv (VIII, 7) Wasserleitungsröhren aus Blei für solche Dimensionen als noch üblich angiebt.

Eine ähnliche Hochdruck-Wasserleitung, anscheinend etwas jüngeren Ursprungs, ist vor einigen Jahren bei Alatri von Herrn Bassel untersucht worden (siehe oben S. 4); dieselbe hat aber erheblich geringere Maafse, da der innere Durchmesser der Röhren dort nur 10,5^{cm} beträgt; aufserdem hatte die pergamenische Leitung das Wasser ca. 50^{m} höher zu treiben. Auch constructiv weichen die beiden Leitungen von einander ab. Bei der von Alatri waren die Röhren stark ummauert, um dem biegsamen Blei eine unverrückbare Lage zu sichern und etwaigen Undichtigkeiten vorzubeugen; bei der pergamenischen lagen die Röhren auf einer Unterlage von grofsen Trachytplatten und wurden in Abständen von ca. 4 Fufs durch eine noch gröfsere Platte gleichen Materials an ihrem Platze gehalten. Diese Construction verhinderte jegliche seitliche Ausbiegung unter der Voraussetzung, dafs die Rohrwandung eine genügende Steifigkeit in sich besafs.

Bei der Annahme, dafs die Röhren aus Blei hergestellt seien, war es zuerst auffallend, dafs wir gar keine Spur von Blei fanden; aber da die Platten in der Erde nicht immer an ihrer alten Stelle und meistens auch in ihrem oberen Theile zerschlagen vorgefunden wurden, so gewann man, wie bereits gesagt, bald die Gewifsheit, dafs das Metall zu anderem Gebrauche herausgenommen worden sei, und zwar nicht auf dem Wege gelegentlicher Räuberei, sondern mit aller Sorgfalt systematisch auf der ganzen Länge, und vielleicht schon in römisch-byzantinischer Zeit; handelte es sich doch um einen grofsen Metallwerth. Nur an einer einzigen Stelle hat sich bei unseren Nachgrabungen im Verlaufe der Leitung noch etwas Blei in kleinen Splittern vorgefunden; es war auf halber Höhe des Stadtberges; die Splitter lassen aber nichts von ihrer ursprünglichen Form erkennen.

Ein gewisses Interesse gewährt die Beobachtung, dafs die Ingenieure die Leitung mit Vorliebe bergauf, bergab und namentlich bei den beiden die Einsattlung unterbrechenden Höhen jedesmal auf die höchste Spitze geführt haben. Wenn auch nicht geleugnet werden kann, dafs dieses geschehen sein mag um die Entfernung der Luftblasen an den Höhenpunkten leichter zu bewerkstelligen, so entstehen doch andererseits durch das mehrfache Steigen und Fallen der Röhren erhebliche Reibungsverluste und der in Folge dessen nothwendige stärkere Druck bedingt auch stärkere Rohrwandungen.

Über die Stärke der Rohrwandungen läfst sich schwer etwas Bestimmtes sagen. Es wird in heutiger Zeit Blei nur in kleinen Dimensionen zu Wasserleitungsröhren, meistens nur bis zu 5^{cm} Durchmesser, verarbeitet. Daher sind wenigstens keine Formeln für gröfsere Querschnitte von Bleiröhren zur Hand. Wir haben ferner heutzutage gezogene Bleiröhren, während die antiken aus Blechen gebogene oder gegossene waren, daher auch schon aus diesem Grunde einen anderen Widerstandscoëfficienten hatten als die modernen. Und da wir auch nicht einmal wissen, ob bei unserer Leitung gegossene oder aus Walzblei gebogene Röhren angewandt worden sind, so fehlen einer exacten Berechnung die erforderlichen Unterlagen. Soweit mir antike Wasserleitungen bekannt sind, möchte ich überhaupt bezweifeln, dafs theoretische Berechnungen über die Festigkeit der Rohrwandungen sowohl wie über die Be-

wegung des Wassers in Röhren den ausgeführten Arbeiten zu Grunde gelegen haben. Man würde sich sonst, z. B. bei einer technisch im Übrigen so hervorragenden Leitung wie die grofse römische in Pergamon, bemüht haben die thatsächlich vorhandenen erheblichen Querschnittsänderungen in der Leitung, ja selbst in den einzelnen Thonröhren, zu vermeiden. Rohrleitungen mit gleichmäfsig fortlaufendem Querschnitt findet man sehr selten und noch seltener die für Bewegung des Wassers in Röhren so wesentlichen glatten Innenwandungen.

Die grofse Wasserleitung des Betilienus in Alatri hat anscheinend mit Abnahme des Wasserdrucks nach oben eine verringerte Stärke der Rohrwandung gehabt; denn Herr Bassel hat in der Thalsenke ein Rohrstück mit 35^{mm} starker Wandung, auf halber Höhe ein anderes von 10^{mm} Wandstärke gefunden; in Pergamon scheint dagegen eine gleichmäfsige Wandstärke durchgeführt gewesen zu sein, da sämmtliche Trachytplatten der Leitung denselben äufseren Durchmesser des Rohrs von $0{,}30^{m}$ aufweisen.

Auf den Nachweis der unterirdischen Bleirohrleitung, deren Verlauf auf Taf. I im Profil und Plan mit blauer Farbe eingetragen ist, beschränkten sich aber die Untersuchungen im Norden des Stadtberges nicht. Es wurden gleichzeitig auch die ohne Zweifel aus römischer Zeit stammenden Leitungen verfolgt, deren Aquäducte über die beiden Einsenkungen zunächst nördlich vom Stadtberge hin noch gröfstentheils aufrecht stehen. Ihr Verlauf ist auf Taf. I ebenfalls im Profil und im Plane, und zwar in rother Farbe, eingetragen.

Der grofse Aquäduct mufs, von seinem jetzigen Verfall abgesehen, schon früher einmal eingestürzt gewesen sein. Von dem ursprünglichen Bauwerke stehen an dem Südende noch fünf Bogen von ca. 8^{m} Spannung, an dem Nordrande noch neun Bogen und in dem zwischenliegenden Theil die meisten Pfeiler. Die elf zusammengestürzten Bogen in der Mitte sind später mit geringer Sorgfalt wieder hergestellt; mehrere von ihnen liegen aber jetzt abermals in Trümmern. Sodann sind nur wenige Meter neben dem Aquäduct noch Reste einer Parallelmauer erkennbar, welche vielleicht dazu gedient hat in der Zeit zwischen dem Einsturz und dem Wiederaufbau des Bauwerkes das Wasser provisorisch über das Thal hinüberzuführen. Die alte Bogenstellung ist von der späteren leicht zu unter-

scheiden. Der ursprüngliche Bau der zweifellos römischen Anlage ist kräftig gegliedert, die Bogenöffnung steht zur Pfeilerstärke in richtigem Verhältnifs; die spätere Erneuerung beschränkt sich dagegen nur darauf eine nothdürftige Überbrückung des Thales auf Kosten des künstlerischen Anblicks wiederherzustellen. Die Bogenweite von 8^{m} war den Baumeistern zu grofs. Da man aber die stehen gebliebenen Pfeiler wieder mitbenutzen wollte, so verstärkte man sie auf das Doppelte und verringerte dadurch die Bogenöffnung. Es ist aufserdem die Verstärkung der Pfeiler eine ganz unregelmäfsige, dieselbe ist bald an der südlichen, bald an der nördlichen Seite des Pfeilers angesetzt, mehrere Male steht der alte Kern in der Mitte des neuen Pfeilers. In Folge dessen sind auch die Bogenöffnungen verschieden grofs und es liegen daher die Scheitel und Kämpfer der Bogen nicht in derselben Höhe. Auf den jetzt vorhandenen Bogenstellungen liegen noch neben einander zwei Wasserkanäle, welche nach dem über den Zustand der Ruine Gesagten selbstverständlich nicht der ursprünglichen Anlage angehören können.

Soweit der jetzige dem Auge sichtbare Zustand des grofsen Aquäducts. Es lag nun die Vermuthung nahe, dafs die vielen Thonrohrscherben, welche auf den Feldern in der Nähe des alten Aquäducts umherlagen, zu der alten Leitung gehören möchten. Diese Thonröhren hatten eine zwischen $6-9^{cm}$ variirende Wandstärke bei einem inneren Rohrdurchmesser von $16-18^{cm}$; ihre Länge betrug ca. 48^{cm}.

Die Ausgrabungen, welche an dem grofsen Aquäduct angestellt wurden, ergaben als erstes Resultat, dafs das Mauerwerk noch an beiden Seiten weiter den Berg hinauf ging und zwar an der Südseite, wo der Berg steiler abfällt, ca. 70^{m}, und auf der Nordseite der langsamen Steigung entsprechend mehrere hundert Meter weit. Die zunächstliegende Vermuthung, dafs der ursprüngliche Bau vielleicht noch eine zweite Bogenstellung über der unteren gehabt hätte, mufste deshalb fallen gelassen werden, weil das Mauerwerk am Berge als ein zusammenhängendes sich ergab, das je höher den Berg hinaufgehend um so weniger stark construirt und zuletzt nur aus kleinen Bruchsteinen und Quadern erbaut sich zeigte. Man wurde also auch hier zur Annahme einer Druckrohrleitung gedrängt. Die gefundenen Thonröhren mit den starken Wandungen unterstützten diese Annahme. Schwieriger aber war die Beantwor-

tung der Frage, wie die Röhren auf dem Aquäduct befestigt gewesen seien. In den Mauern, welche die Felder umgrenzen und in dem Schutthaufen fanden sich bei längerem Suchen über zwanzig grofse Quadersteine von fast cubischer Form mit 60—80^{cm} Stärke, welche alle eine gleiche Durchbohrung von ca. 24^{cm} zeigten und bald mit, bald ohne Muffenansätze waren. Bei aller Ähnlichkeit weicht deren Form von der der durchlöcherten Plattensteine der Bleirohrleitung hinreichend ab, um beide von einander zu unterscheiden. Es lag nahe diese Quadern mit den Thonröhren, zumal der Durchmesser annähernd übereinstimmte, zusammen zu bringen, und es wurde diese Vermuthung zur Gewifsheit, als schliefslich ein solcher Lochstein mit zwei an jeder Seite in der Muffe mit Kalk vermauerten Thonrohrenden gefunden wurde. Demnach war klar, dafs Lochstein und Thonrohr mit einander abwechselten; die Befestigung der Steine auf dem Aquäduct war eine sehr einfache, da die grofsen Quadern leicht mit dem Quadermauerwerk des Aquäducts in feste Verbindung gebracht werden konnten. Auch war die Frage nach der Art der schwierigen Muffendichtung durch die Abwechslung von Quader und Thonrohr, wobei allerdings bedeutende Mittel zur Aufwendung kamen, gelöst. Die Stärke der Wandungen und die grofsen Trachytquadern liefsen auf einen ziemlich bedeutenden Wasserdruck schliefsen.

Zeit und Mittel fehlten, um der Leitung der Länge nach zu folgen, aber ein glücklicher Zufall führte es herbei, dafs man auf der Südseite in halber Höhe des Berges eine horizontal gehende Thonrohrleitung, aber von geringer Wandstärke und ohne Muffendichtung, fand und bei Verfolgung derselben auf das obere Ende des grofsen Aquäducts traf. Die Stelle wurde freigelegt und es kam ein gewöbter Kanal zu Tage, der vom grofsen Aquäduct nach Westen zu in horizonter Richtung abbog. Damit war man über den Verlauf der Leitung auf dieser Seite des grofsen Aquäducts im Klaren.

Es wurde nun auf dem entgegengesetzten Berge ca. 3—4^{m} höher als die Südecke des Aquäducts ebenfalls ein Versuchsloch gemacht. Man stiefs dort sofort auf Mauern, die sich dann als die Mauern von zwei nebeneinander liegenden Bassins ergaben. An dieselben schlofs sich an der einen Seite die Fundamentmauer des Aquäducts an, und in das obere der beiden Bassins mündete ein Zuleitungskanal, der nach Dr. Schuch-

hardt's Ermittlung aus 3 nebeneinander liegenden Thonrohrleitungen bestand. Es fand sich aber nur noch die Sohle des Kanals, resp. die Untermauerung der Rohrleitung vor.

Damit waren die beiden Endpunkte des grofsen Aquäducts festgelegt; die beiden Bassins waren Klärbehälter, um das Wasser noch einmal, bevor es in die Druckrohrleitung eintrat, zu reinigen und die festen Bestandtheile zurückzuhalten. Auf der Anschlufsmauer des unteren Bassins an das Aquäductfundament lagen mehrere grofse Quadern mit rechteckigen und halbkreisförmigen Ausarbeitungen, zweifellos die Muffensteine für den Anfang der Thonrohrleitungen. Nach der Vertheilung dieser Steine konnte man schliefsen, dafs fünf Leitungen nebeneinander über den Aquäduct geführt waren. Bei den weiteren Grabungen und Nachforschungen wurden auch an einer anderen Stelle auf dieser Bergseite vier Lochsteine mit eingemauerten Thonröhren gefunden, die in ihrer ursprünglichen Stellung liegend und jeder Stein einer andern Leitung zugehörend, die Existenz von vier Leitungen nebeneinander zur Gewifsheit machten. Es blieb aber auch an dieser Stelle noch Platz für eine fünfte Leitung übrig. Somit war das Problem der Anlage und Construction des grofsen Aquäducts mit seinen ursprünglichen Leitungen gelöst.

Die Messungen ergaben, dafs die Thonrohrleitungen einem Wasserdruck von ca. 20^{m} unterworfen gewesen waren und dafs daher die Stärke der Rohrwandung und die Sorgfalt der Construction wohl berechtigt war. Um die Leitung controlliren zu können, waren runde Reinigungsöffnungen in einigen der grofsen Quadern angebracht; in einer derselben wurde auch noch ein runder Stein in das Loch eingepafst und die Fuge mit Kalkmörtel vergossen gefunden.

Mit Leichtigkeit konnte vom grofsen Aquäduct aus der Abflufskanal südwärts weiter verfolgt werden. Der zweite kleinere Aquäduct lag zwar auf erheblich höherem Terrain als der grofse, aber es stellte sich doch heraus, dafs die Sohle des vorher erwähnten Abflufskanals noch ca 80^{cm} höher lag als die Oberkante dieses Aquäducts. Es wurde an diesem Aquäduct auch wieder Zuflufs und Abflufs aufgesucht und gefunden. Der Zuflufs kam von Westen, der Abflufs am Stadtberge schwenkte nach Osten ab. Der Kanal wurde also vom grofsen Aquäduct aus westlich um den Berg zwischen den Aquäducten herumgeführt, überschritt die dem

Stadtberge zunächst gelegene Einsattlung mittelst eines kleinen Aquäducts und mit natürlichem Gefälle, und nahm dann seinen Weg östlich um den Stadtberg herum. Dort auf der Ostseite wurde weiterhin ein gemauerter und gewölbter Kanal aufgefunden, der nach dem Nivellement nur 2^{m} tiefer lag als die Sohle des Kanals am kleinen Aquäduct und in der Construction mit diesem übereinstimmte, sich also als die Fortsetzung desselben darstellte. Da dieser Kanal aber wieder höher lag als das Gymnasium an der Südseite des Stadtberges, so darf man wohl annehmen, dafs er mit dazu bestimmt gewesen ist dieser Bauanlage das erforderliche Wasser zuzuführen. Eine genaue Zeitbestimmung für die Errichtung der Aquäducte läfst sich vorläufig nicht geben, ich möchte dieselbe aber in nicht zu späte Zeit setzen. Die Römer scheuten sich, wie z. B. der mehrstöckige Aquäduct auf Lesbos beweist, sonst nicht vor zwei- und dreistöckigen Anlagen, und es mag daher in der statt dessen hier gewählten Verbindung eines Aquäducts mit einer Druckrohrleitung noch eine Anlehnung an die bis dahin übliche Weise der älteren Druckleitungen sich geltend machen.

Wir kommen noch einmal kurz auf den Wiederaufbau des grofsen Aquäducts nach dessen erstem Zusammensturz zurück. Bei der Reconstruction sah man davon ab das Wasser auf der Südseite wieder 20^{m} hoch zu heben. Abgesehen davon, dafs die späte Zeit, in welche diese Arbeit fällt, sich nicht mehr gern mit solch schwierigen Anlagen, wie Druckrohrleitungen, befassen mochte, wird man von einer solchen um so mehr haben absehen können, als inzwischen die römische Stadt sich grofsentheils unten in das Thal hinein ausgedehnt hatte, die Benutzung des früher, wie wir annahmen, von der Aquäductleitung versorgten Gymnasiums *τῶν νέων* vielleicht schon in Abnahme war und man also bei der schon bedeutenden Höhe des Aquäducts von 120^{m} über der Thalsohle nicht mehr nöthig hatte das Wasser noch künstlich höher zu fördern. Es wurden daher an Stelle der schwer zu construirenden und dichtzuhaltenden Thonrohrleitungen zwei grofse gemauerte Kanäle von ca. 60^{cm} Weite und 1^{m} Höhe über die neue Bogenstellung geführt. Am Ende des Aquäducts vereinigen sie sich in einem Bassin, welches von uns ebenfalls ausgegraben wurde und in welchem sich mehrere Röhren der alten Leitung noch unbeschädigt vorfanden, und von hier aus gehen zwei Thonrohrleitungen mit starkem Gefälle, eine nach Westen, die andre nach Osten ab, um das

Wasser zur Stadt zu leiten. Dafs diese Leitungen aber keinem Druck mehr unterworfen gewesen sind, geht unter andrem auch aus der geringen Stärke der Thonrohrwandung und der mangelhaften Muffendichtung hervor.

Die Untersuchung der römischen Leitung ist über die hier beschriebenen Theile hinaus bis in das höchste Quellgebiet im Gebirge mit Energie und Erfolg weitergeführt von Herrn Dr. Schuchhardt, dessen eigenen Bericht ich hier einreihe.

Die Wasserleitung vom Madarasdagh.

In Pergamon konnte man gelegentlich die Behauptung hören, dafs die grofsen Bogenbauten hinter der Burg nur das letzte Ende einer ganz vom Madarasdagh hergeführten Wasserleitung seien. Aber niemand war geneigt das Gerede ernst zu nehmen; denn nach allem, was bisher von jenen nördlichen Gegenden erkundet war, schien eine Herleitung von dem 10 Stunden entfernten Gebirge aus topographischen Gründen nicht wohl möglich. Erst die überraschenden Ergebnisse der Gräber'schen Untersuchungen regten zu näherem Eingehen auch auf diese Frage an, und mir wurde, da Herr Gräber schon abgereist war, der Auftrag die Leitung zu suchen. Zu meiner folgenden Schilderung ist der Plan auf Taf. II zu vergleichen.

An Markttagen liefsen wir in der Stadt Nachfrage halten nach Leuten aus der Madarasgegend, die von der Sache wüfsten, und der Hodscha (Lehrer) des Dorfes Kirani erbot sich, uns sogar die Quelle zu zeigen, welche die Leitung gespeist habe. Mit ihm ritten am 16. November Herr Architekt Senz und ich, begleitet von unserm Kawassen und einem griechischen Arbeiter, in das Gebiet des sog. Kosak. Dreiviertel Stunden vor seinem Dorfe führte uns der Türke zu einem Aquäduct, der die grofse Leitung getragen haben sollte. Die Construction war augenfällig römisch, aber bei dem Gewirr von Schluchten und Klippen umher war nicht zu sehen, wie von hier aus eine Verbindung aufwärts nach dem

Madaras oder abwärts nach Pergamon bestehen könnte. Wir glaubten daher die Anlage als zu irgend einer nahegelegenen antiken Ortschaft gehörig betrachten zu müssen. In Kirani zeigte man uns angeblich aus derselben Leitung stammende Thonröhren. Auch sie waren antik, hatten gröſsere Form und stärkere Wandung, als die heute üblichen, und bestanden aus einem groben, mit vielen Kieseltheilchen durchsetzten Thon.

Wir übernachteten im Dorfe und wurden am andern Morgen grades Weges zu der verheiſsenen Quelle geführt. Dieselbe lag $2\frac{1}{2}$ Stunden gegen Norden, 1174^{m} hoch im Madarasdagh, dicht unter dem Kamm des Gebirges. Wir stiegen nur einige hundert Schritt höher und sahen hinüber zum Ida. Die Quelle ist noch heute in der ganzen Gegend berühmt wegen der Fülle und auffallenden Kälte ihres Wassers. Atsch öldüren suju nennen sie die Türken, d. h. wer nüchtern davon trinkt, der stirbt. Unser Führer erklärte, daſs das Wasser noch vor wenigen Jahren aus antiken Thonröhren ausgeflossen sei; jetzt war die kleine Thalrinne weiter ausgerissen, die Röhren fortgeschwemmt und die Quelle trat einige Schritte oberhalb der früheren Stelle unmittelbar aus dem Felsen zu Tage. Es lagen aber noch Bruchstücke von Thonröhren umher, die mit den Tags zuvor besichtigten genau übereinstimmten. Eine Leitung war also jedenfalls von hier ausgegangen, aber daſs dieselbe bis nach Pergamon führe oder auch nur zu dem Aquädukt bei Kirani gelangen könne, wollte uns immer noch nicht in den Sinn.

Wir ritten in östlicher Richtung über den Majadagh und fanden auf der andern Seite in einem Wasserdurchriſs wieder viele Röhrenstücke. Diese Stelle lag, wie das Barometer angab, 1103^{m} hoch, also schon 71^{m} unter der Quelle. Die Leitung muſs demnach den Berg in ziemlich starkem Gefälle umgangen haben.

Eine halbe Stunde weiter, unter der Karasu Alani, wurde uns dann beim Nachgraben das ganze System klar: es lagen drei Röhren neben einander; sie waren, wie es schien, in das gewöhnliche mit Schieferstückchen durchmischte Erdreich gebettet und durch dieses auch seitlich um je 10^{cm} von einander getrennt, obenauf bedeckt von ca. 6^{cm} dicken Schieferplatten ohne Mörtelverband. Die Röhren, welche wir hier maſsen, zeigten folgende Gröſsenverhältnisse: Länge 64^{cm}, innerer Durchmesser 19^{cm}, Wandstärke $32-40^{mm}$. Das Barometer gab 1078^{m} an.

Der Hügel, auf dem wir uns befanden, senkt sich sehr langsam gegen Westen, über ihn geht die Leitung schräg hinweg, — wir mafsen in der Mitte 1066^{m} — um dann an seinem Südhang entlang zu ziehen und nach weiter Umgehung der dazwischen liegenden Einschnitte den Jelli Gedik zu erreichen. Von dem Nordhange dieses Berges stammten die im Dorfe befindlichen Röhren, die fast genau dieselben Maafse aufwiesen wie die von uns selbst aufgedeckten, nämlich: Länge $64\frac{1}{2}^{cm}$, innerer Durchmesser 18^{cm}, Wandstärke 35^{mm}.

Wir waren dem Ausläufer von Karasu Alani bis zur Thalsohle gefolgt und drüben direct auf das Kabak Burnu (904^{m}) gestiegen, einen sehr markanten, breiten Bergrücken, der in origineller Weise zur Überführung des Wassers in das bedeutend tiefer liegende folgende Gelände benutzt ist. Die Leitung zieht zunächst quer über ihn hinweg, wie die vielen umherliegenden Bruchstücke anzeigen, macht dann aber an seinem Südhang eine Schleife, um in dem nöthigen langsamen Gefälle das Kudjakran zu erreichen. Auf der unteren Linie am Kabak Burnu fanden wir wieder 3 Röhren neben einander erhalten (800^{m}), ebenso am Anfang (741^{m}), sowie am Ende der Umgehung von Kudjakran (726^{m}).

Nun ändert sich plötzlich die Gegend. Die kahlen, nur zur Weide benutzbaren Bergrücken, an die sich die Leitung bisher anlehnte, hören auf, und es folgt ein ebeneres überall mit Eichen bestandenes Terrain, das in den Einsenkungen seines sanften westlichen Abfalls die Dörfer Kirani und Karaweliler birgt. Als ich auf diesem Kudjawli genannten Höhenrücken entlang ritt, sah ich plötzlich nach Süden den Blick sich aufthun bis in die Kaikosebene hinunter. Nun war es klar: wir befanden uns bereits auf der Wasserscheide zwischen Kosak und Kaikosgebiet, und die Leitung mufste von hier aus allerdings Pergamon in regelmäfsigem Gefälle erreichen können. Die von der Ostseite des Kudjawli abfliefsenden Gewässer gehen zwischen Ada Gediyi und Baschörendagh hindurch zum Ketios und bilden die bis dahin viel weiter südlich angenommene Quelle dieses Flusses. Zugleich lag auch der kleine Aquäduct schon nahe vor uns, und somit war in der That an dem Vorhandensein einer Leitung, wie die Türken sie behauptet hatten, kaum mehr zu zweifeln.

Das Kudjawli senkt sich nach SW leise ab; die Leitung hält sich

daher zunächst an seinem nordwestlichen Abhange und geht nachher erst auf den Kamm selbst über. Dies geschieht kurz vor dem „kleinen Kirchhofe“ (Kudju-Mezarlik, 629^{m}). Nachher verbreitert sich der Rücken, wir kommen in das Gebiet des Baschörendagh und finden hier den schon öfter erwähnten Aquäduct. Der Bogen selbst — es war sicher nur einer — ist eingestürzt. Auf beiden Seiten des etwa 5^{m} breiten und 3^{m} tiefen Thales stehen noch die Pfeiler gegen 2^{m} hoch aufrecht, und zwar links einer, nachläfsig construirt aus unregelmäfsig behauenen Steinen mit Gufsmauerwerk dahinter, offenbar spätrömische Arbeit; rechts dagegen zwei: der eine jenem linksufrigen grade gegenüber, der andere 4,5^{m} entfernt bachabwärts. Diese beiden sind sorgfältig gebaut aus grofsen Kalksteinquadern mit Randbeschlag und Bosse. Ich kann mir das Vorhandensein zweier Pfeiler auf einer Seite und die viel spätere Technik des einen auf der gegenüberliegenden nur durch die Annahme von drei Bauperioden erklären. Wir haben zwei Überbrückungen des Baches vor uns, von denen die untere offenbar die ältere ist, denn der spätere Pfeiler der oberen zeigt, dafs die Leitung zuletzt über diesen Bogen lief. Die ursprüngliche untere Anlage stürzte ein, der Bach, der besonders stark gegen das linke Ufer drängt, rifs den hier gelegenen Pfeiler völlig fort. Den neuen Bogen setzte man, um ihn besser zu sichern, weiter aufwärts, aber auch hier hielt der linke Pfeiler nicht Stand, und an seine Stelle trat nun als Denkmal der dritten Bauthätigkeit das späte Mauerwerk, das noch erhalten ist.

Die Breite beträgt bei beiden Überführungen 1,90^{m}, bietet also hinreichenden Platz für 3 Röhren. Die Technik der beiden Pfeiler des rechten Ufers erinnert sowohl in der Behandlung der einzelnen Steine (Bosse, Randbeschlag, rauhe Lagerfuge), wie auch in der Zusammenfügung derselben (besonders den flachen vorspringenden Kämpfern) durchaus an die ältern Theile des grofsen römischen Aquäducts hinter der Burg von Pergamon.

Weshalb grade an dieser Stelle eine Überführung angelegt wurde, während man auf dem ganzen bisherigen Wege mit Umgehung der Thäler ausgekommen war, erklärt sich, glaube ich, folgendermafsen. Das Bachthal, um das es sich handelt, ist sehr steil und dabei sandig; in ihm konnte man keine Schleife anlegen, ohne bei jedem Regengufs einer

Zerstörung gewärtig zu sein. Dasselbe oben zu umgehen war aber auch unmöglich, da grade hier nach Westen zu eine Steigung im Terrain beginnt, die ohne Druck nicht zu überwinden gewesen wäre. Der Aquäduct liegt 613^{m} hoch.

So weit hatte der erste Untersuchungstag uns geführt. Da stellten sich unerwartete Schwierigkeiten ein. Als wir nämlich Abends in das Dorf Kirani zurückkamen, herrschte grofse Aufregung ob der mit Hacke und Schaufel ausgezogenen Franken. Die Behörden bestritten unsre Berechtigung zu so eingehender Landesbesichtigung und hatten den Bauern verboten, uns etwas weiteres zu zeigen. Wir mufsten zunächst nach Pergamon zurückkehren, und erst als ich nach einigen Tagen mit einer besondern Erlaubnifs des Kaimakams ausgerüstet und von unserm türkischen Commissär Bedry-Bey begleitet wieder kam, gelang es einen neuen Führer zu finden. Ich sah voraus, dafs die nun folgende Begehung sehr beschwerlich werden würde und liefs daher die andern mit den Pferden direct nach Sarisu gehen, wo sie uns gegen Mittag erwarten sollten; mit mir nahm ich nur den Griechen Nikolas, einen unsrer stärksten und zuverlässigsten Arbeiter, und folgte dem türkischen Führer.

Die Leitung umgeht das Thal, welches die Kudjawli-Höhe vom Baschörendagh trennt und zieht drüben an dem mäfsig abfallenden Hange entlang. Hier ist an mehreren Stellen die Untermauerung noch vorhanden, welche zur Sicherlegung der Röhren an diesem mit einer dicken Humusschicht bedeckten Hange wohl nöthig war. Sie besteht, soweit sich nach dem zu Tage Liegenden feststellen liefs, aus lose nebeneinander gelegten Bruchsteinen und zeigt, wie ich an einer Stelle messen konnte, eine Breite von 1,84^{m}.

Der Bergrücken, den die Leitung gewählt hat, ist nur ein weit vorspringender Ausläufer des Baschörendagh. Sobald sie an sein Ende gekommen ist (606^{m}), mufs sie wieder einbiegen und ein neues 25^{m} tiefes Thal umgehen. Und nun beginnt die wildeste Partie. Die Bergwand fällt vom Sakarkaya herunter oft ganz steil ab. Durch den Regen der voraufgegangenen Tage waren die von Ziegenheerden getretenen schmalen Steige noch schmaler geworden, so dafs wir uns oft mit Händen und Füfsen festklammern mufsten und mein Grieche einmal über das andere rief: *θάνατος, θάνατος εἶναι!* Für die Leitung mufs hier die Bettung gröfs-

tentheils in das Schiefergestein eingeschnitten gewesen sein; stellenweise zeigten sich davon noch die Spuren.

Genau dem Ada Gediyi gegenüber fand ich wieder an zwei Stellen nach einander die bewufsten 3 Röhren noch in ihrer ursprünglichen Lage (573^{m}). Während der nächsten Stunden konnten so feste Anhaltspunkte nicht erlangt werden, da wir wegen des ungemein schwierigen Terrains und der unendlichen Bogen, die die Leitung macht, häufig die eigentliche Spur verliessen und bald über eine Höhe steigend, bald ein Thal durchschreitend ein gutes Stück abschnitten. Aber so oft wir wieder ungefähr in die Höhenlage kamen, zeigten sich sofort die leitenden Röhrenstücke, in Höhen von bald 546^{m}, bald 540^{m} umherliegend. Es ist klar, dafs diese Zahlen immer nur das Minimum der Höhe, welche die Leitung inne haben mufs, angeben; denn die Bruchstücke sind, besonders bei diesen steilen Abhängen, oft weit herabgeschwemmt. Beim Aufstieg aus dem Khirsisdere (Sohle 470^{m}) fand ich sie erst 490, dann 520, 522 und 530^{m} hoch liegen, und der Sattel, der den Ausläufer des Sarikaya mit dem Ada („Insel“) verbindet, hat sogar 567^{m} Höhe. Über diesen Sattel aber, behauptete mein türkischer Führer mit Bestimmtheit, sei die Leitung gegangen und nicht um den Ada herum; denn drüben fänden sich durchaus keine Spuren. Da der Mann sich sonst genau unterrichtet zeigte, glaube ich, dafs ihm auch hier zu trauen ist, und wir hätten dann mit diesem Sattel ein festes Minimum für die Höhenlage der Leitung auf dem zuletzt durchmessenen Wege. Sie wäre von dem letzten constatirbaren festen Punkte (dem Ada Gediyi gegenüber) bis hierher nur von 573 auf 567^{m}, also um 6^{m} gefallen. Das ist aber offenbar zu wenig; da an diesem Tage kein Standbarometer beobachtet wurde, konnte das mitgeführte Instrument nicht controlirt werden; dasselbe mufs gegen Mittag hin gefallen sein und hat daher für den Sattel eine zu hohe Meterzahl angegeben.

Auch für die folgende Strecke liefsen sich zunächst keine völlig sicheren Anhaltspunkte gewinnen. Der Weg für die Leitung ist indessen jetzt einfach durch das Terrain vorgeschrieben. Von dem Aquäduct bei Kirani an bis nach Sari su hielt sie sich ebenso wie der vielbenutzte Reitweg von Pergamon in das östliche Kosak an dem mächtigen Höhenzuge, dessen keulenartige Verdickung im Norden der Baschörendagh mit

seinen knorrigen Auswüchsen, dem Sakarkaya, Khirsiskaya und Sarikaya ist. Eine halbe Stunde südlich von Sarisu aber theilen sich die Kämme: derjenige, auf welchem der Reitweg entlang führt, setzt sich direct südlich fort und läuft nach $1\frac{1}{2}$ Stunden bei dem Dorfe Jemischkjöi flach in das Thal aus, der andere, der für die Leitung gewählt wurde, Tschukurbagh mit Namen, zieht südöstlich und schliefst an den Jaghdjibiderdagh an, der seinerseits wieder durch eine Reihe weiterer, durch schmale Sättel verbundener Kuppen zuletzt mit dem Stadtberge von Pergamon in Verbindung steht.

Die Stelle, wo der Tschukurbagh abzweigt, zeigt eine leichte Einsattlung und bietet damit ein Maximum für die Höhenlage der Leitung (516^m). Diese hält sich nun immer auf dem Kamm der Wasserscheide zwischen Ketios und Selinus, etwaige Kuppen, die aus derselben aufsteigen, umgehend und so bald auf der Ketios-, bald auf der Selinusseite laufend. Eine Viertelstunde hinter der erwähnten Einsattlung fanden wir auf der Ketiosseite an drei Stellen Röhren noch in ursprünglicher Lage (482^m), und den ganzen Weg entlang begleiteten uns die zahllosen Bruchstücke. Da wo diese Bergkette an die höhere des Jaghdjibider-Dagh anschliefsen will, wird sie ganz schmal und senkt sich tief ein; das Barometer zeigte um $2^{42}: 453^m$, um $2^{46}: 442^m$, um $2^{48}: 420^m$. Ein solches Gefälle wäre für die Thonrohrleitung zu stark gewesen, und man hat daher diesen Sattel überbrückt. Noch sind die Trümmer eines zusammengefallenen Aquäducts sichtbar; derselbe scheint aber sehr anspruchslos gebaut gewesen zu sein, der wüste Steinhaufen zeigt nur Bruchsteine mit Mörtel, keinerlei Quadern. Vielleicht hatte das Ganze nur die Form einer Mauer.

Die Leitung zieht alsdann dicht über dem Dorfe Jeni Güde hin und weiter an dem ganzen östlichen Abhange des Jaghdjibider-Dagh entlang. Wenn auch keine Röhren in ihrer ursprünglichen Lage zu Tage treten, so leiten doch immer die Bruchstücke; ich fand dieselben in 404, 402^m u. s. w. Höhe. Sie führen mit Sicherheit über den schmalen mit Tannen bestandenen Sattel, der den Jaghdjibider-Dagh mit dem Hagios Georgios-Berge verbindet, und zwar in dem südlichen tiefsten Theile desselben auf der Höhe entlang. Diese Stelle liegt 395^m hoch und würde also wieder ein sicheres Maximum darbieten, speciell aber für die Frage

interessant sein, ob hier in der Nähe ein Bassin gelegen haben kann, welches das Madaraswasser auch in die Bleirohr-Druckleitung geführt und so bis oben auf die Burg gebracht hätte.

Beim Hagios Georgios mufs die Trace etwas oberhalb der Quelle und der Kapelle liegen. Wir trafen dort neben vielen kleinen auch auf zwei grofse und sicher zugehörige Thonstücke. Die Quelle liegt 375m hoch. Die Leitung umgeht nun den Hagios-Georgios-Berg östlich, kommt vorbei an der kleinen Quelle an seiner Südseite und zieht dann südwestlich gewendet den Abhang hinunter. Hier liegen an zwei Stellen die Röhren noch an ihrem Platze (330m). Die Bruchstücke führen ferner westlich um einen kleinen Hügel herum, südlich von demselben aber auf den Sattel, der ihn von dem langgestreckten Bassinhügel (vgl. oben S. 16 f.) trennt, und auf dessen östlicher Seite die erste Reihe der durchlöcherten Steine der Bleirohrleitung liegt. Thon- und Bleirohrleitung haben sich also kurz vor jenem kleinen Hügel gekreuzt; denn am Südhang des Hagios-Georgios-Berges liegt der erste Lochstein (wenn auch von seiner Stelle gerückt) noch westlich von unserer Leitung.

Von dem letztbesprochenen Sattel aus wendet sich die Leitung an den Westhang des Bassinhügels, wo zahllose Thonrohrstücke ihren Verlauf mit voller Sicherheit anzeigen, und da die Zuleitung in das Bassin, wie die Grabung dort lehrte, von NW. her erfolgte, so kann man wohl mit Sicherheit annehmen, dafs es diese Madarasleitung ist, die ihr Wasser in das, wie Gräber nachgewiesen hat, zu der römischen Aquäductleitung gehörige Bassin ergofs. Der Sattel, den sie zuletzt passirte (bei den durchlöcherten Steinen) liegt 221m, das Bassin 208m hoch, das letztere konnte also durchaus ohne Druck erreicht werden.

So weit Herr Schuchhardt.

Bevor ich zum Schlusse zu einer kurzen Aufzählung der anderweitigen antiken Wasserzuleitungen von Pergamon übergehe, ist hier die bisher schon mehrfach gestreifte Frage nach der Zeitbestimmung der bisher geschilderten von Norden her dem Stadtberge zugeführten Leitungen wenigstens kurz aufzunehmen. Es handelt sich dabei vor Allem um die, wie wir sahen, ungewöhnliche Leistung in Anlage der unterirdischen Blei-

rohrleitung. Alle Erwägungen führen darauf hinaus, dafs sie älter ist als die unzweifelhaft römische Leitung mit den Aquäducten und weiter wird man dann ihre Entstehungszeit nur unter der Herrschaft der pergamenischen Könige zu suchen haben.

Schon ihre Bestimmung mit äufserstem Aufwande das Wasser auf den höchsten Gipfel des Stadtbergs zu leiten spricht dafür, wenn man sich vergegenwärtigt, dafs in der Königszeit Pergamon eine Bergstadt war und selbst bei der äufsersten vermuthlich unter Eumenes II. erfolgten Erweiterung nicht ganz bis in die Thalsohle des Ketios und Selinus hinabreichte, wenn man sich ferner vergegenwärtigt, dafs der älteste, vornehmste und damals mit Markt, Theater und Palästen jedenfalls belebteste Theil der Stadt die höchsten Höhen einnahm. Damals und nur damals war das dringende Bedürfnifs vorhanden das Quellwasser so hoch hinaufzuführen.

Die Grofsartigkeit der Idee, die echt griechische Solidität der Anlage hat grofse Verwandschaft mit den genialen Plänen der Herrscher aus der Diadochenzeit. Der Kühnheit der Conception nach ähnliche Anlagen finden wir in Pergamon in der Theaterterrasse und der grofsen Stadtmauer des Königs Eumenes II. und man wäre am meisten geneigt die Erbauung der Leitung in die Regierungszeit dieses Königs zu setzen. Bis jetzt kennen wir von der Leitung nur das Constructionsprincip; irgend welche Beigaben architektonischer Ausbildung, aus welchen man durch stilistische und ornamentale Einzelheiten auf die Zeit der Erbauung schliefsen könnte, sind noch nicht gefunden. Es wäre ja nicht unmöglich, dafs an der Stelle, wo die eigentliche Hochdruckleitung beginnt, also an einer Stelle am Hagios-Georgios-Berg ca. 20—30^{m} höher als die Burgspitze, sich bei weiteren Nachforschungen eine Bassinanlage fände, deren bauliche Ausführung einen bestimmten Schlufs auf die Entstehungszeit erlaubte. Sonst ist noch zu bedenken, dafs in der Königszeit, wo die Residenz eine mehrfach bis vor ihre Mauern mit Krieg überzogene Festung war, es besonders angezeigt war, die ganze Anlage unterirdisch und ohne äufsere auffallende Merkmale auszuführen.

Die grofse Bleirohrleitung ist jedoch nicht die einzige, deren Ursprung wir in die Königszeit verlegen können. Da die Stadtmauer des Königs Eumenes II. fast bis an den Fufs des Berges reicht, so mün-

den die beiden grofsen Kanäle, welche im oberen Selinus- und Ketios-Thale nahezu in der Thalsohle liegen, ihres geringen Gefälles wegen aber bei Pergamon schon 20—30^{m} über dem Flufsbett sich erheben, noch innerhalb der Stadtmauern in die Unterstadt. Da von dem Selinuskanal nur das in den Fels gehauene Bett der Leitung, aber kein Mauerwerk mehr erhalten, resp. bis jetzt gefunden ist, so läfst sich für den griechischen Ursprung dieser Leitung noch kein directer Beweis erbringen, wohl aber für den der Ketios-Leitung. Diese zeigt zwar fast überall römisches Mauerwerk, es ist auch der Aquäduct im oberen Ketiosthale ebenfalls römischen Ursprungs, aber an der östlichen Burgseite, aufserhalb der Stadtmauer, bei der Quelle Hagios Stratigos, ist noch ein Theil des Kanals aus griechischer Zeit erhalten. Derselbe hat dort die bedeutende Gröfse von 1,60^{m} lichter Höhe und 0,94^{m} Breite; er ist aus guten Quadern gebaut und hat eine aus drei Platten bestehende Abdeckung. Über zwei schräg gestellten Platten liegt die dritte horizontal, genau dieselbe Construction, wie sie die alten grofsen Entwässerungskanäle auf der Burg zeigen. Die Gröfse des Kanals beweist, dafs er sehr viel Wasser aus dem oberen Laufe des Ketios-Thals aufgenommen hat. Es sind die vielen Quellen, welche noch jetzt auf der rechten Seite des Ketios entspringend, Wasser geben, gewifs auch im Alterthum schon gefafst gewesen und deren Wasser in den Kanal aufgenommen worden. Von der Quelle Hagios Stratigos ist dies unzweifelhaft, denn das unmittelbar über dem Kanal stehende Brunnenhaus mit seinen 3 Säulen ist, wenn auch umgebaut, so doch antik.

In römischer Zeit, vielleicht bei Anlage der grofsen Thermen (bisher meistens Basilika genannt), ist der Ketios-Kanal von Neuem ausgebaut und überwölbt worden. Die Stadterweiterung im Thale machte es nothwendig noch weitere, gröfsere Quellgebiete zu erschliefsen. Man hat daher den Kanal über den Ketios hinüber mit einem Aquäduct fortgeführt und so im Osten noch weitere Zuflüsse erreichbar gemacht. Die Behauptung ortskundiger Einwohner, dafs diese Zuleitung aus der Gegend des 8 Stunden entfernten Städtchens Soma im oberen Kaikosthale her erfolgt sei, hat durch die neuesten Beobachtungen ihre Bestätigung erfahren. Die durch einen Strafsenbau zu Tage gelegten Theile eines gewölbten Wasserkanals dicht vor Soma gleichen in ihrer Bautechnik ganz und gar dem

späten Bau des Kanals im Ketiosthale, wie Conze und Schuchhardt bezeugen; und letzterer hat jetzt auch in der Nähe der Pascha Ludscha, etwa in der Mitte zwischen Soma und Pergamon, die Überführung derselben Leitung festgestellt, wo oben auf dem römischen Bogen der 1^m breite Kanal noch erkennbar ist.

Die vorhin erwähnte Leitung im Selinusthale ist auch in sofern von Interesse, als noch jetzt eine moderne Wasserleitung genau denselben Weg nimmt. Die moderne Leitung liegt nur $2-3^m$ tiefer als der alte Kanal. Sie beginnt bei Kapukaya etwa 4 Kilometer nördlich von Pergamon, wo zwei Bäche sich zum Selinusflufs vereinigen. Von diesem Punkt wird auch der alte Kanal hergekommen sein und vielleicht in Verbindung gestanden haben mit einer dort vom Geiklidagh nieder geführten Leitung, wie sich aus neuerdings von Schuchhardt gefundenen Thonröhren und wahrscheinlich als Reste von Reinigungsbassins aufzufassenden Ruinen am Ostabhang jenes Gebirges schliefsen läfst. Der alte Selinuskanal liegt bei seinem Eintritt in die Stadt ebenso hoch wie die Ketiosleitung; die Gebäudeanlagen im unteren Stadttheil haben also von beiden Flufsthälern her mit Wasser versorgt werden können.

Damit ist die Wasserzuführung zur griechischen und römischen Stadt, soweit sie in den Betten und zwischen dem Laufe der beiden Flüsse Ketios und Selinus stattfand, klargelegt. Ein weiterer Hauptkanal kann auch nicht wohl mehr gefunden werden, da das ganze Quellgebiet im Norden durch die nachgewiesenen Leitungen schon in Anspruch genommen ist. Es werden daher vereinzelte Horizontalkanäle, welche an den Ost- und Westabhängen des Stadtberges noch gefunden sind, mit einer der hoch gelegenen, in erster Linie mit den Aquäductleitungen zusammen hängen. Von einer grofsen Thonrohrleitung, welche, vom kleinen Aquäduct ausgehend, Wasser nach Westen um den Berg leitete, haben wir den Anfang freigelegt.

Schliefslich haben wir, um von der Bewässerung der römischen Stadt eine weitere Übersicht zu geben, noch einen Kanal zu erwähnen, der heutzutage neben jenem soeben erwähnten im Selinusthale die Hauptwasserzuführung für Pergamon bildet und zweifellos auch antiken Ursprungs ist. Es ist der grofse Kanal, welcher von oberhalb des Asklepieions her kommt. Sein Lauf ist weit hinauf ins Gebirge des Geiklidagh

zu verfolgen. Die moderne Leitung verläfst im obern Laufe bald das alte Bett, folgt aber derselben Richtung, im Niveau nur wenige Meter tiefer gelegen. Der Kanal mufs namentlich dazu gedient haben, den ganzen römischen Stadttheil westlich vom Selinus zu versorgen. Er ist also, soweit er für die Stadtbewässerung diente, jedenfalls erst römischen Ursprungs. Im Übrigen mag seine Entstehung mit der Erweiterung und dem Ausbau des Asklepieion zusammenhängen. Denn dasselbe liegt an einer Stelle, die noch jetzt Quellen besitzt und zweifellos auch im Alterthum besessen hat; es wird daher erst eine Vergröfserung der Bauanlage auch die Vermehrung der Wasserzuführung nothwendig gemacht haben.

Fassen wir alles Vorhergehende in einem kurzen Verzeichnisse zusammen, so erhalten wir für Pergamon fünf grofse antike Wasserleitungen:

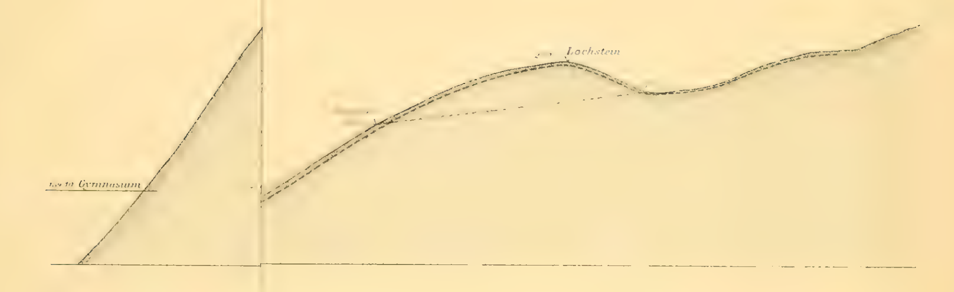
1) Die Bleirohrleitung der Königszeit.
2) Die grofse Thonrohrleitung mit den Aquäducten (Madarasleitung).
3) Der Kanal im Ketiosthale.
4) „ „ „ Selinusthale.
5) Die Asklepieionleitung.

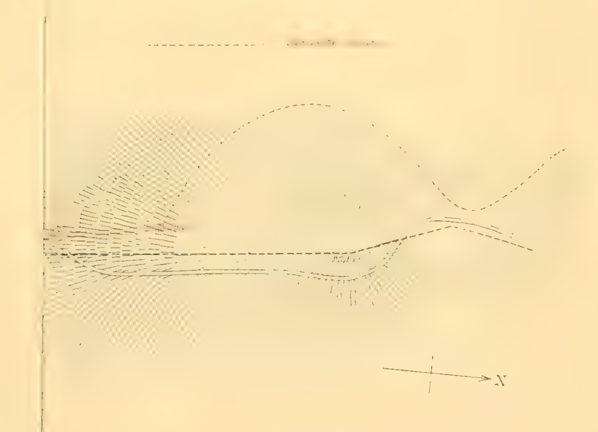
In der Wasserversorgung der Stadt müssen aufserdem, auch nachdem eine dieser Leitungen nach der andern angelegt war, die Cisternen eine grofse Rolle gespielt haben, deren auf dem Stadtberge noch heute eine ungezählte Menge vorhanden ist. Sie dienten zur Aufnahme des Regenwassers, möglicherweise wenigstens einzelne von ihnen auch als Wasserbehälter für das zugeführte Quellwasser; denn wenn man auch im Alterthum unsern heutigen Einrichtungen ähnliche Stadtbewässerungen mit Bleiröhren, Ausflufshähnen, Ventilen und Zubehör gekannt hat, so wird es doch in Pergamon auf dem hohen Stadtberge nicht viel anders gewesen sein, als heute noch in Constantinopel und vielen andern Orten des Orients. Die Leitungen sind nicht so grofs und des Wassers ist nicht soviel, zumal im Sommer, dafs das edle Nafs ununterbrochen allen Wohnungen zugeführt werden könnte. In Constantinopel giebt es Wasservertheiler und nur stundenweis bekommt dieses oder jenes Stadtviertel Wasser zugemessen. Es mufs sich also jeder Hausbesitzer in der Zeit, wo

das Wasser fliefst, für Stunden und im Sommer auch für Tage mit Wasser versehen.

Es würde hier zu weit führen näher auf die Cisternenanlagen einzugehen. Nur daran mag erinnert werden, dafs vor Anlage der grofsen Bleirohrleitung die Hochstadt überhaupt auf Cisternenwasser angewiesen war, soweit man nicht Wasser aus dem Thale holte. Um aber doch wenigstens Wasser in der unteren Stadt zu haben, mag in älterer Zeit zuerst der grofse Ketioskanal angelegt worden sein, in dem wir also die früheste Anlage dieser Art vermuthen möchten.

Ganz unberührt mufsten bei meinen Untersuchungen sowohl die Wasservertheilung innerhalb der Stadt, als auch die Entwässerungsanlagen bleiben, obwohl ein gründliches Studium derselben manche, auch für die Baugeschichte der Stadt werthvolle Aufschlüsse ergeben dürfte, Aufschlüsse, die ich namentlich von der grofsen Menge von Thonrohrleitungen erwarten möchte. Konnte ich mich bei der Kürze meiner Zeit nicht näher auf alle diese Studien einlassen, so habe ich doch nicht versäumt so viel wie möglich Aufnahmen im Einzelnen zu machen, welche die constructive Gestalt der Thonröhren, Cisternen und Entwässerungskanäle in einiges Licht zu setzen geeignet sein werden. Unter den Entwässerungskanälen ist von besonderer Grofsartigkeit der Anlage derjenige, welcher, nach allen Kriterien der Königszeit angehörig, von der Region der Paläste her nach Westen am Berghange und unter der Theaterterrasse her in das Selinusthal hinabführte.





Aufg. u. gez. von Fr. Graeber

Geogr. lith. Anst. u. Steindr. v. C. L. Keller, Berlin S.

Akropolis

Akropolis

Die Hochdruck-Wasserleitungen von Pergamon.



Römische Wasserleitung vom Madaras-Dagh bis Pergamon.

Aufg. u. gez. v. C. Schuchhardt

Geogr. lith. Anst. u. Steindr. v. C. L. Keller, Berlin S.

